

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

А.Н. КРЫЛОВ

ИЗБРАННЫЕ
ТРУДЫ



АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~

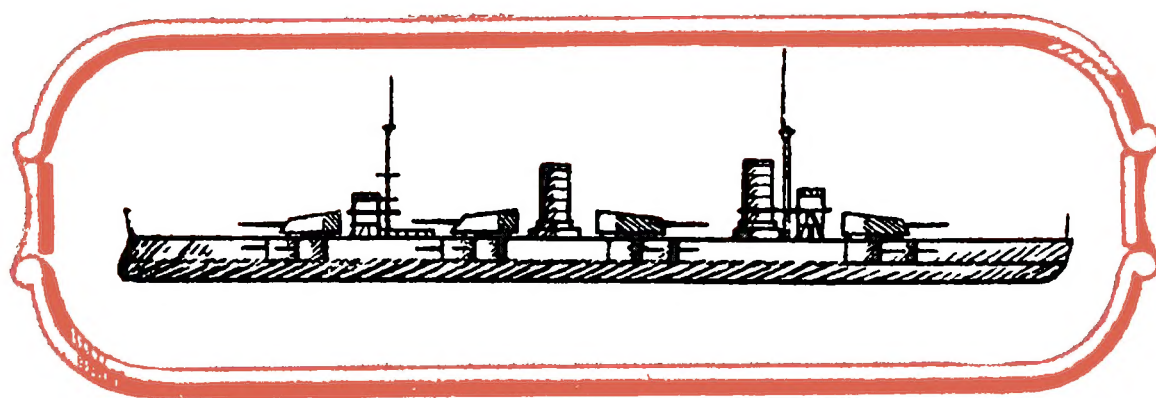


А. Н. К Р Ы Л О В

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

СТАТЬЯ И РЕДАКЦИЯ
АКАДЕМИКА Ю. А. ШИМАНСКОГО

ПРИМЕЧАНИЯ
ПРОФЕССОРА И. Г. ХАНОВИЧА



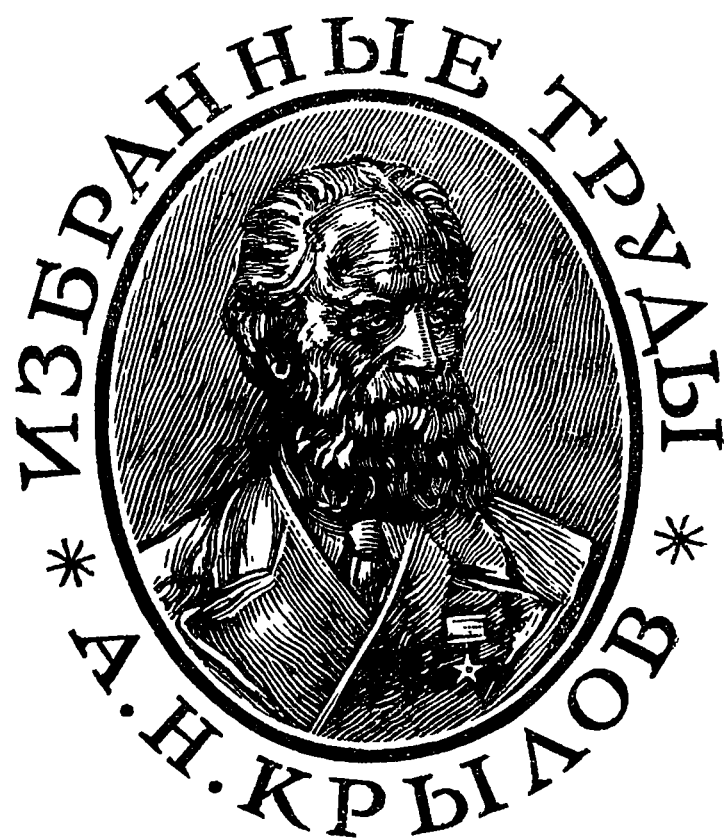
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

СЕРИЯ „КЛАССИКИ НАУКИ“

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *Н. Н. Андреев*, академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*, академик *Д. И. Щербаков*, академик *П. Ф. Юдин*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, профессор *Д. М. Лебедев*, профессор *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов*
(заместитель председателя)



ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ КОРАБЛЯ НА ВОЛНЕНИИ

Настоящий доклад делится на две части: собственно доклад и „Прибавление“ к нему. Отношение их таково: в первой части перечисляются полученные результаты, а в „Прибавлении“ они действительно выводятся математически, и объясняются применяемые для того способы.

Почти невозможно иначе начать рассмотрение качки корабля, как с имени покойного Фруда, классическое сочинение которого „О боковой качке корабля“ составляет краеугольный камень всякого исследования по этому предмету. В этом сочинении Фруд ставит вопрос в следующей общей форме: „Каково совокупное действие непрерывного ряда последовательных волн на корабль?“. Затем он продолжает: „Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо прежде всего определить, как каждая отдельная волна действует на корабль в каждый момент времени. Какое положение стремится корабль принять во всякий момент по отношению к волне, на которой он плавает, и чем измеряется та сила, которая заставляет корабль принимать это положение; или, точнее говоря, каково *положение мгновенного равновесия плавающего на волне тела* и каковы движущие силы, которые действуют на тело, когда оно отклонено от сказанного положения равновесия?“.

Рассматривая затем простейший случай этого общего вопроса, Фруд дал приближенное решение его. Этот случай есть случай чисто боковой качки при допущении, что размеры корабля очень малы по сравнению с размерами волны, профиль которой предполагается синусоидальным. Устанавливая это последнее предполо-

жение, Фруд, высказав, что профиль волны в действительности трохoidalный, прибавляет: „Я не был в состоянии преодолеть математические трудности, которые встречаются при таком предположении; но я не оставляю надежды на возможность успеха в такой попытке“.

Математические трудности, на которые он намекал, заключались в неимении такого решения уравнений гидродинамики, которое соответствовало бы волновому движению, и, следовательно, в неизвестности действительного динамического строения волны. Хотя теория Герстнера трохoidalных волн существовала уже с 1802 г., но она была так основательно забыта, что нужен был гений Ранкина, чтобы вторично открыть ее в 1863 г.

Впоследствии Фруд занимался другими работами, более важными, чем устанавливать подробности теории качки корабля, и вышеупомянутых попыток в этом направлении не делал. Почти в то же самое время Э. Бертен во Франции начал ряд своих исследований по этому вопросу, и, чтобы привлечь внимание к размерам корабля, он ввел несколько коэффициентов приведения, назначение которых „не в том, чтобы получить более точное уравнение боковой качки, но в том, чтобы вычислить такой волновой склон, который производил бы на корабль бесконечно малых размеров такое же действие, как и действительная волна на рассматриваемый корабль конечных размеров“.

В 1871 г. Сен-Венан, знаменитый по своим изысканиям в области теории упругости, разобрал тот же вопрос, развил способ Бертена: он принимал волну трохoidalною; но его метод хорош тогда, когда ширина корабля мала сравнительно с длиной волны, но этот метод потребовал бы весьма длинных численных вычислений, если бы его применить для случая качки при косвенном курсе.

Фруд в своей записке дал приближенный метод расчета действующего волнового склона в этом последнем случае; но здесь его предположения носят настолько произвольный характер, что невозможно судить о степени приближения. В самом деле, при составлении основных уравнений боковой качки было показано, что положение мгновенного равновесия корабля во всякий момент

есть то, при котором его мачты перпендикулярны поверхности волны; здесь это предположение не имеет места, потому что неизвестно, в какой точке волны брать нормаль, так как корабль может занимать целую длину волны или даже более, вместе с тем переносное движение корабля (поступательное движение центра тяжести) принимается как бы неизменившимся, килевая качка вовсе не рассматривается.

Исследование переносного движения и килевой качки корабля на море важно не только для суждения о мореходных его качествах, но главным образом для того, чтобы получать действительные положения, принимаемые кораблем на волнении, для расчета тех напряжений, которым корабль подвергается. Сэр Э. Рид в его труде вполне сознавал необходимость этого, и я надеюсь, что сэр Эдуард не откажет мне в позволении выписать следующие строки из его труда, где необходимость вышеупомянутого исследования выражена очень красноречивым и ясным образом и, таким образом, представляет наилучшее введение в мою работу, какое только я могу желать.

„В попытках приближенно определить срезающие и изгибающие усилия, действующие *на корабль на море*, мы встречаемся с большими трудностями; и вопрос этот при настоящем состоянии знаний не допускает полного и точного решения: в самом деле, можно даже выразить сомнение в том, что весьма разнообразные и постоянно изменяющиеся усилия, действующие на корабль на волнении, когда-либо будут полностью выражены математическим языком и рассчитаны с той же степенью точности, как уже изученные усилия, действующие на тихой воде. Есть, однако, возможность расчленить главнейшие причины напряжений и во многих случаях указать приближенно предельные их значения, как это сделано ниже.

„Что же касается динамической части вопроса, хотя она и самая важная, но в настоящее время ее решение выше наших сил, в особенности в том, что касается *количественной* оценки. Что это именно так, будет очевидно, если бросить самый беглый взгляд на те условия, в которых находится корабль на волнении. Если

пренебречь для простоты боковую качку и предположить, что корабль идет как раз в разрез волн, то прохождение каждой волны по его длине вызывает или стремится вызвать вертикальное поступательное перемещение корабля как твердого тела (исключая особые условия) и вращательное движение, или килевую качку, около его поперечной оси, производя вместе с тем и беспрестанные перемены в относительном распределении плавучести и веса.

„Характер вертикального движения корабля и килевой качки может быть указан в общих чертах; но выразить точно скорость этого движения и соответственные ускоряющие силы, а также исчислить напряжения, происходящие от беспрестанных ударов волн, я не имел смелости даже и попытаться. Даже если бы это и могло быть сделано, остается еще необходимость рассмотреть переносное или вертикальное движение корабля и постоянную изменяемость сил поддержания; то и другое вызывает значительные напряжения; вдобавок к этому надо еще считаться с действием последовательных волн (далеко не однообразных по размерам и периоду), а также и с влиянием собственного хода корабля. Таким образом, мы имеем перед собою весьма сложный вопрос, которого можно только коснуться приближенными методами, о которых я и буду говорить“.

Изложив хорошо известный метод, сэр Э. Рид прибавляет:

„Я привел все эти числовые данные только как указание на то, какую изменяемость можно ожидать в напряжениях корабля на волнении; по всей вероятности, они далеко ниже истинных, так как уже указано, что не принята в расчет килевая качка корабля, которая может вызывать в корабле еще более быстрые и резкие перемены в напряжениях.

„Довольно уже сказано, однако, чтобы показать важность этого предмета, и я только прибавлю, что весьма наглядное представление о тех действиях, которые я пытался описать, получается, если предположить, что корабль неподвижен, а по нему, если можно так выразиться, катится «волна напряжений». Такое представление поможет нам более ясно понять, каким образом изменяемость напряжений влияет на связи корпуса, ибо известно, что

небольшое напряжение (рассматриваемое статически), которое сравнительно слабо влияет на сооружение, пока оно действует в одном и том же направлении, достаточно, чтобы разрушить и более крепкое сооружение, если направление усилия постоянно и быстро изменяется“.

Из этих слов сэра Э. Рида видно, что первое, что нам необходимо для дальнейшего приближения в исчислении напряжений, это получить полное исследование движения корабля на волнении, и поэтому мой доклад и включает решение следующего вопроса: *определить общее движение корабля, идущего с данною скоростью по системе правильных волн, причем курс его составляет заданный угол с гребнями волн.*

Я хотел сделать из этого доклада не аналитическое упражнение, а естественное дополнение к фрудовской теории боковой качки и дать полные и точные ответы на все пожелания, содержащиеся в приведенной выписке из труда Э. Рида о напряжениях, а также изложить строгий математический метод решения вопросов, указанных вышеназванными авторитетами.

§ 1. Колебательное движение корабля на взволнованном море, когда его курс составляет угол α с направлением бега волн, состоит из общего переносного движения всего корабля и вращательного движения, которое, будучи разложено на три его составляющие, дает: 1) боковую качку, 2) килевую качку и 3) рыскание.

В „Прибавлении“ полностью выяснен способ исследования этих движений аналитически и показан способ их численного расчета для каждого данного корабля при всяком курсовом угле α для данной системы волн; здесь я представляю вкратце полученные результаты.

Переносное движение определено, когда известно движение центра тяжести корабля; поэтому достаточно знать путь, описываемый этою точкою и закон ее движения по этому пути.

Оказывается, что когда корабль не имеет хода, то его центр тяжести описывает эллипс простым гармоническим движением; этот эллипс расположен в вертикальной плоскости, которая пер-

пендикулярна к гребням волн, т. е. лежит в плоскости орбит частиц воды, иначе в плоскости бега волн.

На фиг. 1 эти пути представлены для разных значений курсового угла α . Когда курсовой угол $\alpha = 90^\circ$, то эллипс приближается почти к кругу, описываемому частицами воды; если же принять, что поперечные размеры корабля очень малы по сравнению с размерами волны, то этот эллипс совпадает с орбитами частицы воды, и мы приходим здесь к выводам Фруда, которые, таким образом, являются простым следствием нашей общей теории, а не независимыми гипотезами.

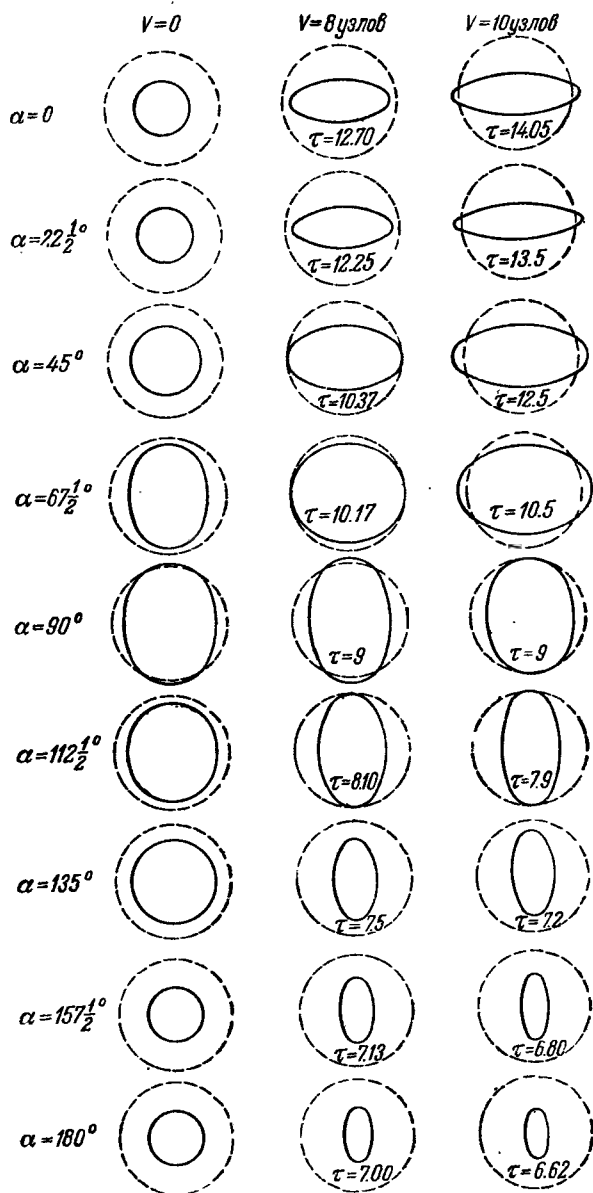
Если корабль имеет ход, то его центр тяжести описывает в пространстве спиралеобразную линию, шаг которой равен длине пути, проходимого кораблем в продолжение полного орбитального обращения его центра тяжести. Вместо того чтобы представлять эти спирали, я вычертил их основания, т. е. путь, описываемый центром тяжести на вертикальной плоскости, перпендикулярной гребням волн и двигающейся с тою же скоростью, с какою идет корабль. Фиг. 1 ясно показывает разницу в движении центра тяжести корабля при разных скоростях (0 узлов, 8 узлов и 10 узлов). Можно заметить, что в двух последних случаях период обращения равен кажущемуся периоду волны и изменяется в зависимости от курсового угла α и скорости хода корабля; относительный период показан на чертеже, а таблицы в § 15 дают те численные величины элементов, которые послужили для составления этой диаграммы.

Корабль, для которого сделаны все расчеты, был крейсер русского флота „Адмирал Корнилов“, *размерения* которого суть:

Длина 350 ф. = 107 м
 Ширина 48 ф. 6 дм. = 14.8 м
 Углубление 19 ф. = 5.9 м
 Водоизмещение . . 5000 т

и элементы волны:

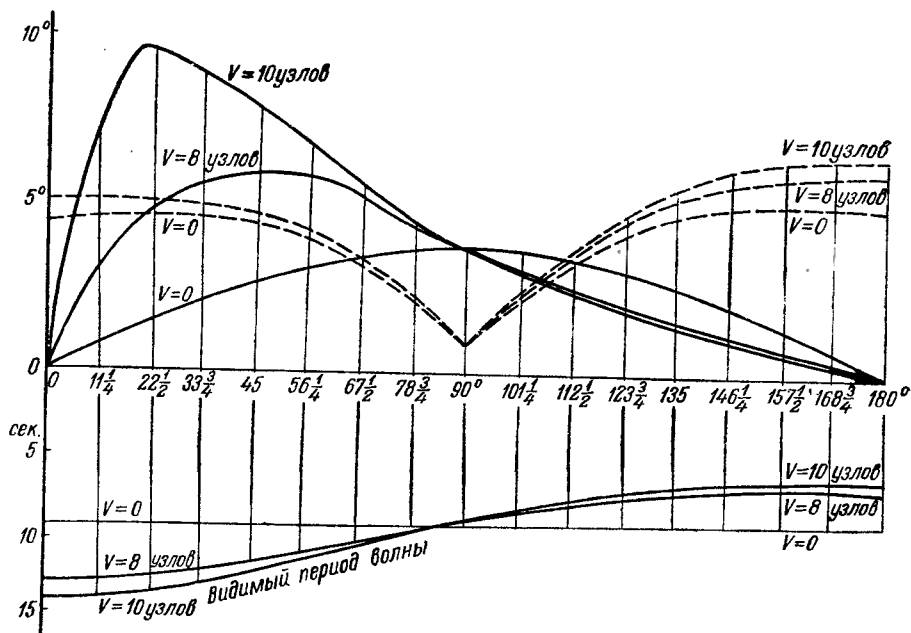
Длина 420 ф. = 125 м
 Высота 16 ф. 6 дм. = 5 м
 Период 9 сек.



Фиг. 1.

§ 2. Вращательное движение корабля рассматривается как состоящее из трех составляющих: килевой качки, рыскания и боковой качки.

Первые две составляющие, ввиду большого сопротивления воды, состоят только из „вынужденных“ колебаний, амплитуды которых,



Фиг. 2.

как было указано мною в моей первой записке (1896 г.), почти не зависят от величины сопротивления воды. Это обстоятельство весьма благоприятно, потому что благодаря ему мы в состоянии рассчитать с большою степенью приближения килевую качку, несмотря на весьма несовершенное знание сопротивления воды, а именно килевая качка и играет весьма важную роль в расчетах напряжений.

Так как диаграммы позволяют с первого взгляда усматривать главные особенности явления, то на фиг. 2 представлены значения

амплитуд размахов килевой и боковой качки для всяких курсовых углов и для трех различных скоростей хода корабля. Таблицы же в „Прибавлении“ дают численные величины, служившие для построения этой диаграммы.

Боковая качка требует более подробного рассмотрения; здесь сопротивление воды сравнительно мало и „свободные“ колебания не погашаются так быстро, как при килевой качке, и движение корабля зависит от особенностей той системы волн, которая производит качку.

Таким образом, если бы мы рассматривали вполне однообразную систему волн, скажем, периода 8 секунд, а период „свободных“ колебаний корабля, скажем, 12 секунд, и если мы примем вполне определенные начальные условия, например начальное наклонение и угловая скорость равны нулю в момент прохода подошвы первой волны, то мы можем представить движение корабля формулою (принимая сопротивление пропорциональным первой степени скорости), которая показывает, что движение корабля состоит из двух независимых колебаний: первое с постепенно убывающею амплитудою и периодом 12 секунд и второе с постоянною амплитудою и периодом 8 секунд.

На фиг. 3а и 3б первое представлено штрих-пунктирной линией, второе — прерывчатой линией, а результат обоих, т. е. самое движение корабля, — сплошной.

Из этой диаграммы видно, что сначала движение не однообразно до тех пор, пока существуют „свободные“ колебания, по мере же погашения их движение приближается к однообразию.

Однако хорошо известен тот факт, что качка на море никогда не бывает однообразна, и может показаться с первого взгляда, что здесь теория как бы расходится с практикой. Надо помнить, однако, что волны, действительно встречаемые на море, никогда не бывают однообразны, и Р. Э. Фруд в его труде „On Non Uniform Rolling“ (1896) говорит:

„Так как, с одной стороны, относительная величина сопротивления мала, а разность периодов волны и корабля значительна и изменения амплитуд быстры, то постоянно возобновляющееся воз-

мушение, происходящее от неоднобразия волнения, значительно способствует поддержанию неоднобразия боковой качки, вопреки сопротивлению воды, стремящемуся уничтожить его“.

Я попытался пояснить это положение на численном примере, и на фиг. 3а и 3б и в гл. IV книги „Качка корабля“ приведены полученные результаты, а в § 13 „Прибавления“ даны все математические подробности.

Я принял систему волн со следующими последовательными периодами

8.2, 7.7, 7.5, 8.5, 7.7, 8.5, 7.5, 7.7, 8.5, 7.5, 8.5, 8.5, 7.7 секунды.

Такая система покажется каждому наблюдателю на корабле совершенно однообразною, так как невозможно заметить с точностью до долей секунды периоды последовательных волн. Такая система будет отмечена как правильная, с периодом 8 секунд, средним из вышенаписанных; но действие такой системы будет совсем другое, чем системы вполне однообразных волн; „свободные“ колебания не будут уже погашаться, и качка будет оставаться весьма неправильной, как показывает диаграмма (фиг. 3б).

Таким образом, чтобы рассчитать боковую качку, необходимо в точности знать действующую систему волн, на которой корабль находится; практически это невозможно, так что в этом вопросе теория и практика не находятся в противоречии.

Так как система волн, которую я рассматриваю, есть правильная, или, говоря точнее, я рассматриваю только действие каждой отдельной волны вышеуказанного периода в 8 секунд, а это действие характеризуется „вынужденными“ колебаниями, от волны происходящими, то я представил на фиг. 2 амплитуды только этих вынужденных колебаний для тех же трех случаев, как и для килевой качки.

Но как только самая система волн будет задана, то из приведенного примера видно, каким образом можно рассчитать и соответствующие качания корабля.

§ 3. Я указываю в § 5 „Прибавления“, что теория покойного Фруда есть частный случай общей здесь излагаемой; стоит только

здесь положить в общих формулах $\alpha = 90^\circ$ и предположить, что размеры корабля весьма малы сравнительно с размерами волны, и полученные формулы совпадут с формулами Фруда.

Положив $\alpha = 90^\circ$, размеры же корабля предполагая конечными, мы получим аналитические выражения коэффициентов приведения Бертена, и эти выражения дают возможность вычислять эти коэффициенты весьма однообразным и простым путем.

§ 4. Когда корабль предположим бесконечно малым и идущим к волне лагом, то положение его мгновенного равновесия таково, что мачты перпендикулярны к поверхности воды, т. е. их направление совпадает с направлением нормали к поверхности волны.

„Каковы эти положения для действительно существующего корабля при различных курсовых углах относительно бега волны и различных положениях относительно ее гребня?“ — спрашивает в своей статье В. Фруд.

Тот же вопрос задает и Э. Рид и считает его настолько трудным, что он не может дать на него полного ответа, что вполне понятно, ибо для этого надо иметь полную систему уравнений движения корабля, идущего косвенным курсом к волне.

Эти положения характеризуются расстоянием гребня от центра тяжести корабля, возвышением ζ_0 центра тяжести над средним его положением, или что то же, над положением его при равновесии корабля на тихой воде, боковым наклоном (крен) θ_1 и углом дифферента ψ . Они нанесены на диаграммы для значения $\alpha = 45^\circ$, причем нанесена и нормаль к волновому профилю, проведенная через центр тяжести корабля.

В § 14 „Прибавления“ приведена сводка общих уравнений движения корабля и пояснено, каким образом получить требуемые мгновенные положения равновесия корабля, здесь же дадим чертеж (фиг. 4 и 5), на котором они наглядно представлены.

Вообразим, что наблюдатель звездною ночью стоит на палубе у пяртнерса мачты и по звездам следит за видимым движением клотика по небесному своду. Если бы это движение регистриро-

вать, например, фотографически и затем нанести на глобус, то мы получили бы на поверхности глобуса кривую, представляющую основание конической поверхности, описываемой мачтой корабля в пространстве.

При малых размахах сказанную кривую можно заменить кривою плоской, лежащей в касательной к глобусу плоскости, проведенной через точку, соответствующую прямому положению корабля.

После этого объяснения фиг. 4 и 5 становятся сами собою понятными.

На фиг. 4 представлено схематически в перспективе указанное движение.

Плоскость $V_1V_2V_3V_4$ предполагается вертикальной, плоскость $H_1H_2H_3H_4$ горизонтальной, на ней точка O соответствует прямому положению корабля, прямая BB — направление бега волны и вместе с тем пересечение вышеуказанных плоскостей. Нормаль к волне ON движется в плоскости чертежа $V_1V_2V_3V_4$, и точка ее пересечения с плоскостью $H_1H_2H_3H_4$ лежит на прямой BB , причем длина ON пропорциональна тангенсу угла наклона нормали к отвесной линии.

Прямая GF есть одно из мгновенных положений мачты корабля, OF — тангенс соответствующего косоугольного наклона корабля. По малости можно вместо тангенсов брать самые углы, а тогда, разложив вектор OF по осям координат, получим, что OL представляет угол дифферента, OK — угол крена, и, наконец, длина NF — угол наклона мачты по отношению к нормали к волне.

Ясно, если вычертить геометрическое место точек F , а на прямой BB отметить соответствующие положения точки N , то мы получим наглядное представление движения корабля.

На фиг. 5 такая кривая вычерчена на основании расчета, причем период τ волны подразделен на 32 и точки соответственно пронумерованы, так, например, точка 14 на кривой соответствует моменту $t = \frac{14}{32}\tau$. Точка 14 на прямой BB отвечает положению конца N нормали в тот же момент.

Определив координаты $OK = +3.7$ и $OL = -1.3$, видим, что угол крена составляет 3.7° на левый борт, угол дифферента 1.3° носом вниз.

Нетрудно в виде задачи, пользуясь данными, приведенными в § 15 „Прибавления“, рассчитать и построить кривые, подобные фиг. 5, для курсового угла $\alpha = 67\frac{1}{2}^\circ$.

§ 5. Есть еще один весьма важный вопрос, находящийся в связи с нашими изысканиями; *это остойчивость корабля на волне*. Но я ограничиваюсь только упоминанием об этом вопросе, потому что полное исследование его потребовало бы еще больше места, нежели эта записка с „Прибавлением“ к ней; здесь потребовалось бы не статическое рассмотрение, а динамическое, т. е. исследование устойчивости движения, которое по своей сложности едва ли может быть доведено до конца, даже для случая вполне правильной зыби, который в практике мореплавания весьма редко встречается.

§ 6. Из этого краткого перечня полученных результатов читатель может заключить, что движение корабля на волнении вполне поддается математическому расчету, и, таким образом, все элементы, необходимые для расчета напряжений и про которые говорит Э. Рид в вышеприведенных выписках, могут быть вычислены.

Рассматривая § 8 „Прибавления“, можно заметить, что эти расчеты не представляют непреодолимой сложности. Также видно, что примененные в „Прибавлении“ методы позволяют рассчитать, какое влияние на мореходные качества производят изменения в распределении грузов, перемены дифферента, изменения обводов и т. д.

Численный пример может быть будет сочтен излишним; но, трактуя подобные вопросы, я всегда помнил следующие слова Фурье:

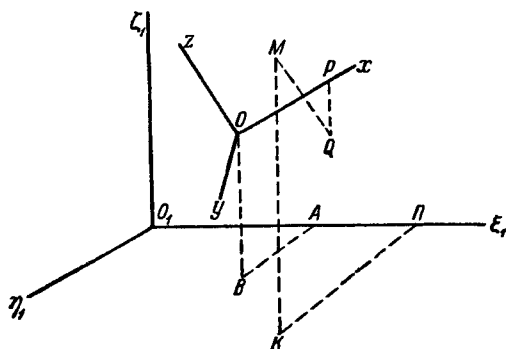
„Пока не достигнуто численное вычисление неизвестных, до тех пор решение остается неполным или бесполезным, ибо истина, которую мы хотим открыть, остается столь же сокрытою в глубине аналитических выражений, как и в самом физическом вопросе“.

и я полагал, что наилучший способ показать, что формулы и уравнения пригодны для таких численных расчетов, это произвести их полностью; таким образом, я старался в „Прибавлении“, которое и есть главная часть этой записки, быть скорее пространным и понятным, чем кратким и темным.

ПРИБАВЛЕНИЕ

§ 1. Говорят, что движение твердого тела известно, когда для всякого данного момента времени t известно положение всякой точки твердого тела.

Обыкновенно это достигается следующим образом (фиг. 6). Три взаимно перпендикулярные оси $O_1\xi_1$, $O_1\eta_1$, $O_1\zeta_1$ взяты неподвижно в пространстве; через произвольную точку O в теле проведены другие три взаимно перпендикулярные оси Ox , Oy , Oz , неподвижные в теле и, следовательно, подвижные в пространстве, тогда всякая



Фиг. 6.

точка M тела определяется относительными координатами $x = OP$, $y = PQ$ и $z = QM$, которые, следовательно, не зависят от времени t и при движении тела сохраняют свои значения для данной точки и изменяются при переходе от одной точки тела к другой. Положение той же точки M в пространстве определяется абсолютными ее координатами $\xi_1 = O_1\Pi$, $\eta_1 = \Pi K$ и $\zeta_1 = KM$, таким образом, исследование движения тела приводится к выражению абсолютных координат ξ_1 , η_1 , ζ_1 в функции времени t и переменных x , y , z . Проводя через точку O три оси, параллельные осям

$O_1\xi_1$, $O_1\eta_1$, $O_1\xi_1$, и обозначая через a , b , c , a_1 , b_1 , c_1 , ... косинусы углов между проведенными осями и осями Ox , Oy , Oz , как это показано в следующей табличке:

	ξ	η	ζ
x	a	a_1	a_2
y	b	b_1	b_2
z	c	c_1	c_2

и через ξ_0 , η_0 , ζ_0 абсолютные координаты точки O , так что

$$\xi_0 = O_1A; \eta_0 = AB; \zeta_0 = BO$$

получим следующие соотношения между абсолютными и относительными координатами точки M :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_0 + ax + by + cz \\ \eta_1 &= \eta_0 + a_1x + b_1y + c_1z \\ \zeta_1 &= \zeta_0 + a_2x + b_2y + c_2z\end{aligned}\tag{1}$$

Таким образом, для определения ξ_1 , η_1 , ζ_1 требуется только знать ξ_0 , η_0 , ζ_0 и девять косинусов a , b , c , a_1 , b_1 , ... c_2 , ... и исследование движения тела свелось к исследованию абсолютного движения точки O и вращения тела около точки O , причем оси Ox , Oy , Oz изменяют свои направления относительно осей $O_1\xi$, $O_1\eta$ и $O_1\zeta$, сохраняющих свои направления в пространстве.

Девять косинусов не являются независимыми друг от друга; их связывают шесть хорошо известных уравнений; но, как указал Эйлер, проще выразить эти девять косинусов в функции трех независимых углов ψ , φ и θ , называемых Эйлеровыми углами. Эти углы, как то можно найти во всяком сочинении по теоретической механике или аналитической геометрии, определяются обыкновенно

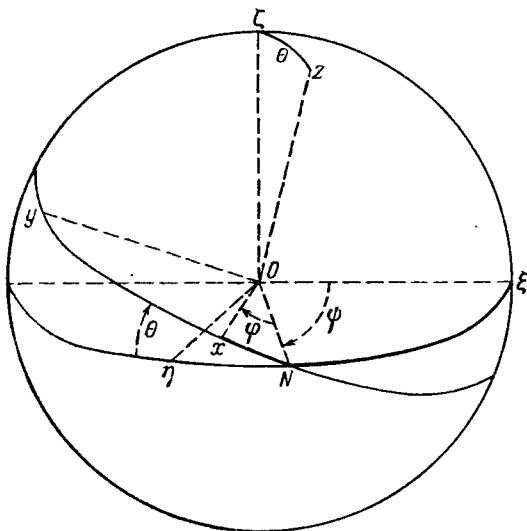
так: сфера произвольного радиуса описана около точки O и на ней отмечены точки пересечения осей с ее поверхностью; координатные плоскости дают в пересечении со сферой большие круги (фиг. 7).

Пусть ON есть половина линии пересечения плоскостей xOy и $\xi O\eta$; положение этой линии определяется углом $\psi = \angle ON\xi$, считаемым от $O\xi$ в направлении $O\eta$ от нуля до 360° ; положение оси Ox в плоскости xOy определяется углом $\varphi = \angle NOx$, считаемым от ON по часовой стрелке так, чтобы угол NOy был равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, и, наконец, наклонение плоскости xOy к плоскости $\xi O\zeta$ определяется углом, считаемым в сторону положительного вращения около оси ON . Приняв такие определения Эйлеровых углов и направление их счета, угловые скорости φ' , ψ' , θ' следует откладывать по положительным частям осей Oz и $O\xi$ и по линии ON . Необходимо точно указать стороны, куда углы считаются положительными, во избежание ошибок в знаках.

Эти три угла ψ , φ , θ определяют вполне и одним только образом положение подвижных осей относительно неподвижных.

Применяя основную формулу сферической тригонометрии, получим:

$$\begin{aligned} a &= \cos(x\xi) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \\ a_1 &= \cos(x\eta) = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$



Фиг. 7.

$$\begin{aligned}
a_2 &= \cos(x\xi) = \sin \varphi \sin \theta \\
b &= \cos(y\xi) = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\
b_1 &= \cos(y\eta) = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \quad (2) \\
b_2 &= \cos(y\xi) = \cos \varphi \sin \theta \\
c &= \cos(z\xi) = \sin \psi \sin \theta \\
c_1 &= \cos(z\eta) = -\cos \psi \sin \theta \\
c_2 &= \cos(z\xi) = \cos \theta
\end{aligned}$$

Эти уравнения называются Эйлеровыми геометрическими уравнениями.

Если назвать через p , q , r проекции угловой скорости тела на оси Ox , Oy , Oz , то следующие уравнения выразят зависимость p , q , r от Эйлеровых углов ψ , φ , θ и их производных:

$$\begin{aligned}
p &= \psi' \sin \varphi \sin \theta + \theta' \cos \varphi \\
q &= \psi' \cos \varphi \sin \theta - \theta' \sin \varphi \quad (3) \\
r &= \varphi' + \psi' \cos \theta
\end{aligned}$$

Эти формулы можно найти в любом курсе теоретической механики. Они взяты применительно к потребностям астрономии, в которой каждый из углов имеет определенный физический смысл: за плоскость $\xi O\eta$ принимают плоскость эклиптики, за $\dot{x}Oy$ — плоскость экватора, линия их пересечения называется линией узлов, углу φ соответствует суточное вращение Земли, углу ψ соответствует прецессия, т. е. движение линии узлов в плоскости как эклиптики, так и экватора, наконец, угол θ представляет наклонность эклиптики к экватору.

Условимся называть такой выбор Эйлеровых углов „астрономическим“.

Формулы (1), (2), (3) выражают только геометрическую и кинематическую зависимость, и выбор точки O совершенно безразличен. Если же мы перейдем к динамике, то, чтобы получить уравнения движения тела в простейшей форме, надо принять за точку O центр тяжести тела, ибо тогда тотчас напишутся уравнения движения этой точки, предполагая силы, действующие на тело, из-

вестными. А именно, эти уравнения (движения центра тяжести) суть

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= \Sigma E \\ M \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= \Sigma H \\ M \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} &= \Sigma Z \end{aligned} \quad (4)$$

где M есть масса тела, а ΣE , ΣH , ΣZ суть суммы проекций сил, действующих на тело на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Следует заметить, что в этих уравнениях неизвестные величины ψ , φ , θ и их производные могут войти только в правые части, когда действующие на тело силы зависят от положения его или от скоростей, если оно движется в сопротивляющей среде.

Затем необходимо составить уравнение вращательного движения тела около его центра тяжести. Эти уравнения получают весьма простую форму, если выбрать оси Ox , Oy , Oz , неподвижные в теле, подобающим образом; Эйлер показал, что простейший вид эти уравнения примут, если взять главные оси инерции твердого тела за оси относительных координат, тогда уравнения вращательного движения тела будут

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= \Sigma(yZ - zY) \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= \Sigma(zX - xZ) \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= \Sigma(xY - yX) \end{aligned} \quad (5)$$

где A , B , C суть главные моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy , Oz ; p , q , r — проекции угловой скорости на те же оси, а правые части уравнений суть суммы моментов всех сил, действующих на тело относительно указанных осей.

Системы уравнений (4), (5) и система (3), которую надо присоединить к первым двум вместе с начальными условиями, вполне

определяют движение тела; но, к несчастью, их интегрирование в общем виде — выше средств математического анализа.

§ 2. Возвращаясь к случаю корабля, постараемся вывести несколько полезных для нас следствий из изложенных выше общих положений механики.

Во-первых, видно, что за оси координат, неподвижные в корабле, надо принять его главные оси инерции, и за начало координат — его центр тяжести.

Одну из этих осей мы можем тотчас же указать, именно — перпендикуляр к диаметральной плоскости корабля, потому что эта плоскость есть не только плоскость симметрии формы, но и нагрузки. Другие две оси лежат, следовательно, в диаметральной плоскости. На современных больших судах центр тяжести лежит весьма близко к миделевому сечению, обводы корабля почти симметричны относительно этого сечения, и грузы расположены так, что они приблизительно уравниваются, а главные грузы почти симметричны.

Если бы была полная симметрия в расположении грузов относительно миделя, то пересечение миделя с диаметральной плоскостью давало бы главную ось инерции; третья же ось перпендикулярна первым двум; и значит положение у всех трех осей было бы известно.

Таким образом, если принять корабль за тело, имеющее две плоскости симметрии, то мы не сделаем большой погрешности и вместе с тем освободимся от утомительной работы вычисления точного положения главных осей инерции корабля.

Во-вторых, дано выбрать Эйлеровы углы наиболее подходящим образом для нашей специальной цели, чтобы одновременно достигнуть и простоты уравнений и ясного физического значения этих углов.

Известно, что очень выгодно иметь в уравнениях, как обыкновенных, так и в дифференциальных, такие искомые, для которых мы могли бы наперед назначить пределы их изменений; это приобретает особенную важность, когда эти пределы могут быть назначены весьма тесными.

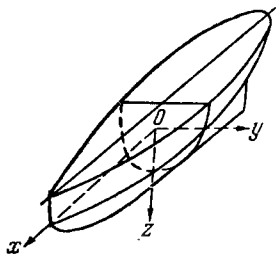
Для больших судов килевая качка редко превосходит $7-8^\circ$; рыскание вообще менее 5° , и боковая качка не более 20° на сторону; таким образом, продольная ось корабля колеблется около среднего своего положения не больше, как на 10° , две прочие оси колеблются около средних положений до 20° , или немного более, для сильной качки.

Целесообразно принять за неподвижные в пространстве оси $O_1\xi_1$, $O_1\eta_1$, $O_1\zeta_1$, среднее положение осей, неподвижных в корабле. Чтобы должным образом выбрать Эйлеровы углы, мы будем руководиться следующим: если мы возьмем за основные плоскости такие две, которые при прямом положении корабля друг с другом совпадают, то угол θ при наклонениях корабля будет меняться в тесных пределах; но зато углы ψ и φ будут изменяться в значительных пределах. Этого не будет, если возьмем за основные плоскости две плоскости, которые взаимно перпендикулярны при прямом положении корабля, тогда при всяком положении корабля, близком к прямому, эти плоскости образуют углы, мало отличающиеся от 90° , и все три Эйлеровы угла будут изменяться в тесных пределах.

Итак, за одну из основных плоскостей мы возьмем прямое положение диаметральной плоскости $O_1\xi_1\zeta_1$, а за другую — плоскость миделя корабля.

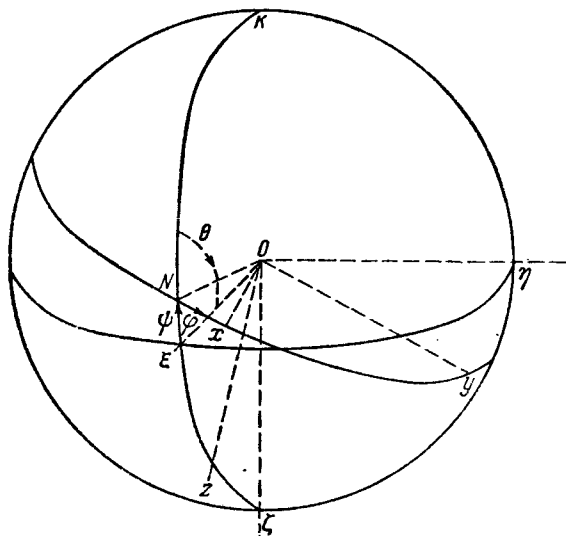
Эти две плоскости, несмотря на качку, всегда пересекаются почти под углом 90° , так что θ близок к 90° и прочие два угла не превышают 10° .

Неподвижные в корабле оси назовем так: диаметральную плоскость принимаем за плоскость xOz , миделевое сечение — за плоскость yOz ; ось Oy направлена к левому борту, ось Oz — вниз (фиг. 8); тогда Эйлеровы углы будут: $\psi = \angle ON$ есть угол, заключенный между осью $O\xi$ и линией ON пересечения плоскостей $\xi O\zeta$ и xOy (фиг. 9), он считается положительным от $O\xi$ в сторону положительного вращения около $O\eta$, как указано стрелкой.



Фиг. 8.

Угол $\varphi = NOx$ содержится в плоскости xOy между линией ON и осью Ox и считается положительным от ON в сторону положительного вращения, так что угол $NOy = 90 + \varphi$ (алгебраически). Угол θ есть сферический угол KNx , или угол наклонения пло-



Фиг. 9.

скости $\xi O\zeta$ к xOy ; этот угол считается в сторону положительного вращения около ON (фиг. 9).

Такой выбор Эйлеровых углов будем называть „корабельным“.

Заметив все это, тотчас напомним следующие формулы для косинусов:

$$\begin{aligned} a &= \cos(x\xi) = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta \\ a_1 &= \cos(x\eta) = \sin\varphi \sin\theta \\ a_2 &= \cos(x\zeta) = -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\theta \\ b &= \cos(y\xi) = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \\ b_1 &= \cos(y\eta) = \cos\varphi \sin\theta \end{aligned} \quad (6).$$

$$b_2 = \cos(y\xi) = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta$$

$$c = \cos(z\xi) = \sin \psi \sin \theta$$

$$c_1 = \cos(z\eta) = \cos \theta$$

$$c_2 = \cos(z\xi) = \cos \psi \sin \theta$$

и для угловых скоростей:

$$p = \theta' \cos \varphi + \psi' \cos(x\eta) = \psi' \sin \varphi \sin \theta + \theta' \cos \varphi$$

$$q = \theta' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \psi' \cos(y\eta) = \psi' \cos \varphi \sin \theta - \theta' \sin \varphi \quad (7)$$

$$r = \varphi' + \psi' \cos(z\eta) = \varphi' + \psi' \cos \theta$$

Формулы (6) могут быть получены двояким путем: или применяя основную формулу сферической тригонометрии к треугольникам

$$Nx\xi, Nx\eta, Nx\xi, N\xi y, N\eta y, N\xi y, N\xi z, N\eta z, N\xi z,$$

замечая, что дуга $\eta z = \theta$ и угол $\xi z = \psi$; или посредством преобразования координат помощью трех последовательных вращений: 1) около оси $O\eta$ на угол ψ , когда ось ξ совпадает с ON ; 2) около линии ON на угол $\theta - \frac{\pi}{2}$, после чего плоскость $\xi O\eta$ совпадает с плоскостью xOy и ось ξ с осью z , и 3) около оси Oz на угол φ , которое окончательно приводит систему осей $O\xi\eta\zeta$ в совпадение с системой осей $Oxyz$. Выводя формулы (6) этим последним совершенно общим способом, увидим, что эти формулы имеют место для всяких значений углов ψ , φ и θ как положительных, так и отрицательных.

Такой выбор Эйлеровых углов дает возможность применять способ последовательных приближений и разложения в ряды. Легко видеть, что угол ψ почти измеряет килевую качку и не превышает 10° ; φ есть угол рыскания, который еще меньше угла ψ , и $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$ есть угол боковой качки.

Тогда, с относительно погрешностью, не превышающей $1\frac{1}{2}\%$, мы можем положить $\sin \psi = \psi$; $\cos \psi = 1$; $\sin \varphi = \varphi$; $\cos \varphi = 1$; и

если угол боковой качки не превышает 20° , то можно брать $\sin \theta_1 = \theta_1$. Так, $\arcsin 20^\circ = 0.349$ и $\sin 20^\circ = 0.342$, и $\cos 20^\circ = 0.940$; для 30° имеем: $\arcsin 30^\circ = 0.524$, $\sin 30^\circ = 0.500$, $\cos 30^\circ = 0.866$; а потому, если угол боковой качки не превышает 20° , то имеем право положить $\sin \theta_1 = \theta_1$ и $\cos \theta_1 = 1$, но когда он больше, то до 30° можно брать $\sin \theta_1 = \theta_1$ и $\cos \theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$ и, теоретически говоря, здесь надо брать это второе приближение.

Разлагая в ряд, мы можем рассматривать ψ , φ и θ и их производные ψ' , φ' и θ' как первого порядка; и в первом приближении мы ограничимся лишь членами первого порядка, отбрасывая все члены, порядок коих выше первого, во втором приближении надо удержать члены второго порядка, отбрасывая все те, порядок коих выше второго.

Таким образом, для формул (6) получим следующую табличку косинусов (с точностью до величин второго порядка):

	ξ	η	ζ
x	$1 - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\psi^2}{2}$	φ	$-\psi + \varphi\theta_1$
y	$-\varphi + \psi\theta_1$	$1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2}$	$\theta_1 + \varphi\psi$
z	ψ	$-\theta_1$	$1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\psi^2}{2}$

и для угловых скоростей:

$$\begin{aligned}
 p &= \theta'_1 + \varphi\psi' \\
 q &= \psi' - \varphi\theta'_1 \\
 r &= \varphi' - \theta_1\psi'
 \end{aligned} \tag{8}$$

В первом приближении, соответствующем фрудовской теории боковой качки с поправками Бертена, табличка будет:

	ξ	η	ζ
x	1	φ	$-\psi$
y	$-\varphi$	1	θ_1
z	ψ	$-\theta_1$	1

(9')

и

$$p = \theta'_1$$

$$q = \psi$$

$$r = \varphi'$$

(9)

и шесть приближенных дифференциальных уравнений движения корабля будут

$$M \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \Sigma E$$

$$M \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = \Sigma H$$

(10)

$$M \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} = \Sigma Z$$

$$A \theta''_1 = \Sigma (yZ - zY)$$

$$B \psi''_1 = \Sigma (zX - xZ)$$

(10')

$$C \varphi''_1 = \Sigma (xY - yX)$$

В этих уравнениях сохранены обозначения уравнений (4) и (5).

Уравнениями (10) определяется орбитальное движение центра тяжести корабля, уравнениями (10') — вращательное движение корабля около центра тяжести.

Здесь мы ограничимся развитием первого приближения, которое вполне достаточно для практических целей.

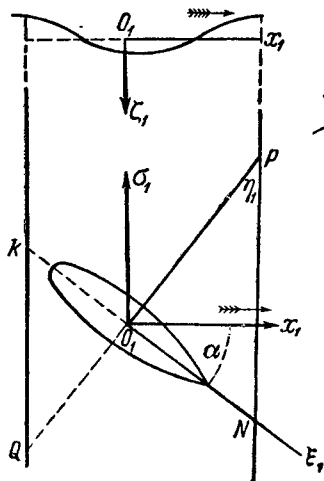
§ 3. Положим, что мы имеем корабль, и пусть направление его курса составляет угол α с направлением бега волн. Возьмем указанные выше координатные оси. Положение корабля в пространстве относительно неподвижных осей $O_1\xi_1$, $O_1\eta_1$, $O_1\zeta_1$ определяется абсолютными координатами ξ_0 , η_0 , ζ_0 его центра тяжести и тремя Эйлеровыми углами ψ , φ и θ , которые близко представляют в то же время углы качки: килевой, боковой и рыскания на курсе. Желая применять уравнения (10), необходимо выразить правые части их как функции ξ_0 , η_0 , ζ_0 , ψ , θ , φ и их производных, а также времени t . Силы, действующие на корабль, суть: 1) вес, 2) гидродинамическое давление, 3) сопротивление воды колебательным движениям корабля. Рассчитать силу поддержания и моменты силы поддержания, происходящие от гидродинамического давления, мы можем двумя способами: один, вполне общий, который изложен в моей работе о килевой качке, и второй, более элементарный, который представляет собою обобщение приема Фруда. Мы воспользуемся вторым методом, хотя и более длинным для вывода формул, но дающим более ясное представление о физическом значении первого приближения в решении поставленной задачи.

Единственное предположение, которое необходимо сделать в нашей теории, есть то же самое, которое было допущено в теории килевой качки, а именно: *давление в каждой точке погруженной поверхности корабля есть то самое, которое имеет место в соответствующей точке трохoidalной волны.*

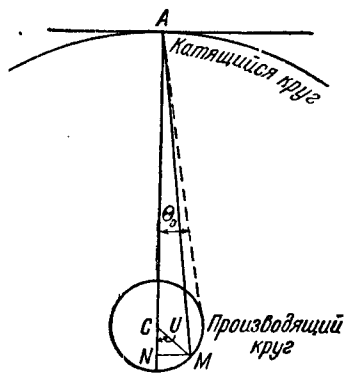
Если разложить в ряд точное выражение полной силы поддержания волны и ее момента относительно центра тяжести корабля, то в первом приближении соответственно вышеупомянутому допущению получится: 1) сила поддержания, происходящая от какого-либо элемента погруженного объема, направлена по нормали к мгновенной поверхности уровня, проходящей через соответствующую точку, и относится так к весу вытесненного объема воды, как длина вышеупомянутой нормали относится к радиусу катящегося круга той трохойды, которая образует профиль волны; 2) трохoidalный профиль может быть заменен соответствующим синусоидальным; 3) действительная система поверх-

ностей уровня может быть заменена системой цилиндрических поверхностей, параллельных тем, которые образуют свободную поверхность воды при волнении.

Эти результаты вполне соответствуют предположениям, сделанным Фрудом при установлении теории боковой качки; но мы не предполагаем, что размеры корабля бесконечно малы сравнительно



Фиг. 10.



Фиг. 11.

с размахами волны, поэтому наше первое приближение соответствует не только теории Фруда, но включает в себе главные поправки Бертена, особенно, если принять для профиля нашей поверхности уровня не синусоиду, соответствующую трохое свободной поверхности воды, а синусоиду, соответствующую трохое, проходящей через центр величины корабля.

Фиг. 10 представляет проекции на плоскости $\xi_1 O_1 \eta_1$ гребней двух последовательных волн и также сечение их плоскостью $\zeta_1 O_1 x$. Составим уравнение волновой поверхности в момент t в абсолютных координатах ξ_1, η_1, ζ_1 , для этого проведем в плоскости $\xi_1 O_1 \eta_1$, которая соответствует уровню тихой воды, две вспомогательные

оси O_1x_1 и $O_1\sigma_1$, последнюю параллельно гребням волн, а первую — в направлении бега волн; тогда уравнение синусоидального профиля будет для всякого момента t :

$$\zeta_1 = r \cos 2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (11)$$

где λ есть длина волны, r — радиус производящего круга или половина высоты волны и τ — период волны.

Если корабль не имеет собственного хода, то τ есть истинный период; в противном случае — кажущийся.

Время t считается от момента прохода подошвы волны через плоскость $\zeta_1 O_1 \sigma_1$. Но мы имеем:

$$x_1 = \xi_1 \cos \alpha + \eta_1 \sin \alpha$$

и, таким образом, будет

$$\zeta_1 = r \cos 2\pi \left(\frac{\xi_1 \cos \alpha}{\lambda} + \frac{\eta_1 \sin \alpha}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (12)$$

Полагая

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \alpha} \text{ и } \lambda_2 = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (13)$$

получаем уравнение волновой поверхности в следующем виде:

$$\zeta_1 = r \cos 2\pi \left(\frac{\xi_1}{\lambda_1} + \frac{\eta_1}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (14)$$

Заметим, что λ_1 и λ_2 суть длины KN и PQ (фиг. 10), представляющие собою действующие длины волны по направлению диаметральной плоскости корабля и по траверзу.

В силу уравнения (14) имеем следующие выражения косинусов углов, образуемых нормалью к поверхности волны с осями координат:

$$\cos(n\xi_1) = - \frac{\frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2} \sin^2 U}}$$

$$\cos(n\eta_1) = - \frac{\frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda_2^2} \sin^2 U}} \quad (15)$$

$$\cos(n\xi_1) = - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda_2^2} \sin^2 U}}$$

знак минус (—) соответствует направлению нормали вверх, а U обозначает аргумент:

$$U = 2\pi \left(\frac{\xi_1}{\lambda_1} + \frac{\eta_1}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right)$$

Наибольшая крутизна длинных волн, т. е. количество $\frac{2\pi r}{\lambda}$, есть почти $\frac{1}{7}$; таким образом, с тою же степенью приближения, как наши последние формулы, мы можем считать это количество малым и пренебрегать его степенями выше первой; тогда получим в нашем первом приближении просто:

$$\cos(n\xi_1) = - \frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U; \quad \cos(n\eta_1) = - \frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U; \quad \cos(n\xi_1) = -1 \quad (16)$$

Наклонение CAM нормали (фиг. 11) составляет не более 9° ; заменим отношение $\frac{AM}{AC}$ (нормали к радиусу катящегося круга) отношением $\frac{AN}{AC}$. Тогда угол NCM есть фаза U и $AC = R = \frac{\lambda}{2\pi}$ и $CM = r$, и мы получим:

$$AN = R + r \cos U = R \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U \right)$$

и

$$\frac{AN}{R} = 1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U \quad (17)$$

На основании сделанного предположения о силе поддержания на волне выведем следующие выражения составляющих $Epgdv$, $Hpgdv$ и $Zpgdv$ для сил, действующих на элемент dv погруженного

объема в точке, которой координаты суть ξ_1 и η_1 ; значение третьей координаты безразлично:

$$\Xi = \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right) \cos(n\xi_1) = -\frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U \quad \bullet$$

$$\text{H} = \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right) \cos(n\eta_1) = -\frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U \quad (18)$$

$$\text{Z} = \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right) \cos(n\zeta_1) = -\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right)$$

где ρ обозначает плотность воды и g — ускорение силы тяжести.

Составляющие по осям ξ_1 , η_1 , ζ_1 окончательной силы поддержания, которые обозначены P_ξ , P_η , P_ζ :

$$P_\xi = \rho g \int_V \Xi dv; \quad P_\eta = \rho g \int_V \text{H} dv; \quad P_\zeta = \rho g \int_V \text{Z} dv$$

причем интегрирование должно быть произведено по всему погруженному в момент t объему V корабля.

Подставляя вместо Ξ , H , Z их значения (18), будем иметь:

$$\begin{aligned} -P_\xi &= \frac{2\pi r}{\lambda_1} g \rho \int_V \sin U dv \\ -P_\eta &= \frac{2\pi r}{\lambda_2} g \rho \int_V \sin U dv \\ -P_\zeta &= g \rho V + \frac{2\pi r}{\lambda} g \rho \int_V \cos U dv \end{aligned} \quad (19)$$

и все тогда приведет к вычислению погруженного объема и двух интегралов:

$$\int_V \sin U dv \quad \text{и} \quad \int_V \cos U dv$$

Чтобы воспользоваться теоретическим чертежом корабля, необходимо ввести вместо абсолютных координат ξ_1 , η_1 и ζ_1 относительные x , y , z ; тогда из формул (1) и таблицы (9') получим:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_0 + x - y\varphi + z\psi \\ \eta_1 &= \eta_0 + x\varphi + y - z\theta_1 \\ \zeta_1 &= \zeta_0 - x\psi + y\theta_1 + z\end{aligned}\quad (20)$$

и, таким образом, аргумент U будет

$$\begin{aligned}U &= 2\pi \left[\frac{\xi_0 + x - y\varphi + z\psi}{\lambda_1} + \frac{\eta_0 + x\varphi + y - z\theta_1}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right] = \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{\xi_0}{\lambda_1} + \frac{\eta_0}{\lambda_2} \right) + \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) + \left(\frac{x}{\lambda_2} - \frac{y}{\lambda_1} \right) \varphi + \left(\frac{z}{\lambda_1} \psi - \frac{z}{\lambda_2} \theta_1 \right) \right]\end{aligned}$$

количества $\frac{\xi_0}{\lambda_1}$ и $\frac{\eta_0}{\lambda_2}$ не больше $\frac{r}{\lambda_1}$ и $\frac{r}{\lambda_2}$, а потому и их мы будем рассматривать как малые, как и все прочие неизвестные количества в наших уравнениях; интегралы, содержащие $\sin U$ и $\cos U$, множатся на малое количество $\frac{2\pi r}{\lambda}$ и, таким образом, в выражении P_ξ , P_η , P_ζ члены первого порядка в аргументе дают в окончательных выражениях этих величин члены второго порядка, а поэтому их в первом приближении следует отбросить и просто писать

$$U = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right)$$

Затем:

$$\begin{aligned}\sin U &= \left(\sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} + \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \\ &\quad - \left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} - \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau} \\ \cos U &= \left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} - \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \\ &\quad + \left(\sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} + \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau}\end{aligned}$$

которые, будучи подставлены в (19), приводят вычисление выше-указанных интегралов к следующим:

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_V \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv \\ T_2 &= \int_V \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv \\ T_3 &= \int_V \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv \\ T_4 &= \int_V \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv \end{aligned} \quad (21)$$

Все эти интегралы относятся к погруженному объему V . Этот объем можно подразделить на две части: объем V_0 , заключенный между килем и естественной грузовой (накрашенной) ватерлинией AB , и переменный погруженный объем v_i , заключенный между покрашенной ватерлинией и мгновенным положением поверхности волны. Тогда каждый интеграл (21) разделится на две части соответственно объемам V_0 и v_i и будет

$$\int_V = \int_{V_0} + \int_{v_i}$$

Часть, отвечающая объему V_0 , может быть немедленно вычислена, и мы напишем

$$\begin{aligned} A'_0 &= \int_{V_0} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv = \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \int_{-y}^{+y} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dy = \\ &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B'_0 &= \int_{V_0} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv = \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \int_{-y}^{+y} \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} dy = \\ &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} dx \end{aligned} \quad (23)$$

где L есть полудлина корабля, h — его углубление, y есть ордината той точки его поверхности, которой другие две координаты суть x и z ; и значит y снимается непосредственно с теоретического чертежа.

Интегралы

$$\int_{V_0} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv$$

и

$$\int_{V_0} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} dv$$

тождественно равны нулю.

Нетрудно видеть, что интегралы, относящиеся к v_t , вида

$$\int_{v_t} \cos U dv \quad \text{и} \quad \int_{v_t} \sin U dv$$

не заключают членов первого порядка, а только второго и выше, так как объем v_t приближается к нулю, когда переменные ξ_0 , η_0 , ζ_0 , φ , ψ , θ и параметр $\frac{2\pi r}{\lambda}$ неопределенно уменьшаются; так что эти интегралы по отношению к этим количествам, по крайней мере первого порядка, и будучи умножены еще на величину первого порядка $\frac{2\pi r}{\lambda}$, будут второго порядка и в первом приближении отбрасываются.

Таким образом, остается только рассчитать самый объем v_t , входящий в выражение P_ξ . Этот объем относится к частям корабля близ его ватерлинии, а потому мы примем, что обводы корабля в этом месте прямостенные и перпендикулярные к накрашенной ватерлинии.

Это предположение вполне точно для коммерческих судов и больших военных судов, за исключением некоторых кораблей французского военного флота, для которых надо ввести поправки. Эти поправки были выяснены в моей работе о килевой качке, а потому здесь не будем на них останавливаться.

Объем v_i , заключенный между покрашенной ватерлинией, т. е. плоскостью xOy , и поверхностью воды

$$\zeta_1 = r \cos U$$

выражается интегралом

$$v_i = - \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} z_1 dy$$

где y_0 есть ордината покрашенной ватерлинии, соответствующая абсциссе x , считаемой в плоскости xOy ; знак минус (—) потому, что v_i есть придаток погруженного объема и ординаты z_1 считаются положительными вниз.

Чтобы вычислить этот интеграл, надо выразить ординату в функции x и y .

Мы имели общее уравнение

$$\zeta_1 = \zeta_0 - x\psi + y\theta_1 + z$$

и

$$U = 2\pi \left[\left(\frac{\xi_0}{\lambda_1} + \frac{\eta_0}{\lambda_2} \right) + \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) + \left(\frac{x}{\lambda_2} - \frac{y}{\lambda_1} \right) \varphi + \right. \\ \left. + \left(\frac{z}{\lambda_1} \psi - \frac{z}{\lambda_2} \theta_1 \right) \right]$$

и, подставив $\zeta_1 = r \cos U$ и заменив z на z_1 , получим для определения z_1 следующее уравнение:

$$\zeta_0 - x\psi + y\theta_1 + z_1 = r \cos 2\pi \left[\left(\frac{\xi_0}{\lambda_1} + \frac{\eta_0}{\lambda_2} \right) + \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{x}{\lambda_2} - \frac{y}{\lambda_1} \right) \varphi + \left(\frac{z_1}{\lambda_1} \psi - \frac{z_1}{\lambda_2} \theta_1 \right) \right]$$

из которого, ограничиваясь членами первого порядка, получим:

$$z_1 = -\zeta_0 + x\psi - y\theta_1 + r \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (24)$$

которое дает

$$\begin{aligned}
 v_i &= - \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} (-\zeta_0 + x\psi - y\theta_1) dy - \\
 &\quad - r \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= \zeta_0 S - \psi S l - \frac{\lambda_2}{2\pi} r \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= \zeta_0 S - \psi S l - r a'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - r b'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (25)
 \end{aligned}$$

где сделаны следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 dx \text{ — площадь грузовой ватерлинии} \\
 S_0 l &= 2 \int_{-L}^{+L} x y_0 dx \text{ — статический момент } S_0 \text{ около поперечной оси} \\
 a'_0 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; \quad b'_0 = \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \quad (26)
 \end{aligned}$$

Из формул (19), (22), (23), (25) и выведем следующие выражения искомых проекций силы поддержания:

$$\begin{aligned}
 P_\xi &= - \frac{2\pi r}{\lambda_1} g \rho \int_{v_0} \sin U dv = - \frac{2\pi r}{\lambda_1} g \rho \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] \\
 P_\eta &= - \frac{2\pi r}{\lambda_2} g \rho \int_{v_0} \sin U dv = - \frac{2\pi r}{\lambda_2} g \rho \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] \\
 P_\zeta &= - g \rho V_0 - g \rho \left(\zeta_0 S_0 - \psi S_0 l - r a'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - r b'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - \\
 &\quad - \frac{2\pi r}{\lambda} g \rho \left[A'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] \quad (27)
 \end{aligned}$$

Заметим, что эти выражения P_ξ , P_η и последний член $\overline{P_\zeta}$ выражения P_ζ представляют составляющие добавочной силы поддержания, происходящей от разности давления в волне и гидростатической, и относятся к постоянному погруженному объему V_0 .

Согласно изящной теореме, данной Гюю, мы можем изобразить эту добавочную силу вектором, причем конец этого вектора описывает круг. Это свойство вытекает и из наших формул (27); в самом деле: так как $P_\eta = P_\xi \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = P_\xi \operatorname{tg} \alpha$, то эта сила, или вектор, коим она представляется, постоянно лежит в плоскости $\eta_1 = \xi_1 \operatorname{tg} \alpha$, т. е. в плоскости бега или прямого сечения волны, и в то же время сумма

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2 \rho^2} (P_\xi^2 + P_\eta^2 + \overline{P_\zeta^2}) &= \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda_1^2} \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]^2 + \\ &+ \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda_2^2} \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]^2 + \\ &+ \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2} \left[A'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2} [A_0'^2 + B_0'^2] \end{aligned}$$

есть постоянное количество. Замечательно, что этот результат вполне строг, тогда как формулы (27) суть приближенные, ибо отброшены все члены высших порядков. Это указывает, что наше первое приближение воспроизводит точный характер хода явления, а погрешность будет лишь относиться к размерам его.

Подставляя выражения (27) в уравнение (10) и заметив, что масса корабля изобразится через $\frac{g \rho V_0}{g}$, и обозначив через R_ξ , R_η , R_ζ составляющие сопротивления воды колебаниям корабля, получим следующие уравнения движения центра тяжести корабля, иначе уравнения его орбитального движения:

$$g \rho \frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = - \frac{2\pi r}{\lambda_1} g \rho \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - R_\xi$$

$$\begin{aligned}
 g\rho \frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= -\frac{2\pi r}{\lambda_2} g\rho \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - R_\eta \\
 g\rho \frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + S_0 \zeta_0 &= g\rho \psi S_0 l + g\rho r \left(a'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + b'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - \\
 &\quad - \frac{2\pi r}{\tau} g\rho \left(A'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - R_\zeta
 \end{aligned} \quad (28)$$

Мы исследуем и проинтегрируем эти уравнения совместно с уравнениями вращательного движения корабля, к составлению которых теперь приступим.

§ 4. Чтобы составить уравнения вращательного движения, нам нужно составить явные выражения моментов L , M и N всех сил, действующих на корабль, относительно его осей Ox , Oy , Oz .

Эти моменты суть: 1) гидродинамической силы поддержания и 2) сопротивления воды.

Обозначим первые через L_1 , M_1 , N_1 , а вторые L_R , M_R , N_R ; мы получим:

$$L_1 = g\rho \int_V (yZ - zY) dv; \quad M_1 = g\rho \int_V (zX - xZ) dv; \quad N_1 = g\rho \int_V (xY - yX) dv$$

где ρ — плотность воды; $g\rho X dv$, $g\rho Y dv$, $g\rho Z dv$ — суть составляющие силы поддержания, действующей в точке (x, y, z) на элемент объема dv , и интегрирование должно быть распространено на весь погруженный объем.

Мы имели формулы (18) для проекций Ξ , H , Z силы поддержания на неподвижные оси координат.

Для X , Y , Z имеем выражения:

$$X = a\Xi + a_1\text{H} + a_2Z$$

$$Y = b\Xi + b_1\text{H} + b_2Z$$

$$Z = c\Xi + c_1\text{H} + c_2Z$$

Беря из таблицы (9') приближенные значения косинусов и выражения (18), получим:

$$g\rho X = -\frac{2\pi r}{\lambda_1} g\rho \sin U - \frac{2\pi r}{\lambda_2} g\rho \varphi \sin U + g\rho \psi \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U \right)$$

$$\begin{aligned}
 g\rho Y &= \frac{2\pi r}{\lambda_1} g\rho \varphi \sin U - \frac{2\pi r}{\lambda_2} g\rho \sin U - g\rho \theta_1 \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right) \\
 g\rho Z &= -\frac{2\pi r}{\lambda_1} g\rho \psi \sin U + \frac{2\pi r}{\lambda_2} g\rho \theta_1 \sin U - g\rho \left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right)
 \end{aligned}$$

Заметив, что $\frac{2\pi r}{\lambda_2}$, $\frac{2\pi r}{\lambda_1}$ и $\frac{2\pi r}{\lambda}$ суть малые количества первого порядка, получим для первого приближения, ограничиваясь членами первого порядка:

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U + \psi \\
 Y &= -\frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U - \theta_1 \\
 Z &= -1 - \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U
 \end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя эти величины, будем иметь для моментов L_1 , M_1 , N_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{g\rho} L_1 &= \int_V \left[y \left(-1 - \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U \right) + z \left(\frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U + \theta_1 \right) \right] dv = \\
 &= -\int_V y dv + \theta_1 \int_V z dv - \frac{2\pi r}{\lambda} \int_V y \cos U dv + \frac{2\pi r}{\lambda_2} \int_V z \sin U dv
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{g\rho} M_1 &= \int_V \left[z \left(\psi - \frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U \right) - x \left(-1 - \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U \right) \right] dv = \\
 &= \psi \int_V z dv + \int_V x dv - \frac{2\pi r}{\lambda_1} \int_V z \sin U dv + \frac{2\pi r}{\lambda} \int_V x \cos U dv
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{g\rho} N_1 &= \int_V \left[x \left(-\frac{2\pi r}{\lambda_2} \sin U - \theta_1 \right) - y \left(\psi - \frac{2\pi r}{\lambda_1} \sin U \right) \right] dv = \\
 &= -\theta_1 \int_V x dv - \psi \int_V y dv - \frac{2\pi r}{\lambda_2} \int_V x \sin U dv + \frac{2\pi r}{\lambda_1} \int_V y \sin U dv
 \end{aligned} \tag{32}$$

которые показывают, что все сводится к вычислению следующих девяти интегралов:

$$\begin{aligned}
 &\int_V x dv; \int_V y dv; \int_V z dv; \int_V x \cos U dv; \int_V x \sin U dv \\
 &\int_V y \cos U dv; \int_V y \sin U dv; \int_V z \sin U dv
 \end{aligned}$$

каждый из которых состоит из двух частей: первой, относящейся к постоянному объему V_0 , и второй, относящейся к переменному объему v_i , заключенному между грузовой ватерлинией и поверхностью волны. Тотчас же видно, что

$$\int_{V_0} x dv = 0; \int_{V_0} y dv = 0; \int_{V_0} z dv = a V_0 \dots (*)$$

причем a есть расстояние центра тяжести от центра величины. Интеграл (*), входя в предыдущие формулы, умножается на малые величины первого порядка, поэтому часть, отвечающая v_i , дает окончательно члены второго порядка, и нет надобности их рассчитывать; для интегралов $\int_{v_i} x dv$ и $\int_{v_i} y dv$, приняв во внимание формулу (24), получим:

$$\begin{aligned} \int_{v_i} x dv &= - \int_{-L}^{+L} x dx \int_{-y_0}^{+y_0} (-\zeta_0 + x\psi - y\theta_1) dy = \\ &= -r \int_{-L}^{+L} x dx \int_{-y_0}^{+y_0} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\ &= \zeta_0 S I - \psi I_0 - r \left(a'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + b'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

где $I_0 = 2 \int_{-L}^{+L} x^2 y_0 dx$ есть момент инерции площади грузовой ватерлинии относительно поперечной оси, и

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ b'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \end{aligned} \quad (33')$$

и точно так же будет

$$\begin{aligned}
 \int_{v_1} y dv &= - \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} (-\zeta_0 + x\psi - y\theta_1) y dy - \\
 &- r \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} y \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= \frac{2}{3} \theta_1 \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx - r \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} \left(y_0 \cos \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{2\pi} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= \theta_1 K_0 - r \left[\left(d'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} b'_0 \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \left(c'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} a'_0 \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

где обозначено

$K_0 = \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx$ — момент инерции грузовой ватерлинии относительно продольной оси и

$$\begin{aligned}
 c'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\
 d'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx
 \end{aligned} \quad (34')$$

a'_0 и b'_0 имеют значения (26).

Все прочие интегралы вида $\int_V x \cos U dv$ умножаются на малые величины $\frac{2\pi r}{\lambda}$, $\frac{2\pi r}{\lambda_1}$, $\frac{2\pi r}{\lambda_2}$, почему при вычислении их следует ограничиться только частью, относящейся к V_0 , и в аргументе U можно брать, как было указано выше, только члены

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right)$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \int_{V_0} x \cos U dv &= \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} x dx \int_{-y}^{+y} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= A'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau}
 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{V_0} x \sin U dv &= \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} x dx \int_{-y}^{+y} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= B'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau}
 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{V_0} y \cos U dv &= \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y}^{+y} y \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \left[y \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{2\pi} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right] \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= \left(D'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} B'_0 \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \left(C'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} A'_0 \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau}
 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{V_0} y \sin U dv &= \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y}^{+y} y \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy = \\
 &= -\frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \left[y \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{2\pi} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \right] \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = \\
 &= -\left[\left(C'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} A'_0 \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \left(D'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} B'_0 \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]
 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\int_{V_0} z \sin U dv = \int_0^h z dz \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y}^{+y} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy =$$

$$= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau} \right) dx = F'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - E'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (39)$$

где y означает ординату поверхности корабля, отвечающую значениям x и z , и снимается с чертежа. Постоянные параметры A'_1 , B'_1 и т. д. имеют значения, показанные в следующей таблице (40):

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ b'_0 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ a'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ b'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ c'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ d'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi y_0}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ S_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 dx; \quad S_0 l = 2 \int_{-L}^{+L} x y_0 dx \\ I_0 &= V_0 R_0 = 2 \int_{-L}^{+L} x^2 y_0 dx; \quad K_0 = V_0 r_0 = \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx \\ A'_0 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
B'_0 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
A'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
B'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} x \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
C'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} y \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
D'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} y \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
E'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} z \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
F'_1 &= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^h \int_{-L}^{+L} z \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
V_0 &= 2 \int_0^h \int_{-L}^{+L} y dx dz; \quad aV_0 = 2 \int_0^h \int_{-L}^{+L} z y dx dz
\end{aligned} \tag{40}$$

Все простые интегралы относятся к грузовой ватерлинии, где y_0 есть ордината ее, отвечающая абсциссе x , двойные интегралы относятся к полному водоизмещению V_0 и y суть ординаты точек поверхности корабля, отвечающие координатам x и z .¹

¹ Следует заметить, что во втором приближении, вследствие постепенного уменьшения радиуса производящего круга, во всех двойных интегралах, умножаемых на

$$\frac{2\pi r}{\lambda_1}, \frac{2\pi r}{\lambda_2}, \frac{2\pi r}{\lambda},$$

величина dz должна быть заменена через $e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} dz$.

Это замечание существенно при расчете боковой качки и введено как поправочный член в численном примере.

Подставляя выражения (33), (34), ..., (39) в выражения моментов L_1 , M_1 , N_1 , получим следующие уравнения движения корабля:

$$\begin{aligned}
 A \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = & g \rho \left[-\theta_1 (K_0 - a V_0) + r \left(h'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - g'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{2\pi r}{\lambda} \left(H'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - G'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2\pi r}{\lambda_2} \left(F'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - E'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \right] - L_R \quad (\text{боковая качка}) \\
 B \frac{d^2 \psi}{dt^2} = & g \rho \left[-\psi (I_0 - a V_0) + \zeta_0 S_0 l - r \left(a'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + b'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - \frac{2\pi r}{\lambda_1} \left(F'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - E'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2\pi r}{\lambda_1} \left(A'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \right] - M_R \quad (\text{килевая качка}) \\
 C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = & -g \rho \left[\frac{2\pi r}{\lambda_1} \left(G'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + H'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2\pi r}{\lambda_1} \left(A'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \right] - N_R \quad (\text{рыскание})
 \end{aligned} \tag{41}$$

где g'_1 , h'_1 , G'_1 , H'_1 обозначают

$$\begin{aligned}
 g'_1 &= c'_1 - \frac{\lambda}{2\pi} a'_0; \quad h'_1 = d'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} b'_0 \\
 G'_1 &= C'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} A'_0; \quad H'_1 = D'_1 - \frac{\lambda_2}{2\pi} B'_0
 \end{aligned} \tag{40'}$$

Уравнения (41) можно упростить, если заметим, что $\sin \theta_0 = \frac{2\pi r}{\lambda}$ или просто $\theta_0 = \frac{2\pi r}{\lambda}$ и θ_0 (наибольший волновой склон) не превышает 9° , и вес корабля $P = g \rho V_0$ и положим

$$\begin{aligned}
 M'_1 &= \frac{1}{V_0 (r_0 - a)} \left[E'_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} G'_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi} g'_1 \right] \\
 N'_1 &= \frac{1}{V_0 (r_0 - a)} \left[F'_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} H'_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi} h'_1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'_1 &= \frac{1}{V_0(R_0 - a)} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda} A'_1 - F'_1 - \frac{\lambda_1}{2\pi} a'_1 \right] \\
 L'_1 &= \frac{1}{V_0(R_0 - a)} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda} B'_1 - E'_1 - \frac{\lambda_1}{2\pi} b'_1 \right] \\
 P'_1 &= \frac{1}{V_0} \left[G'_1 \cos \alpha + B'_1 \sin \alpha \right] \\
 Q'_1 &= \left[H'_1 \cos \alpha + A'_1 \sin \alpha \right] \frac{1}{V_0}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Тогда уравнения (41) обратятся в следующие:

$$\begin{aligned}
 A \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + P(r_0 - a) \theta_1 &= P(r_0 - a) \Theta_0 \sin \alpha \left(N'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \right. \\
 &\quad \left. - M'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - L_R \\
 B \frac{d^2 \psi}{dt^2} + P(R_0 - a) \psi &= P(R_0 - a) \Theta_0 \cos \alpha \left(K'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \right. \\
 &\quad \left. + L'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + g \rho S_0 l \zeta_0 - M_R \\
 C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -P \Theta_0 \left(P'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + Q'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) - N_R
 \end{aligned} \tag{41'}$$

где A, B, C суть главные моменты инерции корабля; P — его вес; r_0 — его поперечный и R_0 — его продольный метацентрические радиусы, L_R, M_R, N_R — моменты сопротивления воды колебательным движениям корабля.

§ 5. Мы исследуем эти уравнения на численном примере во всех деталях, а также покажем приложение их к вычислению мореходных качеств корабля; но прежде того разберем несколько частных случаев для пояснения нашей методы.

Так, сделаем допущение Фруда, что размеры корабля весьма малы сравнительно с размерами волны, и выведем его уравнения боковой качки как частный случай наших (41').

Когда корабль движется параллельно гребням волн, его курсовой угол по нашему обозначению есть 90° , если волны бегут справа, и 270° , если волны бегут слева; но последний случай

еводится к первому, если заменить θ_1 через $-\theta_1$, а потому рассмотрим только первый.

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = \frac{\lambda}{\cos 90^\circ} = \infty; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{\sin 90^\circ} = \lambda$$

В то же время, так как размеры корабля малы, то количество $\frac{2\pi y}{\lambda}$ тоже мало и $\sin \frac{2\pi y}{\lambda}$ заменится через $\frac{2\pi y}{\lambda}$ во всех формулах (33) — (38), и, кроме того, заметив, что

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} = 1; \quad \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} = 0$$

мы легко получим из таблицы (40)

$$A'_0 = 2 \int_0^h \int_{-L}^{+L} y dz dx = V_0$$

$$B'_0 = b'_0 = b'_1 = d'_1 = B'_1 = D'_1 = F'_1 = 0$$

Однако мы впадем в ошибку, если положим, что и $g'_1 = 0$, как это казалось бы, когда в выражении a'_0 и C'_1 заменим

$$\sin \frac{2\pi y}{\lambda} \text{ и } \cos \frac{2\pi y}{\lambda}$$

через $\frac{2\pi y}{\lambda}$ и 1. В самом деле, параметр g'_1 происходит от исчисления интеграла

$$\int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} y \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} - \frac{t}{\tau} \right) dy$$

который при $\lambda_1 = \infty$ обращается в

$$\int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} y \cos 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{2\pi t}{\tau} \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} y \cos \frac{2\pi y}{\lambda} dy + \\
&+ \sin \frac{2\pi t}{\tau} \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} y \sin \frac{2\pi y}{\lambda} dy
\end{aligned}$$

Первый интеграл в левой части уравнения равен нулю, а второй после вышеуказанных подстановок дает

$$\int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} \frac{2\pi}{\lambda} y^2 dx = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y^3 dx = \frac{2\pi}{\lambda} K_0$$

и, сравнивая его с формулами (34), видим, что количество g'_1 в этом случае равно

$$g'_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} K_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} r_0 V_0$$

То же самое значение получим, если в выражениях c'_1 и a'_0 заменим $\sin \frac{2\pi y}{\lambda}$ и $\cos \frac{2\pi y}{\lambda}$ соответственно первыми двумя членами их разложения

$$\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right)^3 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right)^2$$

Присутствие множителя $\frac{\lambda}{2\pi}$ в выражении

$$g'_1 = c'_1 - \frac{\lambda}{2\pi} a'_0$$

и заставляет удерживать члены второго порядка в разложении,

Таким же точно образом найдем, что

$$-G'_1 = \frac{4\pi}{3\lambda} \int_0^h dz \int_{-L}^{+L} y^3 dx$$

Очевидно, что, заменив y через ординату y_0 грузовой ватерлинии, мы увеличиваем все элементы интеграла и получим больше, нежели значение интеграла, таким образом, будет

$$-G'_1 < \frac{2\pi h}{\lambda} K_0$$

где

$$K_0 = \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx$$

Значение E'_1 будет

$$E'_1 = 2 \int_0^h z dz \int_{-L}^{+L} y dx = aV_0$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} M'_1 &= \frac{1}{V_0(r_0 - a)} \left[E'_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} G'_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi} g'_1 \right] = \\ &= \frac{1}{V_0(r_0 - a)} [aV_0 - r_0V_0 - G'_1] = -1 - \frac{G'_1}{V_0(r_0 - a)} \end{aligned}$$

Но значения члена

$$-\frac{G'_1}{V_0(r_0 - a)} < \frac{2\pi h}{\lambda} \frac{V_0 r_0}{V_0(r_0 - a)}$$

или

$$-\frac{G'_1}{V_0(r_0 - a)} < \frac{2\pi h}{\lambda} \frac{r_0}{(r_0 - a)}$$

Согласно положению Фруда, отношение $\frac{h}{\lambda}$ углубления корабля к длине волны бесконечно мало и, таким образом,

$$\frac{G'_1}{V_0(r_0 - a)}$$

очень мало, и мы можем им пренебречь сравнительно с единицей. Таким образом, для этого случая $M'_1 = -1$ и уравнение (41') будет

$$A \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + P(r_0 - a) \theta_1 = P(r_0 - a) \Theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (43)$$

т. е. известное уравнение Фруда для случая боковой качки без сопротивления, так что

$$L_R = 0$$

Если мы сделаем в наших формулах $\alpha = 90^\circ$, но не будем делать предположения о малости размеров корабля сравнительно с размерами волны, то получим аналитическое выражение коэффициентов Бертена. Выражения эти дают возможность весьма просто вычислять сказанные коэффициенты.

В самом деле, в этом случае имеем, как и раньше:

$$b'_0 = b'_1 = d'_1 = B'_0 = B'_1 = D'_1 = F'_1 = 0$$

и

$$N'_1 = 0 \text{ и } M'_1 = \left[E'_1 - G'_1 + \frac{\lambda}{2\pi} g_1 \right] \frac{1}{V_0(r_0 - a)}$$

что и есть выражение коэффициентов Бертена, или, лучше сказать, произведение всех трех его коэффициентов. Мы возвратимся к этому вопросу в нашем численном примере.

Фруд при выводе своей теории боковой качки допустил, что центр тяжести корабля описывает в пространстве ту же самую орбиту, как и частицы воды. Мы можем получить этот результат из рассмотрения наших уравнений (28).

Фруд рассматривал боковую качку без сопротивления воды; уравнения (28) тогда будут

$$\frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = 0$$

$$\frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = V_0 \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

$$\frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + S_0 \zeta_0 = S_0 l \psi + r S_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda} V_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

но, так как корабль идет к волне лагом и предполагается, что килевой качки нет, то $\psi = 0$ и первые два уравнения дают

$$\xi_0 = C_1 + C_2 t$$

$$\eta_0 = C_3 + C_4 t - \frac{\tau^2 g r}{2\pi\lambda} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 суть произвольные постоянные интегрирования.

Полагая

$$\frac{S_0 g}{V_0} = n^2$$

в третьем уравнении и замечая, что $\frac{2\pi r}{\lambda} V_0$ есть весьма малое количество в сравнении с rS_0 , ибо $V_0 < S_0 h$ и значит

$$\frac{2\pi r V_0}{\lambda} < \left(\frac{h}{\frac{\lambda}{2\pi}}\right) S_0 h$$

и так как отношение $\left(\frac{h}{\frac{\lambda}{2\pi}}\right)$ углубление корабля к радиусу катящегося круга, по предположению Фруда, бесконечно мало, то третье уравнение обратится в такое:

$$\frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + n^2 \zeta_0 = r n^2 \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

и его интеграл будет

$$\zeta_0 = C_5 \cos nt + C_6 \sin nt + \frac{r n^2}{n^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

где C_5, C_6 суть две произвольные постоянные.

Легко видеть, что значения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 равны нулю, если же начальные условия таковы, что C_5 и C_6 тоже равны нулю,¹ то мы получим:

$$\zeta_0 = 0; \quad \eta_0 = -\frac{g\tau^2}{2\pi\lambda} r \sin \frac{2\pi t}{\tau}; \quad \zeta_0 = r \frac{n^2}{n^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

¹ Если принять в расчет сопротивление, то члены, содержащие C_5 и C_6 , убывают постепенно. Практически C_5 и C_6 всегда можно принять равными нулю.

Если положим

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{то} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{V_0}{S_0 g}}$$

и, так как

$$V_0 < S_0 h$$

то

$$T < 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Для чисто трохондальной волны мы имеем следующие отношения между периодом τ и длиной λ :

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

Таким образом,

$$\xi_0 = 0; \quad \eta_0 = -r \sin \frac{2\pi t}{\tau}; \quad \zeta_0 = r \frac{\tau^2}{\tau^2 - T^2} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

Отношение $\frac{T}{\tau} < \sqrt{\frac{2\pi h}{\tau}}$ и при сделанном Фрудом допущении очень мало; и, следовательно,

$$\frac{\tau}{\tau^2 - T^2} = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{\tau^2}}$$

очень близко к 1, и уравнения движения центра тяжести корабля будут

$$\xi_0 = 0; \quad \eta_0 = -r \sin \frac{2\pi t}{\tau}; \quad \zeta_0 = r \cos \frac{2\pi t}{\tau} \quad (44)$$

которые показывают, что движение этой точки такое же, что и частиц воды, как и было допущено Фрудом. Мы видим, однако, что это допущение не есть независимое, но оно есть следствие сделанного предположения о силе поддержания на волнении.

§ 6. Делая в уравнениях (40) и (41) угол $\alpha = 0^\circ$, получаем уравнение килевой качки, которые были уже даны в предыдущем

докладе для того случая, когда корабль идет попутной волной, т. е. по направлению бега волн. Значение $\alpha = 180^\circ$ соответствует случаю встречной волны.

§ 7. Общие формулы (40) во многих случаях практики могут быть упрощены. Весьма часто встречается тот случай, когда ширина корабля мала сравнительно с длиной волны, так что $\sin \frac{2\pi y}{\lambda_2}$ может быть заменен через $\frac{2\pi y}{\lambda_2}$, прочие члены разложения могут быть отброшены, а $\cos \frac{2\pi y}{\lambda_2}$ заменяется первыми двумя членами его разложения:

$$\cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi y}{\lambda_2} \right)^2$$

Тогда таблица (40) обратится в следующую:

$$\begin{aligned} a'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; & b'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ a'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 x \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; & b'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 x \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ A'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; & B'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \quad (40') \\ E'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h yz \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; & F'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h yz \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\ g'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} y_0^3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; & h'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} y_0^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\ G'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; & H'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \end{aligned}$$

Уместно здесь повторить уже сказанное выше, что если принять трохойдальное строение волны и постепенное уменьшение радиуса производящего круга, то во всех двойных интегралах, как A'_0, B'_0, E'_1, F'_1 , мы под знаком интеграла должны ввести множитель $e^{\frac{2\pi z}{\lambda}}$.

Эти формулы (40') мы и применим к численному примеру.

§ 8. Для нашего примера возьмем тот же самый корабль „Адмирал Корнилов“, который был взят как пример вычисления килевой качки (Trans. I. N. A., vol. XXXVII, p. 347).

Вычисление приведено со всеми подробностями для угла $\alpha = 45^\circ$, для других значений угла α даны лишь окончательные результаты. Эти вычисления, если их расположить надлежащим образом, далеко не так сложны, как это кажется с первого взгляда.

Размеры корабля

Длина	$2 L = 107$ м
Ширина	$2 B = 14.8$ м
Углубление	$h = 5.9$ м
Водоизмещение	$P = 5000$ т

Элементы волны

Длина	$\lambda = 125$ м
Высота	$2 r = 5$ м
Период	$\tau = 9$ сек.

Чтобы видеть, применимы или нет формулы (40') для всех значений угла α , рассчитаем наибольшее значение $\frac{2\pi y}{\lambda_2}$. Наименьшее значение λ_2 есть λ , и наибольшее значение y есть B , таким образом,

$$\frac{2\pi y}{\lambda_2} \leq 2\pi \frac{7.4}{125}, \quad \text{или} \quad \frac{2\pi y}{\lambda_2} \leq 0.366 \text{ рад.} = 21^\circ$$

Тогда имеем:

$$\sin 21^\circ = 0.358 \text{ и } \cos 21^\circ = 0.934 \text{ и } 1 - \frac{1}{2} (0.366)^2 = 0.932$$

так что с относительной погрешностью не более 2% мы можем принимать

$$\sin \frac{2\pi y}{\lambda_2} = \frac{2\pi y}{\lambda_2}$$

Точность же формулы

$$\cos \frac{2\pi y}{\lambda_2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi y}{\lambda_2} \right)^2$$

составляет около 0.2%. Отсюда следует, что мы можем употреблять формулы (40') для всех значений угла α .

Для вычисления площадей и объемов применим правило Чебышева.

Вычисление качки крейсера „Адмирал Корнилов“

Курсовой угол $\alpha = 45^\circ$

$$L = 53.5 \text{ м}; h = 5.9 \text{ м}; r = 2.5 \text{ м}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = 176.7 \text{ м}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = 176.7 \text{ м}$$

№№ сечений	$\frac{x}{L}$	$\frac{2\pi x}{\lambda_1}$	$\cos \frac{2\pi x}{\lambda_1}$	$\sin \frac{2\pi x}{\lambda_1}$
---------------	---------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Абсолютная величина

1 и 7	0.884	96.3°	-0.110	0.994
2 и 6	0.530	57.8	+0.532	0.846
3 и 5	0.324	35.3	+0.816	0.578
4	0	0	+1.000	0.000

Формулы для вычисления $a'_0, b'_0; a'_1, b'_1; S_0, I_0, K_0; g'_1$ и h'_1 :

$$a'_0 = 2 \int_{-L}^{+L} y_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; \quad b'_0 = 2 \int_{-L}^{+L} y_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx$$

Вычисление $a_0, b_0, a_1, b_1, S_0, K_0, I_0, g_1, h_1$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
№ сечения	Абсцисса x (м)	Ординаты грузовой ватерлинии	Корневые ординаты ГВА	(III) + (IV)	(III) - (IV)	$\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda_1} - 360^\circ$	$(V) \cdot \cos \varphi$	$(V) \cdot \sin \varphi$	$(VI) \cdot \cos \varphi$	$(VI) \cdot \sin \varphi$	$(X) \cdot x$	$(XI) \cdot x$	$\frac{100}{x^2}$	$(V) \cdot \frac{100}{x^2}$	$\frac{1000}{y^3}$	$(XVI) \cdot \cos \varphi$	$(XVIII) \cdot \sin \varphi$	$x \cdot (IX)$	
1	47.3	20	36	56	-16	96.3	-	6.2	55.7	+ 1.6	-15.8	+ 76	2640	22.37	1250	8	-1	8	-752
2	28.4	82	102	184	-20	57.8	+ 98.0	135.7	-10.6	-16.9	-301	4420	8.07	1485	551	293	466	-568	
3	17.3	102	110	212	-8	35.3	+ 73.2	122.5	- 4.5	- 4.6	-112	2120	3.00	636	1061	865	613	-138	
4	0	111		111		0	+111.0	0	111		0	0	0	0	1368	1368	0	0	
5	-17.3	110													1331	1085	-770		
6	-28.4	102													1061	565	-896		
7	-47.3	36													47	-5	- 47		
Сумма		563					+382.2				+ 76	+9180		3371	5427	4176	+1087	-1458	
							- 6.2				-413					-6	-1713		
							+376				+337	9180		3371	5427	4170	-626	-1458	

$$S_0 = 563 \times 2.04 = 1149 \text{ м}^2;$$

$$a_0 = 376 \times 2.04 = 767 \text{ м}^2;$$

$$a_1' = 337 \times 2.04 = -687 \text{ м}^3;$$

$$S_0' = -1458 \times 2.04 = -2970 \text{ м}^3; -\frac{3\lambda_2}{4\pi} g_1' = 4170 \times 9.06 = 37800 \text{ м}^3; -\frac{3\lambda_2}{4\pi} h_1' = -626 \times 9.06 = -5670 \text{ м}^4$$

$$b_0' = -37 \times 2.04 = -75 \text{ м}^2;$$

$$b_1' = 9180 \times 2.04 = 18730 \text{ м}^3;$$

$$I_0 = 337, 100 \times 2.04 = 675500 \text{ м}^4$$

$$K_0 = \frac{1}{3} \cdot 5427 \times 9.06 = 16400 \text{ м}^4$$

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 x \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; & b'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 x \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx \\
 S_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 dx; & K_0 &= \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx; & I_0 &= \int_{-L}^{+L} y_0 x^2 dx; & S_0 l &= \int_{-L}^{+L} y_0 x dx \\
 g'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} y_0^3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx; & h'_1 &= -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} y_0^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx
 \end{aligned}$$

Множитель 2.04, на который все суммы умножаются, чтобы получить значения интегралов, есть произведение следующих чисел: $2.04 = 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{107}{15}$, где 107 есть длина корабля, 7 — число сечений и 15 — масштаб (15 мм в 1 м); все ординаты даны в миллиметрах чертежа, и только окончательные результаты переведены в их действительные значения для данного корабля.

Вычисление $A'_0, B'_0, A'_1, B'_1, V_0$:

$$\begin{aligned}
 A'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; & B'_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
 A'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y x \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; & B'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y x \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \\
 V_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y dx dz
 \end{aligned}$$

Вычисление E'_1 и F'_1 :

$$E'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h z y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz; \quad F'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h z y \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

В этих выражениях удобно заменить z через $\frac{h}{2} + \left(z - \frac{h}{2}\right)$,

Вычисление водоизмещения V_0

№ сечений № ватерлинии	Носовая часть			4	Кормовая часть			Сумма
	1	2	3		5	6	7	
I ($z_1 = 0.49$ м)	17.3	79.0	102.0	111.0	110.0	101.5	26.0	546.8
II ($z_2 = 1.85$ м)	13.0	73.0	99.0	108.5	106.0	95.5	7.0	502.0
III ($z_3 = 2.95$ м)	8.5	64.5	94.5	102.5	97.5	82.0	3.5	453.0
IV ($z_4 = 4.05$ м)	4.0	48.0	82.0	88.0	79.0	57.0	3.0	361.0
V ($z_5 = 5.41$ м)	1.0	12.0	41.0	41.0	28.5	18.0	3.0	144.5
Суммы . .	43.8	276.5	418.5	451.0	425.0	354.0	42.5	2007.3

$$V_0 = 2007.3 \times \frac{107 \times 5.9}{7 \times 5 \times 15} = 2007.3 \times 2.42 = 4890 \text{ м}^3; \quad g\rho V_0 = 5000 \text{ т}$$

Вычисление A'_0, B'_0, A'_1, B'_1 — ординаты не приведенные

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
№ сечений	Абсциссы x (м)	Суммы носовой части	Суммы кормовой части	(III) + (IV)	(III) - (IV)	$\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda_1}$	(V) · cos φ	(V) · sin φ	(VI) · cos φ	(VI) · sin φ	(X) · x	(IX) · x
1 и 7	47.3	43.8	42.5	86.3	+ 1.3	96°3	—9	86	0	1.3	0	4070
2 и 6	28.4	276.5	354.0	630.5	—77.5	57.8	336	532	—41	—65.1	—1162	15100
3 и 5	17.3	418.3	421.0	839.5	— 2.5	35.3	686	486	— 2	— 1.5	—0035	8410
4	0	451.0	—	451.0	—	0	451	0	451	0	0	0
							1464			—65.3	—1197	27580

$$A'_0 = 1464 \times 2.42 = 3520 \text{ м}^3; \quad A'_1 = -1197 \times 2.42 = -2890 \text{ м}^4$$

$$B'_0 = -65.3 \times 2.42 = -156 \text{ м}^3; \quad B'_1 = 27580 \times 2.42 = 66500 \text{ м}^4$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} E'_1 &= 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h \left(\frac{h}{2} + z - \frac{h}{2} \right) y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz = \\ &= h \int_{-L}^{+L} \int_0^L y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz + 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h \left(z - \frac{h}{2} \right) y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz \end{aligned}$$

заметив, что

$$2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz = A'_0$$

и положив

$$z_1 = z - \frac{h}{2}; \quad E'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} z_1 y \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz_1$$

получим:

$$E'_1 = \frac{h}{2} A'_0 + E''_1$$

Точно так же будет

$$F'_1 = \frac{h}{2} B'_0 + F''_1$$

где

$$F''_1 = 2 \int_{-L}^{+L} z_1 y \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz_1$$

Вычисление G'_1 и H'_1 :

$$G'_1 = -\frac{4}{3} \frac{\pi}{\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz_1$$

$$H'_1 = -\frac{4}{3} \frac{\pi}{\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz_1$$

№№ сечений № ватерлинии	1	2	3	4	5	6	7
	Кубы ординат $\frac{y^3}{1000}$						
I	5	493	1061	1368	1331	1046	18
II	2	389	970	1277	1191	871	0
III	1	307	844	1077	927	551	0
IV	0	111	551	681	493	185	0
V	0	17	69	69	23	6	0
Сумма S	8	1317	3495	4472	3965	2659	18
	18	2659	3965	—			
Суммы σ_1	26	3976	7460	4472			
Разности σ_2	—10	—1342	—470	—			
$\sigma_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1}$	—3	2024	6086	4472	$\sum \sigma_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} = 12587$		
$\sigma_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_2}$	—10	—1136	—272	0			
					$\sum \sigma_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} = -1418$		

$$-\frac{3\lambda_2}{2\pi} G'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz =$$

$$= \frac{2 \times 107 \times 5.9 \times 1000}{7 \times 5 \times 15 \times 15 \times 15} \sum \sigma_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} = 135000 \text{ м}^5 = G''_1$$

$$-\frac{3\lambda_2}{2\pi} H'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz =$$

$$= 10.69 \sum \sigma_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} = -15150 \text{ м}^5 = H''_1$$

Число 107 и 5.9 суть длина и углубление корабля, 7 и 5 суть числа сечений и ватерлиний; множитель $\frac{1000}{15^3}$ введен потому, что ординаты даны в миллиметрах, масштаб чертежа 15 мм в 1 м, и

Таблица значений параметров (40')

α^0	α'_0	b'_0	α'_1	b'_1	g''_1	h''	A'_0	B'_0	A'_1	B'_1	E'_1	F'_1	G''_1	H''_1
0^0	475	-75	771	19950	28200	-6700	2470	-171	-942	72600	6120	-239	100000	-18010
$11^{1/4}$	514	-77	620	20200	29000	-6620	2560	-185	-1140	76500	6430	-283	108000	-17910
$22^{1/2}$	556	-77	361	20050	31000	-6520	2770	-185	-1570	75000	6910	-288	113500	-17560
$33^{3/4}$	647	-77	-45	19850	34000	-6130	3100	-173	-2010	72600	7690	-264	123500	-16600
45	767	-75	-687	18730	37800	-5670	3520	-156	-2890	66500	8600	-234	135000	-15150
$56^{1/4}$	903	-68	-1446	16280	42100	-4790	4010	-132	-3880	56700	9670	-197	148000	-12700
$67^{1/2}$	1040	-49	-2310	12240	46200	-3140	4500	-86	-4610	38600	10800	-124	161500	-8450
$78^{3/4}$	1095	-35	-2650	8250	47700	-2240	4690	-63	-4960	27500	11170	-92	166500	-6040
90	1150	0	-2980	0	49200	0	4830	0	-5360	0	11550	0	170000	0
$101^{1/4}$	1095	-35	-2650	-8250	47700	+2240	4690	+63	-4960	-27500	11170	+92	166500	+6040
$112^{1/2}$	1040	+49	-2310	-12240	46200	+3140	4500	+86	-4610	-38600	10800	+124	161500	+8450
$123^{3/4}$	903	+68	-1446	-16280	42100	+4790	4010	+132	-3880	-56700	9670	+197	148000	+12700
135	766	+75	-687	-18730	37800	+5670	3520	+156	-2890	-66500	8600	+234	135000	+15150
$146^{1/4}$	647	+77	-45	-19850	34000	+6130	3100	+173	-2010	-72600	7690	+264	123500	+16600
$157^{1/2}$	556	+77	+361	-20050	31000	+6520	2770	+185	-1570	-75000	6910	+288	113500	+17560
$168^{3/4}$	517	+77	+620	-20200	29000	+6620	2560	+185	-1140	-76500	6430	+283	108000	+17910
180	475	+75	+771	-19950	28200	+6700	2470	+171	-942	-72600	6210	+239	100000	+18010

кубы разделены на 1000, чтобы получить числа, удобные для обращения с ними.

Рассчитывая параметры совершенно так же для всех значений угла α от 0 до 180° , мы получим результаты, приведенные в предшествующей таблице (стр. 67).

Таблица значений коэффициентов

$$N'_1, M'_1, K'_1 \cos \alpha, L'_1 \sin \alpha, P'_1, Q'_1$$

α	N'_1	M'_1	$K'_1 \cos \alpha$	$L'_1 \sin \alpha$	P'_1	Q'_1
0°	-0.585	-0.320	-0.024	-0.500	0	0
$11^{1/4}$	-0.587	-0.301	-0.020	-0.502	2.84	-0.010
$22^{1/2}$	-0.582	-0.311	-0.017	-0.500	5.47	-0.059
$33^{3/4}$	-0.545	-0.330	-0.001	-0.497	7.80	-0.159
45	-0.502	-0.376	+0.016	-0.488	8.91	-0.342
$56^{1/4}$	-0.420	-0.390	+0.038	-0.412	8.91	-0.600
$67^{1/2}$	-0.274	-0.409	+0.063	-0.316	6.67	-0.840
$78^{3/4}$	-0.198	-0.436	+0.072	-0.211	5.17	-0.985
90	0.000	-0.438	+0.082	0.000	0	-1.073
$101^{1/4}$	+0.198	-0.436	+0.072	+0.211	-5.17	-0.985
$112^{1/2}$	+0.274	-0.409	+0.063	+0.316	-6.67	-0.840
$123^{3/4}$	+0.420	-0.390	+0.038	+0.412	-8.91	-0.600
135	+0.502	-0.376	+0.016	+0.488	-8.91	-0.342
$146^{1/4}$	+0.545	-0.330	-0.001	+0.497	-7.80	-0.151
$157^{1/2}$	+0.582	-0.311	-0.017	+0.500	-5.47	-0.059
$168^{3/4}$	+0.587	-0.301	-0.020	+0.502	-2.84	-0.010
180	+0.585	-0.320	-0.024	+0.500	0	0

Примечание. При составлении таблицы принято

$$V_0 (r - a) = 4740 \text{ м}^4$$

$$V_0 (R_0 - a) = 664000 \text{ м}^4$$

Вычислив эти параметры, составим следующие выражения, которые входят в уравнения вращательного движения корабля:

$$N'_1 = \frac{F'_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} H'_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi} h'_1}{V_0(r_0 - a)} = \frac{F'_1 + \frac{2\pi}{3\lambda} H''_1 - \frac{1}{3} h''_1}{V_0(r_0 - a)}$$

$$M'_1 = \frac{E'_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} G'_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi} g'_1}{V(r_0 - a)} = \frac{E'_1 + \frac{2\pi}{3\lambda} G''_1 - \frac{1}{3} g''_1}{V_0(r_0 - a)}$$

$$K'_1 \cos \alpha = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} A'_1 - F'_1 - \frac{\lambda_1}{2\pi} a'_1\right) \cos \alpha}{V_0(R_0 - a)} =$$

$$= \frac{A'_1 - F'_1 \cos \alpha - \frac{\lambda}{2\pi} a'_1}{V_0(R_0 - a)}$$

$$L'_1 \sin \alpha = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} B'_1 - E'_1 - \frac{\lambda_1}{2\pi} b'_1\right) \sin \alpha}{V_0(R - a)} =$$

$$= \frac{B'_1 - E'_1 \sin \alpha - \frac{\lambda}{2\pi} b'_1}{V_0(R_0 - a)}$$

$$P'_1 = (G'_1 \cos \alpha + B'_1 \sin \alpha) \frac{1}{V_0} =$$

$$= \left[-\frac{2\pi}{3\lambda} G''_1 \cos \alpha + B'_1 \right] \frac{\sin \alpha}{V_0}$$

$$Q'_1 = [H'_1 \cos \alpha + A'_1 \sin \alpha] \frac{1}{V_0} =$$

$$= \left[-\frac{2\pi}{3\lambda} H''_1 \cos \alpha + A'_1 \right] \frac{\sin \alpha}{V_0}$$

§ 9. Значения всех коэффициентов могут быть рассчитаны, принимая во внимание постепенное уменьшение радиусов производящего круга.

Заметим, что даже при вычислении первого приближения боковой качки необходимо принять во внимание это уменьшение радиуса, вводя множитель $e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}}$, таким образом, будет

Таблица значений $A'_0, B'_0, E'_1, F'_1, G'_1, H'_1, M'_1$ и N'_1
для приведенных ординат

α	A'_0	B'_0	E'_1	F'_1	G'_1	H'_1	M'_1	N'_1
0°	2160	-171	5230	-241	91200	-16800	-0.590	-0.558
11 ¹ / ₄	2240	-169	5420	-237	96700	-16700	-0.555	-0.550
22 ¹ / ₂	2420	-168	5840	-234	103000	-16300	-0.579	-0.542
33 ³ / ₄	2690	-160	6400	-224	111000	-15600	-0.641	-0.512
45	3100	-142	7310	-193	122000	-19100	-0.647	-0.470
56 ¹ / ₄	3540	-120	8030	-164	133500	-11800	-0.790	-0.396
67 ¹ / ₂	3940	-77	9080	-96	146000	-7850	-0.825	-0.257
78 ³ / ₄	4120	-58	9480	-80	150000	-5620	-0.830	-0.171
90	4260	0	9800	0	154000	0	-0.850	0
101 ¹ / ₄	4120	+58	9480	+80	150000	+5620	-0.830	+0.171
112 ¹ / ₂	3940	+77	9080	+96	146000	+7850	-0.825	+0.257
123 ³ / ₄	3540	+120	8030	+164	133500	+11800	-0.790	+0.396
135	3100	+142	7310	+193	122000	+14100	-0.647	+0.479
146 ¹ / ₄	2690	+160	6400	+224	111000	+15600	-0.641	+0.512
157 ¹ / ₂	2420	+168	5840	+234	103000	+16300	-0.579	+0.542
168 ³ / ₄	2240	+169	5420	+237	96700	+16700	-0.555	+0.550
180	2160	+171	5230	+241	91200	+16800	-0.590	+0.558

$$A'_0 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

$$B'_0 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

$$E'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y z e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

$$F'_1 = 2 \int_{-L}^{+L} \int_0^h y z e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

$$G_1' = -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

$$H_1' = -\frac{4\pi}{3\lambda_2} \int_{-L}^{+L} \int_0^h y^3 e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} dx dz$$

и получим другую таблицу (стр. 70).

Сличая значения M_1' и N_1' в обеих таблицах, мы видим, что эти коэффициенты изменились вдвое.

Размахи сильной боковой качки почти пропорциональны M_1' и N_1' ; откуда видно, что для вычисления боковой качки даже на установившейся зыби, необходимо знать точное динамическое строение волны, так как оно имеет весьма большое влияние на производимую им качку.

Такого знания почти не нужно для расчета килевой качки, для которой мы получим весьма близкое приближение и в том случае, когда динамическое строение волны известно лишь с грубым приближением.

§ 10. Приступая к составлению численных уравнений движения корабля на волнении, надо, кроме численных величин параметров, характеризующих действие волны на корабль, вычислить: 1) главные моменты инерции корабля A , B , C ; 2) сопротивление воды колебательному движению корабля.

Вычисление точных значений моментов инерции корабля составило бы весьма утомительную работу; для определения величин A момента инерции корабля около продольной оси можно воспользоваться с достаточною степенью точности периодом свободных качаний корабля на тихой воде, применив уравнение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{P(r_0 - a)}}$$

Момент A , таким образом определенный, содержит в себе и момент инерции массы воды, увлекаемой кораблем при его качаниях.

Точно так же можно бы определить и момент инерции B около поперечной оси, наблюдая период килевой качки на тихой воде; но это возможно лишь для малых судов и моделей, потому что практически нельзя раскачать большой корабль около его поперечной оси.

Но зато в этом случае нетрудно рассчитать приближенно весьма близко значение момента B , как это изложено в моей работе о килевой качке, принимая, что соответствующая главная ось инерции лежит в миделевом сечении. Это приближенное значение легко получить, пользуясь кривою продольной нагрузки и даже просто строевою по шпангоутам.

В самом деле

$$B = \sum m(x^2 + z^2) = \sum mx^2 + \sum mz^2$$

и

$$A = \sum m(z^2 + y^2) = \sum mz^2 + \sum my^2$$

таким образом,

$$\sum mx^2 < B < \sum mx^2 + A$$

где знак суммы относится к массам как корпуса, так и всех грузов корабля.

Если имеется кривая нагрузки, то сумма $\sum mx^2$ представляет момент инерции площади этой кривой относительно оси, проходящей через центр ее тяжести. Имея моменты $\sum mx^2$ и положив

$$B = \sum mx^2 + \frac{1}{2} A$$

мы сделаем в величине B ошибку не более $\frac{1}{2} A$.

Вообще A весьма мало сравнительно с B ; например, для „Корнилова“ B есть 318 000 мм · сек². и A только 20 000 мм · сек². Таким образом, $\frac{A}{B} < \frac{1}{15}$ и степень приближения формулы

$$B = \sum mx^2 + \frac{1}{2} A$$

составляет около 3%, и мы можем даже с уверенностью считать, что эта формула еще точнее, так как в судах новейшей по-

стройки Σmx^2 и Σmy^2 почти не разнятся. Такая степень приближения более чем достаточна для наших целей.

Чтобы вычислить значение C , заметим, что

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$

и приближенно

$$C = \Sigma mx^2 + \frac{1}{2} A = B$$

§ 11. Точный закон сопротивления воды неизвестен; и мы принуждены восполнять недостаток наших сведений по этому вопросу более или менее вероятными предположениями, которые в большей или меньшей степени подтверждаются опытами и теми немногочисленными наблюдениями, которые были до сего времени сделаны.

Бертен и Фруд на основании своих опытов представляли влияние сопротивления воды на величину размахов боковой качки одним из следующих „законов погашения“:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Theta_m &= -a_1\Theta_m & (1) \\ \Delta\Theta_m &= -b_2\Theta_m^2 & (2) \\ \Delta\Theta_m &= -[a_3\Theta_m + b_3\Theta_m^2] & (3) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где Θ_m есть амплитуда m -го размаха качки, а $\Delta\Theta_m = \Theta_{m+1} - \Theta_m$ — разность такой амплитуды и амплитуды последующего размаха.

Коэффициенты вообще определяются опытным путем из наблюдений качания на тихой воде; выведенный „закон погашений“ распространяется затем и на случай качки, происходящей на установившемся волнении, причем период волн предполагается или равным периоду корабля, или близким к нему.

Легко убедиться методом, который применен Пуассоном в задаче о маятнике (*Mécanique*, §§ 188 и 189), что для малых амплитуд эти три закона погашения соответствуют случаям сопротивления — первый пропорционально первой степени скорости, второй — квадрату, третий — выражающемуся биномиальной формулой $av + bv^2$.

Чтобы читатель мог с первого взгляда судить о степени приближения этих выводов и о тех предположениях, из которых они получены, я даю вывод тех формул, которые выражают соотношения между коэффициентами погашения и коэффициентами сопротивления (см. гл. III § 9 книги „Качка корабля“).

Уравнения малых свободных колебаний корабля будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta &= 0 & (1') \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \pm k \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + n^2\theta &= 0 & (2') \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h \frac{d\theta}{dt} \pm k \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + n^2\theta &= 0 & (3') \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

знак плюс (+) принимается, когда направление колебания увеличивает угол θ , и знак минус (—), когда направление соответствует убывающему θ .

Мы будем интегрировать эти уравнения, принимая прежние начальные условия, т. е., что при $t = 0$

$$\theta = \theta_0 \text{ и } \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

1. Имеем:

$$\theta = e^{-ht} \{C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t\}$$

где

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2}$$

C_1 и C_2 определяются из условий

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = \frac{h}{n_1} \theta_0$$

и

$$\theta = \theta_0 e^{-ht} \left(\cos n_1 t + \frac{h}{n_1} \sin n_1 t \right) \quad (47)$$

Наклонение θ достигает своих крайних значений

$$\theta_0; -\theta_1; \theta_2; -\theta_3 \text{ и т. д.}$$

в моменты

$$0, \frac{\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_1}, \frac{3\pi}{n_1} \text{ и т. д.}$$

Обозначая через $T = \frac{2\pi}{n_1}$ период полного колебания, получим абсолютные значения:

$$\theta_1 = \theta_0 e^{-\frac{hT}{2}}; \theta_2 = \theta_0 e^{-2\frac{hT}{2}}$$

$$\theta_3 = \theta_0 e^{-3\frac{hT}{2}}; \dots; \theta_m = \theta_0 e^{-m\frac{hT}{2}}; \theta_{m+1} = \theta_0 e^{-(m+1)\frac{hT}{2}}$$

Следовательно,

$$\Delta\theta_m = \theta_m - \theta_{m+1} = -\theta_0 e^{-m\frac{hT}{2}} \left(1 - e^{-\frac{hT}{2}}\right) = -\theta_m \left(1 - e^{-\frac{hT}{2}}\right)$$

что по сравнению с формулой

$$-\Delta\theta_m = a_1 \theta_m$$

дает

$$a_1 = 1 - e^{-\frac{hT}{2}}$$

и обратно

$$h = -\frac{2}{T} \ln(1 - a_1) = -\frac{0.8686}{T} \lg(1 - a_1) \quad (48)$$

2. Сообразно с начальными условиями уравнение (46,2') для первого размаха, направленного в сторону убывающих θ , будет иметь вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - k\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + n^2\theta^2 = 0$$

Это уравнение может быть интегрировано в квадратурах; но, так как само уравнение в применении к кораблю есть приближенное, то при решении его достаточно довольствоваться той же степенью приближения.

Поэтому можем применить методу разложения искомой величины θ в ряд по степеням θ_0 ; такой прием короче и ведет к более симметричным выкладкам. Положим поэтому, следуя Пуассону,

$$\theta = \theta_0 \varphi_1(t) + \theta_0^2 \varphi_2(t) + \theta_0^3 \varphi_3(t) + \dots \quad (49)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и т. д. суть неизвестные функции t , которые надо определить так, чтобы Θ удовлетворило уравнению и начальным условиям.

Подставляя в уравнение (46,2') вместо Θ его разложение,¹ получим, собрав члены с одинаковыми степенями Θ_0 :

$$\Theta_0 [\varphi_1''(t) + n^2 \varphi_1(t)] + \Theta_0^2 [\varphi_2''(t) - k [\varphi_1'(t)]^2 + n^2 \varphi_2(t)] + \dots = 0 \quad (50)$$

Мы не выписали членов с Θ_0^3 и т. п., потому что в самом уравнении такие числа были отброшены.

Уравнение (50) должно иметь место при всяком значении Θ_0 , следовательно, множители при каждой степени Θ_0 в отдельности должны обращаться в ноль, что и дает для определения φ_1 и φ_2 следующие уравнения, к которым надо присоединить и соответствующие начальные условия:

$$\varphi_1'' + n^2 \varphi_1 = 0, \quad \text{где при } t=0 \quad (\varphi_1)_0 = 1; (\varphi_1')_0 = 0$$

$$\varphi_2'' + n^2 \varphi_2 = k(\varphi_1')^2, \quad \text{где при } t=0 \quad (\varphi_2)_0 = 0; (\varphi_2')_0 = 0$$

Из первого уравнения и условий получаем:

$$\varphi_1 = \cos nt$$

и, подставляя во второе, будем иметь:

$$\varphi_2'' + n^2 \varphi_2 = kn^2 \sin^2 nt = \frac{1}{2} kn^2 (1 - \cos 2nt)$$

общий интеграл которого есть

$$\varphi_2 = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{1}{2} k + \frac{k}{6} \cos 2nt$$

Начальные условия дают для произвольных постоянных значения, определяемые уравнениями

$$0 = C_1 + \frac{k}{6} + \frac{k}{2}; \quad C_1 = -\frac{2}{3} k$$

$$0 = nC_2; \quad C_2 = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}k - \frac{2}{3}k \cos nt + \frac{1}{6}k \cos 2nt$$

$$\theta = \left(\theta_0 - \frac{2}{3}k\theta_0^2 \right) \cos nt + \frac{k\theta_0^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2nt \right) \quad (51)$$

Эти уравнения могут быть употребляемы пока θ' останется отрицательным, т. е. пока t не достигнет наименьшего значения, удовлетворяющего уравнению

$$\theta' = 0 = -n \left(\theta_0 - \frac{2}{3}k\theta_0^2 \right) \sin nt - \frac{nk\theta_0^2}{3} \sin 2nt$$

которое дает

$$nt = \pi, \text{ или } t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{n}$$

Соответствующее значение угла θ есть

$$\theta_1 = - \left(\theta_0 - \frac{4}{3}k\theta_0^2 \right)$$

отсюда

$$\Delta\theta_0 = \frac{4}{3}k\theta_0^2$$

Таким же точно манером для m -го колебания получилось бы соотношение

$$\Delta\theta_m = - \frac{4}{3}k\theta_m^3$$

которое, будучи сравнено с (45,2), дает

$$k = \frac{3}{4}b_2 \quad (52)$$

3. Наконец, в третьем случае, когда уравнение для первого размаха есть (46,3')

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta - k \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0$$

применив тот же метод, определим φ_1 и φ_2 из следующих уравнений и начальных условий:

$$\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = k\varphi_1^2$$

и для $t=0$

$$(\varphi_1)_0 = 1; (\varphi_1')_0 = 0$$

$$(\varphi_2)_0 = 0; (\varphi_2')_0 = 0$$

отсюда

$$\varphi_1 = e^{-ht} \left[\cos n_1 t + \frac{h}{n_1} \sin n_1 t \right]$$

где

$$n_1^2 = n^2 - h^2 \text{ и } n_1 = +\sqrt{n^2 - h^2}$$

Тогда уравнение для φ_2 будет

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = \frac{kn^4}{2n_1^2} e^{-2ht} (1 - \cos 2n_1 t)$$

и общий его интеграл

$$\begin{aligned} \varphi_2 = e^{-ht} \{ C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t \} + A e^{-2ht} + \\ + e^{-2ht} \{ B \cos 2n_1 t + D \sin 2n_1 t \} \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{kn^2}{2n_1^2}$$

и B и D определяются из уравнений

$$(4h^2 - 3n^2)B - 4n_1 h D = -\frac{kn^4}{2n_1^3}$$

$$4n_1 h B + (4h^2 - 3n^2)D = 0;$$

которые дают

$$B = -\frac{kn^4}{2n_1^2} \cdot \frac{4h^2 - 3n^2}{(4h^2 - 3n^2)^2 + 16n_1^2 h^2} = -\frac{kn^2}{2n_1^2} \cdot \frac{4h^2 - 3n^2}{9n^2 - 8h^2}$$

$$D = \frac{kn^4}{2n_1^2} \cdot \frac{4hn_1}{(4h^2 - 3n^2)^2 + 16n_1^2 h^2} = \frac{2kn^2}{n_1} \cdot \frac{h}{9n^2 - 8h^2}$$

постоянные же произвольные, определенные из начальных условий, будут

$$C_1 = -(A+B) \text{ и } C_2 = \frac{h}{n_1}(A+B) - 2D$$

причем A , B и D имеют вышеприведенные значения.

Надо заметить, что вообще количество $\frac{h^2}{n^2}$ весьма мало, так что практически $n_1 = n$ и вышенаписанные формулы упростятся, и мы получим:

$$A = \frac{1}{2} k; B = \frac{1}{6} k; D = \frac{2}{9} \cdot \frac{hk}{n}; C_1 = -\frac{2}{3} k; C_2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{hk}{n}$$

$$\varphi_2 = e^{-ht} \left\{ -\frac{2}{3} k \cos n_1 t + \frac{4}{9} \cdot \frac{hk}{n} \sin n_1 t \right\} + \frac{1}{2} k e^{-2ht} + \\ + e^{-2ht} \left\{ \frac{1}{6} k \cos 2n_1 t + \frac{2}{9} \cdot \frac{hk}{n} \sin 2n_1 t \right\}$$

$$\Theta = \Theta_0^2 \varphi_1 + \Theta_0^2 \varphi_2 = e^{-ht} \left[\left(\Theta_0 - \frac{2}{3} k \Theta_0^2 \right) \cos n_1 t + \right. \\ \left. + \left(\frac{h\Theta_0}{n} + \frac{4}{9} \cdot \frac{kh}{n} \Theta_0^2 \right) \sin n_1 t \right] + \\ + e^{-2ht} \left[\frac{k\Theta_0^2}{2} + \frac{k\Theta_0^2}{6} \cos 2n_1 t + \frac{2}{9} \cdot \frac{kh}{n} \Theta_0^2 \sin 2n_1 t \right]$$

Наибольшее наклонение Θ_1 на другую сторону от прямого положения достигается в момент, определяемый уравнением

$$\Theta' = 0 = e^{-ht} \left[\frac{8}{9} kh \Theta_0^2 \cos nt - \left(n\Theta_0 - \frac{2}{3} nk \Theta_0^2 \right) \sin nt \right] + \\ + e^{-2ht} \left(-hk \Theta_0^2 + \frac{1}{9} hk \Theta_0^2 \cos 2nt - \frac{1}{3} nk \Theta_0^2 \sin 2nt \right)$$

где количество $(n^2 + h^2)$ просто заменено через n^2 .

Приближенно значение наименьшего корня этого уравнения есть $t = \frac{\pi}{n}$, и соответственное значение Θ_1 , удерживая лишь главные, члены есть

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= -\left(\Theta_0 - \frac{2}{3} k \Theta_0^2\right) e^{-\frac{h\pi}{n}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{2h\pi}{n}} k \Theta_0^2 = \\ &= -\Theta_0 e^{-\frac{h\pi}{n}} \left[1 - \frac{2}{3} k \Theta_0 \left(1 + e^{-\frac{h\pi}{n}}\right)\right]\end{aligned}$$

Точно таким же манером для $m+1$ -го размаха получим выражение

$$\Theta_{m+1} = -\Theta_m e^{-\frac{h\pi}{n}} \left[1 - \frac{2}{3} k \Theta_m \left(1 + e^{-\frac{h\pi}{2}}\right)\right]$$

отсюда абсолютное значение разности m -го и $(m+1)$ -го размаха будет

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_m = \Theta_m - \Theta_{m+1} &= -\left[\left(1 - e^{-\frac{h\pi}{n}}\right)\Theta_m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} k e^{-\frac{h\pi}{n}} \left(1 + e^{-\frac{h\pi}{n}}\right)\Theta_m^2\right]\end{aligned}\quad (53)$$

которое, будучи сравнено с формулой

$$\Delta\Theta_m = -(a_3\Theta_m + b_3\Theta_m^2)$$

дает соотношения

$$\begin{aligned}a_3 &= 1 - e^{-\frac{hT}{2}} \\ b_3 &= \frac{2}{3} k e^{-\frac{hT}{2}} \left(1 + e^{-\frac{hT}{2}}\right)\end{aligned}\quad (54)$$

где $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{n}$ есть полупериод колебания; по этим уравнениям, когда a_3 и b_3 даны, h и k немедленно определятся.

Заметим, что уравнения (54) содержат первые два как частные случаи. Действительно, полагая $k=0$, получим (48), а положив $h=0$, получим (52).

Я вхожу в эти подробности не только для того, чтобы показать общий вывод известных уже результатов, но главным образом для того, чтобы показать применение пуассоновского метода разложения в ряды решений дифференциальных уравнений.

Как видно, эти выводы вполне сходятся с теоремою Ньютона, приведенной в гл. III книги „Качка корабля“.

Этот метод имеет большую важность во многих вопросах, связанных с динамикой корабля; достаточно упомянуть об исследовании качки при больших амплитудах, принимая во внимание истинный вид диаграммы остойчивости.

§ 12. Весьма замечателен случай, когда погашение не зависит от амплитуды; это имеет место для кораблей или моделей, снабженных водяными камерами. Систематические изыскания по этому вопросу делаются, но еще не окончены моим коллегой, профессором Бубновым, который и сообщил мне добытые уже им результаты.

1. Чтобы получить хорошее погашение водяной камерой, глубина воды в ней должна быть такова, чтобы время, потребное переносной волне Скот—Росселя для пробега длины камеры, расположенной поперек корабля, равнялось бы половине периода его полного колебания, или, что то же самое, периоду его простого колебания, так что, обозначая через b длину камеры, считаемую поперек корабля, и через v —скорость вышесказанной волны и через T —полный период, то эти количества должны быть связаны соотношением

$$\frac{T}{2} = \frac{b}{v}$$

2. Скорость переносной волны рассчитывается по известной формуле

$$v = \sqrt{g(h+f)}$$

где f есть высота волны, а h —глубина воды в камере.

3. Если глубина воды в камере регулируется по сказанному правилу, то погашение, даваемое камерой, не зависит от амплитуды размахов и есть величина постоянная.

4. Значение этой постоянной находится в прямой зависимости от количества воды, длины b , и в обратном отношении к водоизмещению корабля и метацентрической высоте; погашение увеличивается также по мере возвышения камеры над грузовой ватерлинией.

Опыты еще не кончены, эти результаты получены из наблюдений с маятниковым приспособлением; теперь они повторяются на модели с приспособленной систерной.

Ввиду того, что это имеет весьма большой интерес, эти исследования будут сообщены Институту самим профессором Бубновым.

Теоретическое объяснение постоянства погашения, которое проявляется в случае маятникового приспособления в наиболее чистой форме, таково: переносная волна, пройдя всю длину камеры, доходит до стенки и после удара в нее частью уничтожается, частью отражается. Действие этих ударов, вместе с переменою положения центра тяжести, происходящих периодически через равные промежутки времени, равные полупериоду маятника, уподобляется действию периодической силы с тем же периодом.

Тогда уравнение движения маятника будет вида

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = k \sin nt \quad (55)$$

интеграл которого, при начальных условиях $\theta = \theta_0$ и $\theta' = 0$, когда $t = 0$, будет

$$\theta = \theta_0 \cos nt + \frac{k}{n^2} \sin nt - \frac{k}{2n} t \cos nt \quad (56)$$

и видно, что в моменты

$$0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \text{ и т. д.}$$

соответствующие значения θ таковы:

$$\theta_0; -\left(\theta_0 - \frac{k\pi}{2n^2}\right); +\left(\theta_0 - 2\frac{k\pi}{2n^2}\right); -\left(\theta_0 - 3\frac{k\pi}{2n^2}\right) \text{ и т. д.}$$

которые показывают, что погашение постоянно и равно $\frac{k\pi}{2n^2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{T}{4}$, где $T = \frac{2\pi}{n}$ есть период полного колебания.

Опыт показывает, что когда наибольший угол отклонения не превосходит $\frac{k\pi}{2n^2}$, маятник приходит в покой и не переходит через прямое положение.

Движения модели с систерною подобны движению маятника, но явление не протекает в такой чистой форме, как это имеет место для маятника.

Подобные камеры были устроены на английском броненосце „Инфлексибл“.

§ 13. Из вышеизложенного следует, что каков бы ни был закон погашения колебаний на тихой воде, его всегда можно воспроизвести членами, введенными в дифференциальное уравнение движения корабля, и, следовательно, представлять аналитически, что имеет то преимущество, что влияние изменений каждого члена может быть тотчас оценено количественно, а не только качественно.

Если принять, что сопротивление воды колебанию корабля на волнении то же самое, как и на тихой воде, то можно тотчас составить уравнение движения корабля. Мы можем быть уверены, что такое предположение далеко от действительного; но, за неимением лучшего, приходится довольствоваться и этим предположением, обыкновенно и применяемым на практике.

Метода Пуассона, или способ последовательного приближения, легко доставит решения для уравнений, выше составленных; и так как они принимают простейшую форму в предположении, что сопротивление пропорционально первой степени скорости, то мы ограничимся этим случаем, который поясним на численном примере.

В этом случае уравнения движения корабля суть линейные, с постоянными коэффициентами, вида

$$u'' + 2hu' + n^2u = k \sin pt + m \cos pt \quad (57)$$

Их общий интеграл есть вида

$$u = e^{-ht} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + M \sin pt + N \cos pt \quad (58)$$

где M и N определяются из уравнений

$$(n^2 - p^2) M - 2hpN = k$$

$$2hpM + (n^2 - p^2) N = m$$

и

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2}$$

таким образом,

$$M = \frac{(n^2 - p^2) k + 2hpm}{(h^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}; \quad N = \frac{(n^2 - p^2) m - 2hpk}{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \quad (59)$$

Члены

$$e^{-ht} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t)$$

представляют так называемые „свободные“ колебания, а члены

$$M \sin pt + N \cos pt$$

— „вынужденные“ колебания; и в первом выражении, благодаря присутствию множителя e^{-ht} , „свободные“ колебания постепенно убывают и движение становится независимым от начальных условий и в конце концов состоит только из вынужденных колебаний.

Но эта независимость существует лишь в случае волнения, идеально правильного.

§ 14. Мы вывели следующие две системы уравнений движения корабля на волнении:

$$\frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = -\frac{2\pi r}{\lambda_1} \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - R_\xi \frac{1}{\rho g}$$

$$\frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = -\frac{2\pi r}{\lambda_2} \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - R_\eta \frac{1}{\rho g}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{g} \cdot \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + S_0 \zeta_0 = & \psi \cdot S_0 l + r \left(a'_0 - \frac{2\pi A'_0}{\lambda} \right) \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \\ & + r \left(b'_0 - \frac{2\pi B'_0}{\lambda} \right) \sin \frac{2\pi t}{\tau} \Big] - R_c \frac{1}{\rho g} \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют орбитальное движение центра тяжести корабля; следующие три уравнения определяют вращательное движение, т. е. качания корабля:

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + P(r_0 - a) \theta_1 = \\ = P(r_0 - a) \theta_0 \sin \alpha \left[N'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - M'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - L_R \\ B \frac{d^2 \psi}{dt^2} + P(R_0 - a) \psi = \\ = P(R_0 - a) \theta_0 \cos \alpha \left[K'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + L'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] + \\ + g \rho S_0 \zeta_0 - M_R \\ C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -P \theta_0 \left[P'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + Q'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right] - N_R \end{aligned} \quad (41')$$

Общие выражения и численные значения всех параметров для частного примера приведены выше; но прежде чем давать численные результаты их интегрирования, рассмотрим ту часть общего вопроса покойного В. Фруда, где он говорит: „Каково положение мгновенного равновесия тела, плавающего на волнении?“.

Чтобы получить это положение, стоит только положить в вышеприведенных уравнениях все члены, содержащие ускорения (вторые производные), равными нулю и принять, что сопротивления воды нет, ибо по предположению при мгновенном положении равновесия нет относительного движения корабля по отношению к волне.

Мы тотчас увидим, что первое, второе и шестое уравнения не могут быть удовлетворены никакими постоянными значениями ξ_0 ,

η_0 , ζ_0 , θ_1 , ψ , φ , определяющими положение корабля в пространстве. Это происходит оттого, что эти три уравнения не содержат в себе членов, соответствующих остойчивости, принуждающих корабль принимать определенное положение; этот факт станет сам собою очевидным, если обратить внимание на геометрическое значение переменных ξ_0 , η_0 и φ_0 .

Относительно прочих трех переменных, которые определяют возвышение центра тяжести над его средним положением ζ_0 и углы бокового наклона θ_1 и дифферента ψ , то эти переменные получают для каждого момента определенные частные значения, которые удовлетворяют уравнениям мгновенного равновесия, и эти положения представлены на диаграмме (фиг. 5) для различных курсовых углов.

Значение линий и букв, составление диаграммы объяснено на стр. 19 и не требует дальнейших объяснений.

Уравнения (41') дают также значения тех „ускоряющих сил, которые заставляют корабль принимать известное положение мгновенного равновесия или уклоняют корабль от него“ и, таким образом, дают возможность вычертить нечто подобное диаграмме остойчивости для всякого такого положения равновесия. Но такое суждение об остойчивости на волне было бы неполным. Для суждения об остойчивости необходимо не только знать восстанавливающий момент, надо знать и быстроту его изменения, которая пропорциональна метацентрической высоте.

Здесь, в наших выражениях (приближенных) члены второго и высших порядков отброшены; но эти члены в вычислении изменений восстанавливающего момента дадут уже члены первого порядка и произведут разницу в остойчивости на волне и на тихой воде.

Таким образом, для вычисления остойчивости на волнении надо иметь выражения, точные до величин второго порядка относительно углов наклона. Но это не все — корабль всегда находится в движении, и это должно быть принято в расчет. В сочинении Рауса „Advanced Dynamics“ есть все необходимое для изучения этого вопроса, имеющего большой практический интерес, ибо если происходят большие углы наклона и корабль с непо-

врежденным бортом опрокидывается, то наверное это случается не на тихой воде. Даже это краткое указание на сущность вопроса об „остойчивости на волнении“, как я его понимаю, показывает его сложность; так что решение этого вопроса со всеми деталями, которые он заслуживает по своей важности, потребовало бы записки еще гораздо большего размера, чем настоящая, и не входит в общий курс теории корабля.

§ 15. Если мы примем сопротивление воды пропорциональным первой степени скорости, то его влияние выразится в погашении „свободных“ колебаний, а „вынужденные“ почти не изменятся, будет ли сопротивление или нет; таким образом, для вертикальных колебаний, для килевой качки и для рыскания нам следует только рассчитать „вынужденные“ колебания.

Для боковой качки мы должны знать ту систему волн, от которой она происходит, потому что, как выше было указано, совместное действие системы волн зависит от того порядка, в каком они одна за другой следуют, а не от их средних размеров и периода, знание которых достаточно для суждения о других составляющих колебаний корабля, для которых сопротивление сравнительно велико и „свободные“ колебания погашаются тотчас по их появлении. Когда система волн не дана, то можно рассчитать наибольшую амплитуду размаха по способу, развитому Р. Фрудом в вышеупомянутой записке.

Этот способ требует знания коэффициента погашения и эффективного волнового склона, иначе — амплитуды „вынужденных“ колебаний. Мы дадим здесь только последнюю и при вычислении ее значений пренебрежем действием сопротивления, от которого она почти не зависит, пока период корабля и период волны чувствительно разнятся друг от друга.

Мы рассмотрим три случая: 1) корабль не имеет хода; 2) корабль идет со скоростью 8 узлов; 3) корабль идет со скоростью 10 узлов.

Удобно соединить движение ξ_0 и η_0 и положить

$$\sigma_0 = \xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha$$

тогда c_0 есть горизонтальное колебание центра тяжести корабля в плоскости, перпендикулярной гребням волн; замечая, что $\tau^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}$, получим:

$$c_0 = \frac{r}{V_0} \left[B'_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - A'_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

и, полагая $\frac{S_0 g}{V_0} = n^2$, получим (пренебрегая в первом приближении членом $S_0 I(\psi)$):

$$\zeta_0 = r \left[m''_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + n''_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

где

$$m''_0 = \frac{n^2}{n^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \left(a'_0 - \frac{2\pi}{\lambda} A'_0 \right) \frac{1}{S_0}; \quad n''_0 = \frac{n^2}{n^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \cdot \frac{b'_0 - \frac{2\pi}{\lambda} B_0}{S_0}$$

для нашего случая

$$r = 2.5 \text{ м}; \quad n^2 = 2.302 \frac{1}{\text{сек.}^2}; \quad \tau = 9 \text{ сек.}$$

Значения коэффициентов вычислены в §§ 8 и 9, и мы получим немедленно для c_0 и ζ_0 результаты, сведенные в следующей таблице (стр. 89).

Рассчитывая килевую качку ψ , заметим, что, положив

$$\frac{P(R_0 - a)}{B} = q^2$$

получим формулу

$$\psi = \frac{q^2}{q^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \Theta_0 \cos \alpha \left[K'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + L'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right]$$

которая может заменить формулы (59), когда коэффициент сопротивления h мал в сравнении с $q^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}$, как это имеет место, когда корабль и волна не синхронны.

В нашем случае $q^2 = 2.16$ (как высчитано в моей записке о килевой качке; Trans. I. N. A., т. XXXVII), $2h$ есть почти 0.26 и разность между этим значением и истинным не более 2%.
 Таким манером получим следующую таблицу:

„Вынужденные“ колебания корабля на волнении.
 Скорость корабля равна 0

α (град.)	$\sigma_0 = a \cos \frac{2\pi t}{9} + b \sin \frac{2\pi t}{9}$		$\zeta_0 = c \cos \frac{2\pi t}{9} + d \sin \frac{2\pi t}{9}$		$\theta_1 = e \cos \frac{2\pi t}{9} + f \sin \frac{2\pi t}{9}$		$\psi = g \cos \frac{2\pi t}{9} + h \sin \frac{2\pi t}{9}$		$\varphi = k \cos \frac{2\pi t}{9} + l \sin \frac{2\pi t}{9}$	
	a (м)	b (м)	c (м)	d (м)	e	f	g	h	k	l
0	-0.09	-1.10	1.01	-0.18	0	0	-4°68	-0°22	0	0
11 ¹ / ₄	-0.09	-1.14	1.11	-0.18	+0°44	-0°44	-4.70	-0.19	+0°66	-0°00
22 ¹ / ₂	-0.09	-1.23	1.20	-0.18	+0.85	-0.91	-4.68	-0.15	+1.27	-0.01
33 ³ / ₄	-0.09	-1.37	1.41	-0.18	+1.12	-1.36	-4.67	-0.01	+1.82	-0.03
45	-0.09	-1.58	1.68	-0.18	+1.36	-1.86	-4.55	+0.14	+2.08	-0.07
56 ¹ / ₄	-0.07	-1.80	2.01	-0.17	+1.34	-2.68	-3.84	+0.35	+2.08	-0.13
67 ¹ / ₂	-0.04	-2.01	2.32	-0.12	+0.98	-3.12	-3.12	+0.56	+1.54	-0.19
78 ³ / ₄	-0.03	-2.11	2.45	-0.09	+0.69	-3.32	-1.97	+0.65	+1.20	-0.23
90	0	-2.18	2.58	0	0	-3.48	0	+0.75	0	-0.25
101 ¹ / ₄	+0.03	-2.11	2.45	+0.09	-0.69	-3.32	+1.97	+0.65	-1.20	-0.23
112 ¹ / ₂	+0.04	-2.01	2.32	+0.12	-0.98	-3.12	+3.12	+0.56	-1.54	-0.19
123 ³ / ₄	+0.07	-1.80	2.01	+0.17	-1.34	-2.68	+3.84	+0.35	-2.08	-0.13
135	+0.09	-1.58	1.68	+0.18	-1.36	-1.86	+4.55	+0.14	-2.08	-0.07
146 ¹ / ₄	+0.09	-1.37	1.41	+0.18	-1.12	-1.36	+4.67	-0.01	-1.82	-0.03
157 ¹ / ₂	+0.09	-1.23	1.20	+0.18	-0.85	-0.91	+4.68	-0.15	-1.27	-0.01
168 ³ / ₄	+0.09	-1.14	1.11	+0.18	-0.44	-0.44	+4.70	-0.19	-0.66	-0.00
180	+0.09	-1.10	1.01	+0.18	0	0	+4.68	-0.22	0	0

Период волны есть 9 сек.; период боковой качки принят равным 15 сек.; откуда

$$n^2 = \frac{P(r_0 - a)}{A} = \frac{4\pi^2}{22.5}.$$

Период килевой качки есть 4.27 сек.; откуда

$$q^2 = \frac{P(R_0 - a)}{B} = 2.16$$

и

$$C = B = 318\,000 \text{ тм} \cdot \text{сек}^2.$$

Когда корабль идет со скоростью v , то стоит только заменить истинный период τ волны в формулах кажущимся

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\tau} - v \cos \alpha} = \tau \frac{\lambda}{\lambda - v \tau \cos \alpha}$$

и получим следующую таблицу:

„Вынужденные“ колебания корабля со скоростью 8 узлов. Элементы корабля и волны те же, что и выше

α (град.)	τ_1 (сек.)	$\sigma_0 = a \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + b \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\zeta_0 = c \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + d \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\theta_1 = e \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + f \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\psi = g \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + h \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\varphi = k \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + l \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$	
		a (м)	b (м)	c (м)	d (м)	e	f	g	h	k	l
0	12.70	-0.18	-2.20	0.89	-0.16	0°	-0°	-4°13	-0°19	+1°30	0°
11 ¹ / ₄	12.50	-0.17	-2.22	0.98	-0.16	2.94	-2.94	-4.15	-0.17	2.35	-0.01
22 ¹ / ₂	12.25	-0.17	-2.27	1.07	-0.16	3.05	-3.28	-4.17	-0.13	3.15	-0.02
33 ³ / ₄	11.85	-0.16	-2.37	1.27	-0.17	3.30	-4.02	-4.22	-0.01	3.37	-0.04
45	11.27	-0.14	-2.47	1.55	-0.17	3.14	-4.30	-4.15	+0.13	2.96	-0.11
56 ¹ / ₄	10.76	-0.10	-2.56	1.87	-0.17	2.52	-5.04	-3.54	+0.32	1.93	-0.18
67 ¹ / ₂	10.17	-0.05	-2.55	2.21	-0.12	1.50	-4.72	-2.95	+0.33	1.38	-0.24
78 ³ / ₄	9.60	-0.03	-2.40	2.38	-0.09	0.85	-3.85	-1.90	+0.62	0	-0.25
90	9.00	0	-2.18	2.58	0	0	-3.48	0.0	+0.25	1.08	-0.25
101 ¹ / ₄	8.55	+0.03	-1.90	2.52	+0.09	-0.59	-2.85	+2.03	+0.67	1.25	-0.23
112 ¹ / ₂	8.10	+0.03	-1.62	2.48	+0.13	-0.73	-2.30	+3.38	+0.61	1.54	-0.19
123 ³ / ₄	7.75	+0.05	-1.34	2.21	+0.19	-0.87	-1.74	+4.30	+0.39	1.44	-0.15
135	7.50	+0.06	-1.09	1.92	+0.20	-0.79	-1.08	+5.50	+0.16	1.18	-0.09
146 ¹ / ₄	7.30	+0.06	-0.89	1.66	+0.21	-0.60	-0.73	+5.70	-0.01	1.18	-0.04
157 ¹ / ₂	7.13	+0.05	-0.77	1.44	+0.22	-0.44	-0.46	+5.70	-0.18	0.80	-0.02
168 ³ / ₄	7.05	+0.05	-0.69	1.33	+0.22	-0.22	-0.22	+5.75	-0.23	0.41	-0.01
180	7.00	+0.05	-0.66	1.21	+0.22	0	0	+5.80	-0.26	0	0

Надо заметить, что абсолютный путь центра тяжести в пространстве, когда корабль идет и качается, есть спиралеобразная линия, и координаты σ_0 и ζ_0 определяют положение центра тяжести на вертикальной плоскости, двигающейся поступательно со скоростью корабля, оставаясь параллельной самой себе и перпендикулярной гребням волн.

„Вынужденные“ колебания того же корабля при 10 узлах

α	τ_1 (сек.)	$\sigma_0 = a \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + b \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\zeta_0 = c \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + d \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\theta_1 = e \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + f \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\psi = g \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + h \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$		$\varphi = k \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + l \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$	
		a (м)	b (м)	c (м)	d (м)	e	f	g	h	k	l
0	14.05	-0.22	-2.70	0.88	-0.16	0°	0°	-4°07	-0°19	0°	0°
11 ¹ / ₄	13.9	-0.22	-2.75	0.97	-0.16	4.90	-4.90	-4.13	-0.17	1.59	0
22 ¹ / ₂	13.5	-0.20	-2.77	1.06	-0.16	6.40	-6.85	-4.16	-0.14	2.35	-0.02
33 ³ / ₄	12.8	-0.18	-2.79	1.26	-0.16	5.50	-6.18	-4.20	0.00	3.70	-0.06
45	12.05	-0.16	-2.85	1.51	-0.16	4.50	-6.15	-4.15	+0.13	3.75	-0.12
56 ¹ / ₄	11.25	-0.11	-2.81	1.85	-0.15	3.02	-6.05	-3.55	+0.32	3.25	-0.20
67 ¹ / ₂	10.5	-0.05	-2.75	2.20	-0.11	1.67	-5.30	-2.95	+0.52	2.10	-0.26
78 ³ / ₄	9.7	-0.03	-2.45	2.32	-0.09	0.88	-7.25	-1.90	+0.62	1.39	-0.27
90	9.0	0.0	-2.18	2.58	0	0	-3.48	0	+0.75	0	-0.25
101 ¹ / ₄	8.4	+0.03	-1.84	2.57	+0.03	-0.57	-2.73	+2.05	+0.67	-1.04	-0.20
112 ¹ / ₂	7.9	+0.03	-1.55	2.55	+0.09	-0.67	-2.12	+3.43	+0.61	-1.19	-0.15
123 ³ / ₄	7.5	+0.05	-1.24	2.30	+0.19	-0.80	-1.60	+4.44	+0.40	-1.44	-0.09
135	7.2	+0.06	-1.00	2.00	+0.22	-0.72	-0.98	+5.56	+0.16	-1.32	-0.04
146 ¹ / ₄	6.9	+0.05	-0.81	1.75	+0.22	-0.54	-0.65	+5.84	-0.01	-1.08	-0.02
157 ¹ / ₂	6.80	+0.05	-0.70	1.52	+0.23	-0.38	-0.41	5.95	-0.18	-0.22	-0.01
168 ³ / ₄	6.66	+0.05	-0.63	1.41	+0.22	-0.19	-0.19	6.15	-0.25	-0.36	0.00
180	6.62	+0.05	-0.59	1.31	+0.22	0	0	6.20	-0.29	0.00	0

Эти две таблицы, а также диаграмма (фиг. 2), их представляющая наглядно, показывают, как изменяется качка корабля,

когда его скорость и курс меняются. Надо, однако, помнить, что здесь представлены только „вынужденные“ колебания, но кроме них для боковой качки сохраняются и свободные колебания, так как волнение неоднобразно. Амплитуды „свободных“ колебаний могут быть раза в полтора или два более „вынужденных“ и зависят от действительного характера волнения; они могли бы быть наперед рассчитаны лишь в том случае, когда была бы задана самая система волн в их действительной неоднобразной последовательности.

Другой метод подобных расчетов дан Р. Фрудом в записке „On Non Uniform Rolling“. Эта записка помещена в изданиях Института, и мы не имеем нужды повторять ее здесь.

§ 16. В. Фруд окончил свою записку „On the Rolling of Ships“ следующими словами: „Когда вновь построенный корабль выходит в море, то его строитель следит за его качествами на море с душевным беспокойством и неуверенностью, как будто бы это был воспитанный и выращенный им зверь, а не им самим обдуманное и исполненное сооружение, которого качества должны бы быть ему вперед известны в силу самых основ, положенных при составлении проекта“.

Главная цель моих исследований была дать способы рассчитать движение корабля на волнении, а значит и его мореходные качества. Очевидно, что изложенный способ дает возможность решать все вопросы, которые являются при рассмотрении влияния на мореходные качества корабля, например перемен расположения грузов, изменения дифферента и тому подобные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОРАБЛЯ, ИМЕЮЩЕГО ПРОБОИНУ

§ 1. При разработке проекта корабля главные переборки распределяются соответственно назначению тех отсеков, которые этими переборками один от другого разделяются, как например — подбашенные, котельные, машинные и т. д.

После того как переборки распределены, необходимо проверить, остается ли корабль плавать, получив в один или два смежных отсека подводную пробоину от мины или авиабомбы.

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо, во-первых, определить положение равновесия корабля, имеющего поврежденные отделения затопленными, и, во-вторых, исследовать устойчивость такого вообще кособокого положения равновесия; при этом необходимо рассматривать лишь положение равновесия, ближайшее к прямому, т. е. когда верхняя палуба корабля находится целиком или частично над водой, а не то, когда корабль плавает вверх килем.

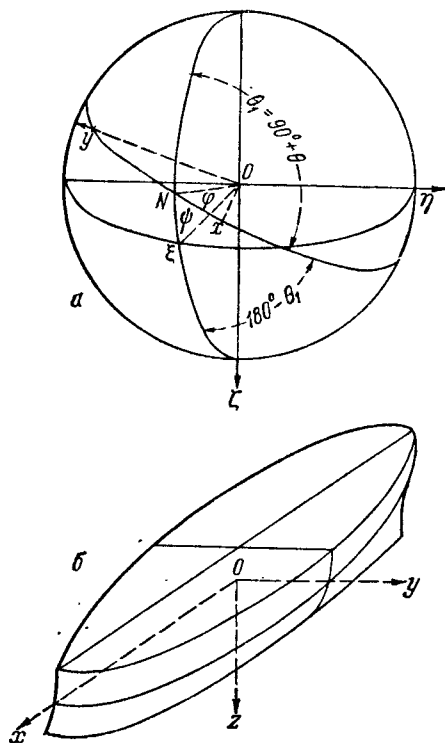
§ 2. Для решения каждого из этих вопросов применим аналитический метод, сопровождаемый необходимыми графическими построениями.

Возьмем в корабле следующие координатные плоскости, с ним неизменно связанные:

- а) диаметральную плоскость;
- б) плоскость грузовой ватерлинии при прямом положении корабля, не имеющего повреждений (накрашенную грузовую);

в) плоскость мидель-шпангоута.

Эти плоскости обозначим соответственно xoz , $хоу$, $уoz$ (фиг. 1, б). Очевидно, что при таком выборе начало координат лежит в точке o



Фиг. 1.

Эйлеровыми углами ψ , θ , φ , причем систему этих углов берем „корабельную“, а не „астрономическую“: расположение осей в корабле показано на фиг. 1, б; расположение Эйлеровых углов на фиг. 1, а, так что угол ψ приблизительно равен углу дифферента, угол $\theta_1 = 90^\circ + \theta$, причем θ есть угол крена и угол φ есть рыскание на курсе.

пересечения этих трех плоскостей. Положительную ось $ох$ направим в нос, положительную ось $оз$ вниз и положительную ось $оу$ к левому борту, так что крен будет считаться положительным на левую сторону и угол дифферента положительным, когда ось $ох$ (нос) поднята вверх.

Соответственно этим осям, неизменным в корабле, возьмем в пространстве неизменные оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, которые при прямом положении равновесия и покое неповрежденного корабля совпадают соответственно с осями $ох$, $оу$, $оз$.

Для краткости речи оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ будем называть абсолютными, оси $ох$, $оу$, $оз$ — относительными.

Положение корабля вообще будет определяться координатами ξ_0 , η_0 , ζ_0 точки o и тремя

Связь между относительными и абсолютными координатами устанавливается на основании следующей таблички косинусов между соответствующими осями:

	x	y	z
ξ	a_1	b_1	c_1
η	a_2	b_2	c_2
ζ	a_3	b_3	c_3

(1)

Все эти девять косинусов выражаются через Эйлеровы углы следующими формулами, которые, как это подробно показано в учении о качке корабля, получаются в результате применения основной формулы сферической тригонометрии к сферическим треугольникам $N\xi x$, $N\xi y$, $N\xi z$; $N\eta x$, $N\eta y$, $N\eta z$; $N\zeta x$, $N\zeta y$, $N\zeta z$, так что будет

$$\begin{aligned}
 \cos(x, \xi) &= a_1 = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta_1 \\
 \cos(x, \eta) &= a_2 = \sin \varphi \sin \theta_1, \\
 \cos(x, \zeta) &= a_3 = -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta_1 \\
 \cos(y, \xi) &= b_1 = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta_1 \\
 \cos(y, \eta) &= b_2 = \cos \varphi \sin \theta_1 \\
 \cos(y, \zeta) &= b_3 = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta_1 \\
 \cos(z, \xi) &= c_1 = \sin \psi \sin \theta_1 \\
 \cos(z, \eta) &= c_2 = \cos \theta_1 \\
 \cos(z, \zeta) &= c_3 = \cos \psi \sin \theta_1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

причем $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta$, где θ есть приблизительно угол крена левым бортом вниз.

Стоит только сделать эту замену, и получим выражения косинусов $a_1, a_2, \dots, c_3$ через углы ψ, θ и φ , а именно:

$$\begin{aligned}
 \cos(x, \xi) &= a_1 = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta \\
 \cos(x, \eta) &= a_2 = \sin \varphi \cos \theta \\
 \cos(x, \zeta) &= a_3 = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta \\
 \cos(y, \xi) &= b_1 = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta \\
 \cos(y, \eta) &= b_2 = \cos \varphi \cos \theta \\
 \cos(y, \zeta) &= b_3 = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\
 \cos(z, \xi) &= c_1 = \sin \psi \cos \theta \\
 \cos(z, \eta) &= c_2 = -\sin \theta \\
 \cos(z, \zeta) &= c_3 = \cos \psi \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что в нашем случае можно без ущерба общности положить

$$\xi_0 = 0; \quad \eta_0 = 0; \quad \varphi = 0 \tag{4}$$

ибо осадка корабля, имеющего данную пробоину, его крен и дифферент не зависят от места корабля на море и его курса.

Тогда формулы (3) упрощаются и будут

$$\begin{aligned}
 \cos(x, \xi) &= a_1 = \cos \psi \\
 \cos(x, \eta) &= a_2 = 0 \\
 \cos(x, \zeta) &= a_3 = -\sin \psi \\
 \cos(y, \xi) &= b_1 = \sin \psi \sin \theta \\
 \cos(y, \eta) &= b_2 = \cos \theta \\
 \cos(y, \zeta) &= b_3 = \cos \psi \sin \theta \\
 \cos(z, \xi) &= c_1 = \sin \psi \cos \theta \\
 \cos(z, \eta) &= c_2 = -\sin \theta \\
 \cos(z, \zeta) &= c_3 = \cos \psi \cos \theta
 \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этими последними формулами.

При условиях $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ формулы перехода от относительных координат к абсолютным и наоборот будут

$$\begin{aligned}\xi &= a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta &= a_2x + b_2y + c_2z\end{aligned}\quad (6)$$

$$\zeta = \zeta_0 + a_3x + b_3y + c_3z$$

и

$$\begin{aligned}x &= a_1\xi + a_2\eta + a_3(\zeta - \zeta_0) \\ y &= b_1\xi + b_2\eta + b_3(\zeta - \zeta_0) \\ z &= c_1\xi + c_2\eta + c_3(\zeta - \zeta_0)\end{aligned}\quad (7)$$

Эта сводка чисто геометрических формул приведена здесь для удобства справок и пользования этими формулами, не выводя их всякий раз заново.

§ 3. Перейдем теперь к первой части нашей задачи, т. е. к определению положения равновесия поврежденного корабля.

Пусть центр тяжести G_0 неповрежденного корабля имеет координаты x_0 , 0 , z_0 и положим, что вследствие пробоины в корабле затоплены одно или несколько отделений, закрытых сверху, общий объем которых v_1 и положение общего центра тяжести которых есть x'_1 , y'_1 , z'_1 , так что затопление этих отделений равносильно приему твердого груза, вес коего $p_1 = qv_1$ (q есть вес 1 м³ или 1 куб. фута воды, смотря по тому, в каких мерах ведется расчет), в точку (x'_1, y'_1, z'_1) .

Тогда новое положение центра тяжести G_1 будет определяться координатами $(x_1 + g'_1)$, f'_1 , $(z_0 + h'_1)$, причем, если $P_0 = qV_0$ есть вес корабля в неповрежденном состоянии и V_0 его водоизмещение, то будет

$$P_0x_0 + p_1x'_1 = (P_0 + p_1)(x_0 + g'_1)$$

$$p_1y'_1 = (P_0 + p_1)f'_1$$

$$P_0z_0 + p_1z'_1 = (P_0 + p_1)(z_0 + h'_1)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}x_0 + g_1' &= \frac{P_0 x_0 + p_1 x_1'}{P_0 + p_1} = \frac{V_0 x_0 + v_1 x_1'}{V_0 + v_1} \\f_1' &= \frac{p_1 y_1'}{P_0 + p_1} = \frac{v_1 y_1'}{V_0 + v_1} \\z_0 + h_1' &= \frac{P_0 z_0 + p_1 z_1'}{P_0 + p_1} = \frac{V_0 z_0 + v_1 z_1'}{V_0 + v_1}\end{aligned}\quad (8)$$

Таким путем определяются координаты центра тяжести G ; от ζ_0 , ψ и θ они не зависят.

Кроме „глухих“ отсеков, могут быть затоплены отсеки, *открытые* сверху, т. е. такие, что количество воды в них изменяется при изменении посадки корабля.

Для расчета, как известно, надо такой отсек, взятый по *накрашенную* ватерлинию корабля, вычитать из первоначального водоизмещения V_0 корабля. Обозначая через v_2 совокупный объем (по *накрашенную* ватерлинию) всех таких отсеков, через x_2' , y_2' , z_2' — положение центра тяжести этого объема и через x_0 , 0 , $z_0 + a$ — координаты центра величины C_0 неповрежденного корабля, по формулам

$$\begin{aligned}V_0 x_0 - v_2 x_2' &= (V_0 - v_2) x_0' \\- v_2 y_2' &= (V_0 - v_2) y_0' \\V_0 (z_0 + a) - v_2 z_2' &= (V_0 - v_2) z_0'\end{aligned}\quad (9)$$

найдем координаты x_0' , y_0' , z_0' точки C_0' центра величины объема $V_0 - v_2$.

Очевидно, что корабль не будет плавать в первоначальном прямом положении, при котором

$$\zeta_0 = 0; \quad \psi = 0; \quad \theta = 0$$

а погрузится по некоторую новую ватерлинию $A'B'$ и примет положение, определяемое значениями ζ_0 , ψ , θ . При этом в воду вой-

дет. такой добавочный объем U , при котором будут соблюдены условия равновесия корабля, а именно: 1) что его вес $P_0 + p_1$ равен силе поддержания, т. е. $q(V_0 - v_2 + U)$, и 2) что центр тяжести лежит на одной отвесной линии с центром величины C_1 объема $(V_0 - v_2 + U)$.

Объем U зависит от величин ζ_0, ψ, θ так же, как и координаты его центра тяжести. Чтобы это наглядно показать, будем, где нужно, писать $U(\zeta_0, \psi, \theta)$ вместо U и обозначим через $X_1(\zeta_0, \psi, \theta)$, $Y_1(\zeta_0, \psi, \theta)$, $Z_1(\zeta_0, \psi, \theta)$ координаты центра величины C_1 корабля в наклонном положении.

Условия равновесия будут выражаться следующими равенствами:

$$[V_0 - v_2 + U(\zeta_0, \psi, \theta)]q = P_0 + p_1 = q(V_0 + v_1)$$

или иначе

$$U(\zeta_0, \psi, \theta) = v_1 + v_2 \quad (I)$$

Составим абсолютные координаты ξ_1, η_1 центра тяжести G_1 :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1(x_0 + g'_1) + b_1f'_1 + c_1(z_0 + h'_1) \\ \eta_1 &= a_2(x_0 + g'_1) + b_2f'_1 + c_2(z_0 + h'_1) \end{aligned} \quad (10)$$

и центра величины C_1 :

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= a_1X_1 + b_1Y_1 + c_1Z_1 \\ H_1 &= a_2X_1 + b_2Y_1 + c_2Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Тогда условия, чтобы линия C_1G_1 была отвесной, выразятся уравнениями

$$E_1 = \xi_1 \quad (II)$$

$$H_1 = \eta_1 \quad (III)$$

в которых обе части зависят от неизвестных ζ_0, ψ, θ .

Общее выражение этой зависимости будет весьма сложное, поэтому в каждом частном случае надо применять для определения значений неизвестных ζ_0, ψ и θ метод последовательных приближений, не развивая в явном виде вышеупомянутой зависимости; для

этого необходимо сперва найти хотя бы грубое исходное приближение, а затем искать к нему последовательные поправки, которые будут становиться все меньше и меньше.

§ 4. Требуемое весьма грубое исходное приближение найдем, предположив, что обводы корабля при накрашенной ватерлинии A_0B_0 прямостенные и простираются вверх и вниз до действующей ватерлинии A_1B_1 , какое бы положение эта ватерлиния ни занимала.

В этом предположении цилиндричности действующих обводов уравнения (I), (II) и (III) принимают весьма простой аналитический вид, из которого исходные значения

$$\zeta_0 = \zeta_{00}; \quad \psi = \psi_0 \quad \text{и} \quad \theta = \theta_0 \quad (12)$$

легко находятся.

Итак, нам надо выразить величины U , X_1 , Y_1 , Z_1 в функции ζ_0 , ψ и θ , предполагая обводы цилиндрическими, перпендикулярными к плоскости накрашенной ватерлинии A_0B_0 .

Вообразим, что площадь накрашенной ватерлинии подразделена на элементарные бесконечно малые площадки σ ; объем U ограничен снизу плоскостью накрашенной ватерлинии A_0B_0 , которую для нашего грубого исходного приближения будем считать неповрежденной; сверху же этот объем ограничен действующей ватерлинией A_1B_1 .

Пусть координаты элементарной площадки $d\sigma$ суть x , y , 0; координаты соответствующей ей площадки действующей ватерлинии A_1B_1 будут x , y , z , где z есть ордината плоскости A_1B_1 , соответствующая x , y ; тогда объем элементарной призмы будет $z d\sigma$ и объем U будет ¹

$$U = - \sum_{s_0} z d\sigma = - \iint_{s_0} z dx dy \quad (13)$$

где S_0 есть площадь ватерлинии A_0B_0 .

¹ Когда ордината z действующей ватерлинии положительная, то соответствующая точка лежит ниже ватерлинии A_0B_0 , и, значит, элементарная призма $z d\sigma$ выходит из воды, отсюда знак минус (—) перед суммой и интегралами в формулах (13)—(16).

Моменты этого объема относительно плоскостей xoz , yoz и xoy будут

$$U_{x_2} = - \sum_{S_0} xz d\sigma = - \iint_{S_0} xz dx dy \quad (14)$$

$$U_{y_2} = - \sum_{S_0} yz d\sigma = - \iint_{S_0} yz dx dy \quad (15)$$

$$U_{z_2} = \sum_{S_0} \frac{1}{2} z^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{S_0} z^2 dx dy \quad (16)$$

Уравнение действующей ватерлинии в абсолютных координатах есть

$$\zeta = 0 \quad (17)$$

Но мы имеем вообще [формула (6)]

$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z + \zeta_0$$

следовательно, уравнение плоскости A_1B_1 в относительных координатах будет

$$-z = \frac{1}{c_3} (\zeta_0 + a_3x + b_3y) \quad (18)$$

Заметив, что интегрирование по всей площади S_0 равносильно интегрированию по переменной x от $x = -L$ до $x = +L$, где L есть полудлина корабля, и интегрированию по переменной y от $-y_0$ до $+y_0$, где y_0 есть ордината накрашенной ватерлинии, соответствующая абсциссе, получим:

$$\begin{aligned} c_3 U = \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} (a_3x + b_3y + \zeta_0) dy = 2a_3 \int_{-L}^{+L} y_0 x dx + \\ + 2\zeta_0 \int_{-L}^{+L} y_0 dx \end{aligned}$$

Но $2 \int_{-L}^{+L} y_0 dx = S_0$ равно площади ватерлинии A_0B_0 , $2 \int_{-L}^{+L} xy_0 dx = S_0 J_0$ равно статическому моменту S_0 относительно миделя.

Таким образом, имеем:

$$c_3 U = \zeta_0 S_0 + a_3 S_0 l_0 \quad (19)$$

Отсюда на основании уравнения (I) имеем:

$$\zeta_0 = \frac{v_1 + v_2}{S_0} c_3 - a_3 l_0$$

На основании формул (5)

$$c_3 = \cos \psi \cos \theta; \quad a_3 = -\sin \psi$$

и получим:

$$\zeta_0 = \frac{v_1 + v_2}{S_0} \cos \psi \cos \theta + l_0 \sin \psi \quad (I')$$

Заметим, что ζ_0 считается положительным по оси $O\zeta$ вниз; значит, когда ζ_0 положительное, то точка o лежит ниже точки O , т. е. накрашенная ватерлиния $A_0 B_0$ ниже действующей $A_1 B_1$.

Затем имеем выражения моментов:

$$\begin{aligned} c_3 U x_2 = \iint_{S_0} (a_3 x + b_3 y + \zeta_0) x dx dy &= \int_{-L}^{+L} x dx \int_{-y_0}^{+y_0} (a_3 x + \\ &+ b_3 y + \zeta_0) dy = 2a_3 \int_{-L}^{+L} x^2 y_0 dx + 2\zeta_0 \int_{-L}^{+L} x y_0 dx = a_3 J_0 + S_0 l_0 \zeta_0 \end{aligned}$$

причем положено $J_0 = 2 \int_{-L}^{+L} x^2 y_0 dx$ равно моменту инерции площади S_0 около поперечной оси;

$$\begin{aligned} c_3 U y_2 &= \iint_{S_0} (a_3 x + b_3 y + \zeta_0) y dy dx = \\ &= \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} (a_3 x + b_3 y + \zeta_0) y dy = \frac{2}{3} b_3 \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx = b_3 I_0 \end{aligned}$$

причем положено $I_0 = \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx$ равно моменту инерции площади S_0 около продольной оси;

$$\begin{aligned} 2c_3 U z_2 = \iint_{S_0} (a_3 x + b_3 y + \zeta_0)^2 dy = \int_{-L}^{+L} dx \int_{-y_0}^{+y_0} (a_3^2 x^2 + b_3^2 y^2 + \\ + \zeta_0^2 + 2a_3 b_3 xy + 2a_3 x \zeta_0 + 2b_3 y \zeta_0) dy = 2 \int_{-L}^{+L} [a_3^2 x^2 y_0 + \\ + \frac{1}{3} b_3^2 y_0^3 + \zeta_0^2 y_0 + 2a_3 \zeta_0 x y_0] dx = a_3^2 J_0 + b_3^2 I_0 + \zeta_0^2 S_0 + 2a_3 \zeta_0 S_0 l_0 \end{aligned}$$

Итак, имеем формулы

$$\begin{aligned} c_3 U &= \zeta_0 S_0 + a_3 S_0 l_0 \\ c_3 U x_2 &= a_3 J_0 + S_0 l_0 \zeta_0 \\ c_3 U y_2 &= b_3 I_0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$c_3 U z_2 = \frac{1}{2} (a_3^2 J_0 + b_3^2 I_0 + \zeta_0^2 S_0) + a_3 \zeta_0 S_0 l_0$$

причем

$$\begin{aligned} J_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} x^2 y_0 dx; & I_0 &= \frac{2}{3} \int_{-L}^{+L} y_0^3 dx \\ S &= 2 \int_{-L}^{+L} y_0 dx; & S_0 l_0 &= 2 \int_{-L}^{+L} x y_0 dx \end{aligned} \quad (21)$$

Все эти интегралы, относящиеся к грузовой ватерлинии $A_0 B_0$, обыкновенно имеются вычисленными вместе с основными элементами корабля, т. е. его объемным водоизмещением V_0 и координатами центра величины C_0 при прямом неповрежденном положении корабля.

Координаты центра величины C_0 неповрежденного корабля за вычетом объема v_2 суть x'_0 , y'_0 , z'_0 и определяются формулами (9); когда же в воду войдет еще объем U , то центр

величины придет в точку C_1 , координаты которой X_1, Y_1, Z_1 определяются равенствами

$$\begin{aligned}(V_0 - v_2 + U) X_1 &= (V_0 - v_2) x'_0 + Ux_2 \\ (V_0 - v_2 + U) Y_1 &= (V_0 - v_2) y'_0 + Uy_2 \\ (V_0 - v_2 + U) Z_1 &= (V_0 - v_2) z'_0 + Uz_2\end{aligned}\quad (22)$$

Абсолютные координаты центра величины C_1 будут

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1 \\ H_1 &= 0 + b_2 Y_1 + c_2 Z_1\end{aligned}\quad (23)$$

На основании формул (5), (20), (22) уравнения равновесия

$$U - (v_1 + v_2) = 0 \quad (I)$$

$$\Xi_1 - \xi_1 = 0 \quad (II)$$

$$H_1 - \eta_1 = 0 \quad (III)$$

выразились бы явно через неизвестные ζ_0, ψ и θ .

Как видно даже в нашем простейшем предположении, эти выражения были бы сложны, поэтому, не развивая их подробно, постараемся эти уравнения упростить.

Из уравнения (I) следует

$$U = v_1 + v_2 \quad (I')$$

и первое из уравнений (20) дает

$$\zeta_0 = c_3 \frac{v_1 + v_2}{S_0} - a_3 I_0 \quad (24)$$

Таким образом, величина ζ_0 становится известной, или, точнее говоря, выражается через ψ и θ и могла бы быть из уравнений (II) и (III) исключена.

На основании того же равенства (I') и уравнений (20) уравнения (22) принимают вид

$$\begin{aligned}(V_0 + v_1) X_1 &= (V_0 - v_2) x'_0 + \frac{1}{c_3} (a_3 J_0 + S_0 I_0 \zeta_0) \\(V_0 + v_1) Y_1 &= (V_0 - v_2) y'_0 + \frac{b_3}{c_3} I_0 \\(V_0 + v_1) Z_1 &= (V_0 - v_2) z'_0 + \frac{1}{c_3} \left[\frac{1}{2} (a_3^2 J_0 + \right. \\&\quad \left. + b_3^2 I_0 + \zeta_0^2 S_0) + a_3 S_0 I_0 \zeta_0 \right]\end{aligned}\quad (25)$$

Будем сперва рассматривать величины ζ_0 , ψ и θ как малые; на основании формул (5) получим следующую табличку косинусов:

	x	y	z
ξ	1	0	ψ
η	0	1	$-\theta$
ζ	$-\psi$	θ	1

(*)

на основании которой уравнения (25) будут

$$\begin{aligned}(V_0 + v_1) X_1 &= (V_0 - v_2) x'_0 - J_0 \psi + S_0 I_0 \zeta_0 \\(V_0 + v_1) Y_1 &= (V_0 - v_2) y'_0 + \theta I_0 \\(V_0 + v_1) Z_1 &= (V_0 - v_2) z'_0 - \psi S_0 I_0 \zeta_0\end{aligned}\quad (26)$$

Подставив эти значения в уравнения (23), (24) и удерживая в них лишь члены первого порядка, получим на основании таблицы (*):

$$\begin{aligned}(V_0 + v_1) E_1 &= (V_0 - v_2) x'_0 - J_0 \psi + S_0 I_0 \zeta_0 + \psi (V_0 - v_2) z'_0 \\(V_0 + v_1) H_1 &= (V_0 - v_2) y'_0 + \theta I_0 + \theta (V_0 - v_2) z'_0 \\ \zeta_0 S_0 &= (v_1 + v_2) + I_0 S_0 \psi\end{aligned}\quad (**)$$

Таким образом, уравнения (II) и (III) будут

$$(V_0 - v_2) x'_0 + (v_1 + v_2) l_0 - [J_0 - I^2 S_0 + (V_0 - v_2) z'_0] \psi - (V_0 + v_1) \xi_1 = 0 \quad (\text{II})$$

$$(V_0 - v_2) y'_0 + [I_0 + (V_0 - v_2) z'_0] \theta - (V_0 + v_1) \eta_1 = 0 \quad (\text{III})$$

Из этих двух уравнений, в которых все величины известны, тотчас же находятся неизвестные ψ и θ ; обозначим их значения через ψ_0 и θ_0 и значение ζ_0 , следующее из (**), через ζ_{00} , так что будет

$$\begin{aligned} \zeta_0 = \zeta_{00} &= \frac{v_1 + v_2}{S_0} + l_0 \psi \\ \psi &= \psi_0 \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned} \quad (27)$$

Эти значения и примем за исходное приближение, соответствующее предположению о цилиндричности действующих обводов.

§ 5. По найденному исходному приближению найдем *первое* приближение следующим образом.

1. По найденным значениям $\psi = \psi_0$ и $\theta = \theta_0$, пользуясь формулами (5), вычисляем значения a_3 , b_3 , c_3 , входящие в уравнение (18) действующей ватерлинии:

$$-z = \frac{1}{c_3} (\zeta_{00} + a_3 x + b_3 y) \quad (18)$$

По уравнению (18) наносим на теоретический чертеж пересечение этой ватерлинии с каждым из девяти чебышевских шпангоутов, вычертив для удобства кормовые и носовые шпангоуты *полностью* на двух отдельных чертежах.

Это нанесение проще и точнее всего делается так, как показано на фиг. 2, а именно: пусть $M_1 K_1 K_2 M_2$ есть описанный около миделя прямоугольник и абсцисса i -го шпангоута есть x_i , а полуширина корабля $KK_1 = \frac{B}{2}$, так что уравнение прямой $K_1 M_1$ есть

$$y = \frac{B}{2}$$

а прямой K_2M_2

$$y = -\frac{B}{2}$$

тогда ординаты O_1P_i , ON_i и O_2Q_i будут

$$\begin{aligned} O_1P_i &= -\frac{1}{c_3} \left(\zeta_{00} + a_3 x_i + \frac{1}{2} b_3 B \right) \\ ON_i &= -\frac{1}{c_3} (\zeta_{00} + a_3 x_i) \\ O_2Q_i &= -\frac{1}{c_3} \left(\zeta_{00} + a_3 x_i - \frac{1}{2} b_3 B \right) \end{aligned} \quad (28)$$

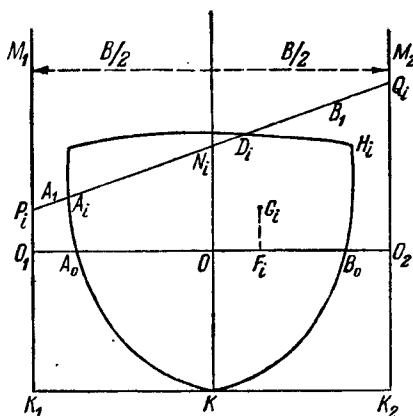
По этим ординатам наносим на чертеж точки P_i , N_i , Q_i ; прямая P_iQ_i и будет представлять пересечение плоскости действующей ватерлинии A_1B_1 с i -м шпангоутом. Точка N_i должна лежать на одной прямой, что служит контролем.

Совершенно так же поступаем для всех остальных шпангоутов.

2. После того как указанное построение выполнено, вычисляем для каждого шпангоута погрузившуюся или оголившуюся площадь $\omega_i = A_0B_0H_iD_iA_i$, причем для простоты заменяем криволинейные обводы $A_0A_1D_iH_i$ и B_0H_i прямолинейными, проведенными на глаз так, чтобы

площадь ω_i сохранила свою величину; вместе с тем определяем положение G_i центра тяжести площади ω_i , т. е. координаты $y_i = OF_i$ и $z_i = -F_iG_i$. Тогда действительно вошедший объем $U_1(\zeta_{00}, \psi_0, \theta_0)$ будет

$$U_1 = \int_{-L}^{+L} \omega dx \quad (29)$$



Фиг. 2.

и его моменты

$$\begin{aligned} U_1 x'_2 &= \int_{-L}^{+L} \omega x dx; & U_1 y'_2 &= \int_{-L}^{+L} \omega y dx \\ U_1 z'_2 &= \int_{-L}^{+L} \omega z dx \end{aligned} \quad (30)$$

причем все эти интегралы тотчас же находятся, ибо шпангоуты взяты чебышевские.

Здесь необходимо иметь в виду, что в формулах (29) и (30) предположено, что объем U_1 ограничен накрашенной ватерлинией $A_0 B_0$, обводами борта $B_0 H_i$, палубы $H_i D_i$, действующей ватерлинией $A_1 B_1$ и обводом борта $A_0 A_i$; но при повреждениях корабля борт и палубы могут иметь пробоины и часть объема U_1 будет залита водой по ограничивающие ее переборки.

Эту утраченную часть объема U_1 обозначим через u_1 и моменты ее через $u_1 x'_1$, $u_1 y'_1$, $u_1 z'_1$; они должны быть вычислены, руководствуясь расположением переборок, показанным на практических чертежах.

3. Так как найденные по исходному приближению значения ζ_{00} , ψ_0 , θ_0 не суть истинные, то объем $U_1 - u_1$ не будет равен $v_1 + v_2$, поэтому координаты центра величины C'_1 , когда корабль погружен по ватерлинию $A_1 B_1$, будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} (V_0 + v_1 - v_2 + U_1 - u_1) X_2 &= (V_0 - v_2) x'_0 + U_1 x'_2 - u_1 x'_1 \\ (V_0 + v_1 - v_2 + U_1 - u_1) Y_2 &= 0 + U_1 y'_2 - u_1 y'_1 \\ (V_0 + v_1 - v_2 + U_1 - u_1) Z_2 &= (V_0 - v_2) z'_0 + U_1 z'_2 - u_1 z'_1 \end{aligned} \quad (31)$$

из которых величины X_2 , Y_2 и Z_2 и найдутся, ибо все прочие уже вычислены.

По формулам (5), полагая в них $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$, вычисляем значения нужных нам косинусов, после чего по формулам

$$\begin{aligned} E_2 &= a_1 X_2 + b_1 Y_2 + c_1 Z_2 \\ H_2 &= 0 + b_2 Y_2 + c_2 Z_2 \end{aligned} \quad (32)$$

находим соответствующие значениям $\zeta_0 = \zeta_{00}$, $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$ значения величин Ξ_2 и H_2 , которые обозначим через

$$\Xi_2(\zeta_{00}, \psi_0, \theta_0); \quad H_2(\zeta_{00}, \psi_0, \theta_0) \quad (*)$$

чтобы показать, что это суть частные значения этих функций.

Найденными величинами $U_1 - u_1$ и (*) уравнения (I), (II), (III) не будут удовлетворяться в точности. По подстановке этих значений в уравнения (I), (II), (III) в правых частях вместо 0 получим некоторые числа, которые обозначим через τ_0 , δ_0 , ε_0 , так что будет

$$\begin{aligned} U_1 - u_1 - (v_1 + v_2) &= \tau_0 \\ \Xi_2(\zeta_{00}, \psi_0, \theta_0) - \xi_1 &= \delta_0 \\ H_2(\zeta_{00}, \psi_0, \theta_0) - \eta_1 &= \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (33)$$

Если бы у нас были составлены *аналитические* выражения функций $U_1(\zeta_0, \psi, \theta)$, $u_1(\zeta_0, \psi, \theta)$, $\Xi_2(\zeta_0, \psi, \theta)$, $H_2(\zeta_0, \psi, \theta)$, то, обозначая через α , β , γ те поправки, которые надо придать к найденным значениям ζ_0 , ψ_0 и θ_0 , чтобы получить величины $\zeta_{00} + \alpha$, $\psi_0 + \beta$, $\theta_0 + \gamma$, которые удовлетворяли бы уравнениям (I), (II), (III), мы, ограничиваясь первыми степенями величин α , β , γ , по теореме Тейлора получили бы для их определения уравнения

$$\begin{aligned} \left\{ [U_1 - u_1 - (v_1 + v_2)] + \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \zeta_0} \alpha + \right. \\ \left. + \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 = 0 \\ \left\{ \Xi_2 - \xi_1 + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \zeta_0} \alpha + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 = 0 \\ \left\{ H_2 - \eta_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \zeta_0} \alpha + \frac{\partial H_2}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 = 0 \end{aligned}$$

где $\left\{ \right\}_0$ означает, что после дифференцирования надо положить

$\zeta_0 = \zeta_{00}$, $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$. Но $\{U_1 - u_1 - (v_1 + v_2)\}_0 = \tau_0$, $\{\Xi_2 - \xi_1\}_0 = \delta_0$, $\{H_2 - \eta_1\}_0 = \epsilon_0$, тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \zeta_0} \alpha + \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 + \tau_0 &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial \Xi_2}{\partial \zeta_0} \alpha + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 + \delta_0 &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial H_2}{\partial \zeta_0} \alpha + \frac{\partial H_2}{\partial \psi} \beta + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} \gamma \right\}_0 + \epsilon_0 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

из которых поправки α , β , γ и были бы найдены.

Аналитических выражений функций $U_1 - u_1$, Ξ_2 , H_2 мы не имеем и, следовательно, не можем составить аналитически уравнений (34); но, имея возможность, пользуясь чертежами корабля, весьма просто вычислять численные значения $U_1 - u_1$, Ξ_2 , H_2 , когда величинам ζ_0 , ψ , θ приписываются любые численные значения, можно, как это показал Ньютон, составить уравнения (34) для определения поправок α , β , γ .

В предложении XLI, задача XXI, своих „Начал“ Ньютон дает свое знаменитейшее решение поставленного им „труднейшего“, по его словам, вопроса: „определить по заданным трем наблюдениям орбиту кометы, движущейся по параболе“.

Параболическая орбита определяется пятью элементами. Ньютон дает графическое решение этой задачи; ясно, что такое решение является приближенным, поэтому в предложении XLII, задача XXII, он ставит вопрос: „исправить найденную орбиту кометы“, иными словами, найти более точные значения элементов, которые удовлетворяли бы всей совокупности произведенных наблюдений; ясно, что вопрос, поставленный Ньютоном, имеет полную аналогию с нашим вопросом о корабле, поэтому и решение, данное Ньютоном, вполне приложимо и к нашему случаю.

Ньютон поступает следующим образом: он берет приближенные значения элементов и вычисляет по ним для времени наблюдений значения координат кометы, что делается довольно просто; затем

он берет один из элементов, придает этому элементу, скажем, наклонности орбиты к плоскости эклиптики, малое приращение, например $10'$, и для тех же значений времени вычисляет измененные значения координат кометы. Сливив последние с первоначальными, ввиду малости приращения, говоря теперешними терминами, он получает частные дифференциалы этих координат по измененности указанного элемента (наклонности); разделив их на приданное этому элементу приращение, он получает соответствующие численные значения частных производных, затем составляет уравнения, подобные (34), решение которых и доставляет искомые поправки приближенных элементов.

Как видно, при этом ему нет надобности иметь *аналитические* выражения координат кометы через элементы орбиты, а достаточно иметь возможность вычислять их численные значения, совершенно подобно тому, как это имеет место в нашем случае.

Применяя этот метод к нашему случаю, мы, сохраняя значения ψ_1 и θ_0 неизменными, возьмем вместо $\zeta_0 = \zeta_{00}$ величину $\zeta_0 = \zeta_{00} + 0.5$ м и вычислим соответствующие значения $U_1 - u_1$, Ξ_2 , H_2 , а затем, слив их с вычисленными при $\zeta_0 = \zeta_{00}$, по разделении на 0.50 получим значения частных производных

$$\left[\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \zeta_0} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial \Xi_2}{\partial \zeta_0} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial H_2}{\partial \zeta_0} \right]_0$$

Совершенно так же, взяв значения

$$\zeta_0 = \zeta_{00}; \quad \psi = \psi_0 + \frac{1}{57.3}; \quad \theta = \theta_0$$

получим значения

$$\left[\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \psi} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial \Xi_2}{\partial \psi} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial H_2}{\partial \psi} \right]_0$$

точно так же, взяв значения

$$\zeta_0 = \zeta_{00}; \quad \psi = \psi_0; \quad \theta = \theta_0 + \frac{5}{57.3}$$

получим:

$$\left[\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial \theta} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial \Xi_2}{\partial \theta} \right]_0, \quad \left[\frac{\partial H_2}{\partial \theta} \right]_0$$

Составляем уравнения (34), из которых и найдем поправки α , β , γ , причем α будет выражаться в метрах, а β и γ — в отвлеченной мере углов.

Таким образом, исправленные значения будут

$$\zeta_0 = \zeta_{00} + \alpha; \quad \psi = \psi_0 + 57.3\beta; \quad \theta = \theta_0 + 57.3\gamma \quad (35)$$

множитель 57.3 введен, чтобы поправки, как и самые углы ψ_0 и θ_0 , выразить в градусной мере.

Заметим, что, после того как на чертеж будет нанесено измененное положение действующей грузовой, проще вычислять не самые величины $U_1 - u_1$, E_2 , H_2 , а лишь их изменения, т. е. брать площади ω между первоначальным положением действующей ватерлинии и измененным.

Для проверки наносим на чертеж положение действующей ватерлинии A_1B_1 , соответствующей значениям (35), вычисляем величины $U_1 - u_1$, E_2 , H_2 и проверяем, будут ли уравнения (I), (II), (III) удовлетворены; если отступления более допустимых, то описанный процесс получения нового приближенного значения повторяем.

Как видно, при этом процессе лишь для получения исходного приближения делаются некоторые упрощающие предположения; в дальнейшем же все эти предположения исключаются.

Ясно, что вместо приращений 0.50 м, $1^\circ = \frac{1}{57.3}$, $5^\circ = \frac{5}{57.3}$ можно брать и другие величины применительно к размерам корабля, для которого производится расчет.

На этом заканчивается первая часть нашей задачи, т. е. определение положения равновесия корабля; остается вторая часть, т. е. исследование того, *устойчиво ли это положение равновесия*.

§ 6. Условие устойчивости равновесия любого плавающего тела состоит, как известно, в том, чтобы центр тяжести тела лежал *ниже* так называемого „малого“ метацентра этого тела. „Малым“ метацентром называют тот метацентр, возвышение которого над центром величины определяется значением

$$\rho = \frac{I}{V} \quad (36)$$

Здесь I — меньший из двух главных моментов инерции площади действующей ватерлинии, а значит, и наименьший из всех моментов инерции этой площади.

Таким образом, если мы для вышенайденной, окончательной действующей ватерлинии обозначим координаты центра величины C через E_c , H_c , Z_c , то координаты метацентра будут

$$E_m = E_c; H_m = H_c; Z_m = Z_c - \rho$$

перед ρ взят знак минус (—), ибо метацентр лежит *выше* центра величины, ось же $O\zeta$ принята положительной *вниз*.

Относительные координаты центра величины C : X_c , Y_c , Z_c предполагаются уже вычисленными (формулы 31), и на основании формул (6) абсолютная координата Z_c этой точки будет

$$Z_c = \zeta_0 + a_3 X_c + b_3 Y_c + c_3 Z_c \quad (37)$$

Значит, координата Z_m метацентра будет

$$Z_m = Z_c - \rho$$

Относительные координаты центра тяжести корабля суть [формулы (8)] $x_0 + g'_1$, f'_1 , $z_0 + h'_1$; следовательно, координата ζ_g центра тяжести будет

$$\zeta_g = \zeta_0 + a_3(x_0 + g'_1) + b_3 f'_1 + c_3(z_0 + h'_1) \quad (38)$$

Так как для устойчивости равновесия надо, чтобы центр тяжести лежал *ниже* метацентра, то должно быть

$$\zeta_g > Z_m$$

иначе

$$\rho + \zeta_g - Z_c > 0 \quad (39)$$

Если условие (39) не выполнено, то корабль опрокидывается.

Остается показать, каким образом вычисляются главные моменты инерции площади действующей ватерлинии.

Это делается проще всего следующим способом. Сняв с чертежа ординаты действующей ватерлинии, вычисляют координаты центра тяжести E ее площади S , проводят через точку E координаты

натные оси Ea , Eb и, вычертив действующую ватерлинию, вычисляют по какой-либо из формул квадратур интегралы

$$I_a = \frac{2}{3} \int_{-a_1}^{+a_2} (b_1^3 + b_2^3) da; \quad I_b = \int_{-a_1}^{+a_2} a_1^2 (b_1 + b_2) da$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{-a_1}^{+a_2} (b_1^2 - b_2^2) ada$$

при само собой понятных обозначениях.

Эти интегралы представляют соответственно момент инерции около оси Ea , момент инерции около поперечной оси Eb и центробежный момент.

Вычисляем угол α по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2K}{I_b - I_a}$$

тогда главные моменты инерции I и J находятся по формулам

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_a + I_b) + \frac{1}{2} \frac{I_a - I_b}{\cos 2\alpha}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (I_a + I_b) - \frac{1}{2} \frac{I_a - I_b}{\cos 2\alpha}$$

Берем меньший из моментов I_2 и J_2 , — это и будет величина I наименьшего из всех моментов инерции площади S . По этому моменту I и вычисляем метацентрический радиус

$$\rho = \frac{I}{V}$$

причем

$$V = \frac{P_0 + P_1}{\gamma} = V_0 + v_1$$

Есть и другие способы решения поставленного вопроса, но изложенный имеет то преимущество, что требует лишь вычисления объемов и положения центров тяжести их, пользуясь теоретическим чертежом, т. е. обычных и привычных для технических бюро вычислений.

ВОЗМУЩЕНИЯ ПОКАЗАНИЙ КОМПАСА, ПРОИСХОДЯЩИЕ ОТ КАЧКИ КОРАБЛЯ НА ВОЛНЕНИИ

Г л а в а I

КОЛЕБАНИЯ КАРТУШКИ СУХОГО МАГНИТНОГО КОМПАСА

§ 1. В этой статье рассматриваются колебания картушки, вызываемые только механическими причинами, причем предполагается, что компас „сухой“ и что его девиация вполне уничтожена.

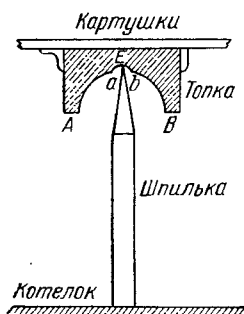
При таких предположениях колебания картушки представляют частный случай колебаний твердого тела, подвешенного за данную в нем точку, которой сообщается заданное движение. Эта точка практически есть конец шпильки, на котором лежит топка картушки.

Чтобы не усложнять напрасно выкладки, вообразим, что топка сделана по системе Бауэра (фиг. 1) и представляет собою сапфировый цилиндр, нижняя опирающаяся на шпильку поверхность которого ограничена двумя полусферами — большою AB и малою aEb ; шпилька заточена на конус. По малости сферы aEb можно принимать, что касание происходит в вершине E и при наклонениях картушки изменяется лишь *направление* реакции, точка же приложения ее остается постоянной и совпадает с точкой E .

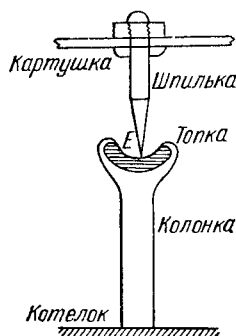
Но можно от этого лишнего предположения избавиться — стоит только поменять топку [и шпильку местами, т. е. топку укрепить на колонке котелка, а шпильку на самой картушке, тогда точка E в картушке будет строго неподвижна, движение же топки настолько мало сравнительно с движениями корабля, что не может быть учи-

тываемо; между тем даже малые перемещения опорной точки E в картушке нежелательны по причинам, которые будут изложены ниже. Поэтому мы будем предполагать, что обычная конструкция изменена и шпилька вделана в картушку (фиг. 2).

§ 2. Начнем с рассмотрения *свободных* колебаний картушки на берегу или на неподвижном корабле, когда девиация уничтожена; к этим свободным колебаниям и прилагаются *вынужденные*, происходящие от движения корабля.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Как обыкновенно при рассмотрении движения твердого тела, необходимо принять две системы осей координат — одну неизменную и неподвижную в пространстве, другую — неизменную в теле; первую будем называть абсолютной, вторую — относительной.

За абсолютную систему принимаем следующую:

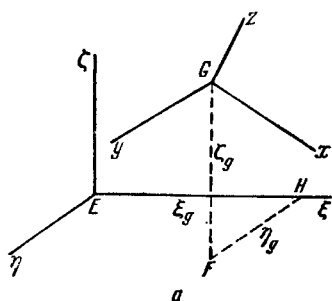
а) за начало координат — точку E опоры шпильки о топку, укрепленную к котелку, который будет неподвижен;

б) за плоскости координат $E\xi$ — северную половину плоскости магнитного меридиана, за $E\xi\eta$ — горизонтальную плоскость; ось $E\xi$ направляем вверх, ось $E\xi$ — к Nord'y, ось $E\eta$ — к Ost'y.

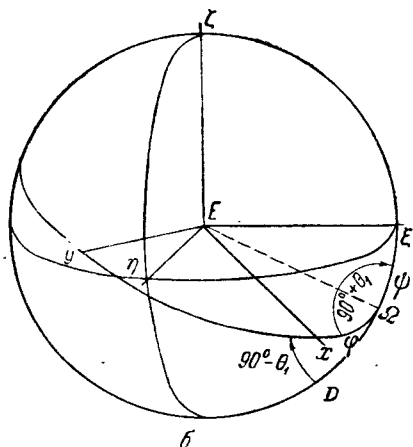
За относительную систему берем: начало координат в точке G , центре тяжести картушки без подвижного грузика, служащего для ее уравнивания; ось Gx — параллельно линии NS лимба к Nord'y;

ось Gy — параллельно линии WO к $Ost'y$; ось Gz — прямую GE , которая по самому устройству картушки перпендикулярна к плоскости лимба.

Так как грузик, уравнивающий пару, происходящую от вертикальной слагающей земной магнитной силы, весьма мал, то указанные оси Gx , Gy , Gz можно принять за главные оси инерции картушки.



Фиг. 3а.



Фиг. 3б.

Положение осей $Gxyz$ относительно неподвижных осей $E\xi\eta\zeta$ определяется:

а) координатами точки G (фиг. 3а).

$$\xi_g, \eta_g, \zeta_g$$

б) тремя Эйлеровыми углами (фиг. 3б): φ , ψ , θ_1 , которые берем „корабельные“, т. е.

$$\psi = \xi\Omega; \varphi = \Omega x; 90^\circ - \theta_1 = \angle D\Omega x$$

как это сделано мною в 1898 г. при рассмотрении качаний корабля на волнении. При таком выборе и малых отклонениях картушки от положения равновесия все три угла будут малые.

Формулы преобразования координат, получающиеся из схемы

	ξ	η	ζ
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

суть

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_g + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= \eta_g + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= \zeta_g + c_1 x + c_2 y + c_3 z\end{aligned}\quad (1)$$

Обратно:

$$\begin{aligned}x &= a_1 (\xi - \xi_g) + b_1 (\eta - \eta_g) + c_1 (\zeta - \zeta_g) \\ y &= a_2 (\xi - \xi_g) + b_2 (\eta - \eta_g) + c_2 (\zeta - \zeta_g) \\ z &= a_3 (\xi - \xi_g) + b_3 (\eta - \eta_g) + c_3 (\zeta - \zeta_g)\end{aligned}\quad (2)$$

Для проекций сил будем иметь аналогичные формулы:

$$\begin{aligned}\Xi &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z; \quad X = a_1 \Xi + b_1 \text{H} + c_1 Z \\ \text{H} &= b_1 X + b_2 Y + b_3 Z; \quad Y = a_2 \Xi + b_2 \text{H} + c_2 Z \\ Z &= c_1 X + c_2 Y + c_3 Z; \quad Z = a_3 \Xi + b_3 \text{H} + c_3 Z\end{aligned}\quad (3)$$

Косинусы же углов находим, применяя основную формулу сферической тригонометрии к треугольникам (рис. 3, б)

$$x^{\circ}\xi, \quad x^{\circ}\eta, \quad x^{\circ}\zeta, \quad y^{\circ}\xi, \quad y^{\circ}\eta, \quad y^{\circ}\zeta, \quad z^{\circ}\xi, \quad z^{\circ}\eta, \quad z^{\circ}\zeta$$

из которых получаются:

$$\begin{aligned}a_1 &= \cos(x, \xi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta_1 \approx 1 \\ b_1 &= \cos(x, \eta) = \sin \varphi \cos \theta_1 \approx \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \cos(x, \zeta) = -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \sin \theta_1 \approx -\psi \\
a_2 &= \cos(y, \xi) = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta_1 \approx -\varphi \\
b_2 &= \cos(y, \eta) = \cos \varphi \cos \theta_1 \approx 1 \\
c_2 &= \cos(y, \zeta) = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta_1 \approx -\theta_1 \\
a_3 &= \cos(z, \xi) = \sin \psi \cos \theta_1 \approx \psi \\
b_3 &= \cos(z, \eta) = \sin \theta_1 \approx \theta_1 \\
c_3 &= \cos(z, \zeta) = \cos \psi \cos \theta_1 \approx 1
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь указаны и приближенные значения этих косинусов для „малых“ углов, ограничиваясь их *первою* степенью, т. е. полагая

$$\cos \psi = \cos \varphi = \cos \theta_1 = 1$$

$$\sin \psi = \psi; \sin \varphi = \varphi; \sin \theta_1 = \theta_1$$

Таблица косинусов тоже будет

	ξ	η	ζ
x	1	φ	$-\psi$
y	$-\varphi$	1	$-\theta_1$
z	ψ	θ_1	1

Соответственно этой таблице приближенные формулы будут

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_g + x - y\varphi + z\psi \\
\eta &= \eta_g + x\varphi + y + z\theta_1 \\
\zeta &= \zeta_g - x\psi - y\theta_1 + z
\end{aligned} \tag{1'}$$

и обратно:

$$\begin{aligned}
x &= (\xi - \xi_g) + (\eta - \eta_g)\varphi - (\zeta - \zeta_g)\psi \\
y &= -(\xi - \xi_g)\varphi + (\eta - \eta_g) - (\zeta - \zeta_g)\theta_1 \\
z &= (\xi - \xi_g)\psi + (\eta - \eta_g)\theta_1 + (\zeta - \zeta_g)
\end{aligned} \tag{2'}$$

Затем:

$$\begin{aligned} \Xi &= X - Y\varphi + Z\psi; & X &= \Xi + H\varphi - Z\psi \\ H &= X\varphi + Y + Z\theta_1; & Y &= -\Xi\varphi + H - Z\theta_1 \\ Z &= -X\psi - Y\theta_1 + Z; & Z &= \Xi\psi + H\theta_1 + Z \end{aligned} \quad (3')$$

Нетрудно видеть, что, ограничиваясь членами первого порядка, мы получим следующие выражения проекций угловых скоростей на оси Gx , Gy , Gz :

$$\begin{aligned} p &= -\theta'_1 \\ q &= \psi' \\ r &= \varphi' \end{aligned} \quad (4')$$

Абсолютные координаты точки E суть

$$\xi_e = 0; \eta_e = 0; \zeta_e = 0$$

относительные ее координаты суть

$$x_e = 0; y_e = 0; z_e = GE = h$$

Подставляя эти величины в формулы (1'), имеем:

$$\begin{aligned} \xi_g + h\psi &= 0, \text{ т. е. } \xi_g = -h\psi \\ \eta_g + h\theta_1 &= 0, \text{ т. е. } \eta_g = -h\theta_1 \\ \zeta_g + h &= 0, \text{ т. е. } \zeta_g = -h \end{aligned} \quad (5)$$

Эти равенства представляют *первую группу уравнений связей*.

Уравнения движения центра тяжести системы, состоящей из картушки, для которой обозначим вес через P_0 и координаты центра тяжести ξ_g , η_g , ζ_g , и грузика, вес которого обозначим через p_1 и координаты ц. т. через ξ_p , η_p , ζ_p , суть

$$\frac{P_0}{g} \xi''_g + \frac{p_1}{g} \xi''_p = \Sigma \Xi; \quad \frac{P_0}{g} \eta''_g + \frac{p_1}{g} \eta''_p = \Sigma H \quad (6)$$

$$\frac{P_0}{g} \zeta''_g + \frac{p_1}{g} \zeta''_p = \Sigma Z \quad (7)$$

где суммы относятся к проекциям *всех внешних сил*, действующих на систему.

Эти внешние силы суть:

а) вес катушки P_0 , проекции его:

$$\Xi_0 = 0; \quad H_0 = 0; \quad Z_0 = -P_0 \quad (8)$$

б) вес грузика p_1 , проекции его:

$$\Xi_1 = 0; \quad H_1 = 0; \quad Z_1 = -p_1$$

в) реакция грузика, происходящая от переносного его движения (сила инерции грузика); этой реакцией по ее малости пренебрегаем, момент же ее сохраняем;

г) реакция Q , воспринимаемая шпилькой; обозначим проекции ее через

$$\Xi_e, \quad H_e, \quad Z_e \quad (9)$$

Эти величины неизвестны; их надо определить на основании уравнений связей, из которых мы имеем уравнения (5), относящиеся к переменным $\xi_g, \eta_g, \zeta_g, \psi, \theta_1$, определяющим положение катушки.

Обозначим через

$$x_p = l_1; \quad y_p = 0; \quad z_p = h_1$$

относительные координаты грузика, тогда, по формулам (1') и (5), его абсолютные координаты будут

$$\begin{aligned} \xi_p &= \xi_g + l_1 + h_1 \psi = l_1 + (h_1 - h) \psi \\ \eta_p &= \eta_g + l_1 \varphi + h_1 \theta_1 = l_1 \varphi + (h_1 - h) \theta_1 \\ \zeta_p &= \zeta_g - l_1 \psi + h_1 = -l_1 \psi + (h_1 - h) \end{aligned} \quad (10)$$

Это есть вторая группа уравнений связей. Из нее следует:

$$\xi_p'' = (h_1 - h) \psi''; \quad \eta_p'' = l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta_1''; \quad \zeta_p'' = -l_1 \psi'' \quad (11)$$

Подставив величины (8)–(11) в уравнение (7), получим следующие значения реакций:

$$\begin{aligned} \Xi_e &= \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 l_1}{g} \right] \psi'' \\ H_0 &= \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 l_1}{g} \right] \theta_1'' + \frac{p_1 l_1}{g} \varphi'' \\ Z_e &= P_0 + p_1 - \frac{p_1 l_1}{g} \psi'' \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда, на основании формул (3'), отбросив члены, порядок которых выше первого, имеем:

$$\begin{aligned} X_e &= \Xi_e + H_e \varphi - Z_e \psi = \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 l_1}{g} \right] \psi'' - (P_0 + p_1) \psi \\ Y_e &= -\Xi_e \varphi + H_e - Z_e \theta_1 = \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 l_1}{g} \right] \theta_1'' + \\ &\quad + \frac{p_1 l_1}{g} \varphi'' - (P_0 + p_1) \theta_1 \\ Z_e &= \Xi_e \psi + H_e \theta_1 + Z_e = P_0 + p_1 - \frac{p_1 l_1}{g} \psi'' \end{aligned} \quad (13)$$

§ 3. Из уравнений связей (5) следует, что как только углы ψ и θ_1 будут найдены, то движение центра тяжести картушки тотчас же определяется, но оно практически не нужно; таким образом, все сводится к колебательному движению, т. е. к определению углов θ_1 , ψ , φ и главным образом этого последнего угла.

Ввиду того, что моменты инерции грузика относительно осей Gx , Gy , Gz ничтожно малы по сравнению с моментами инерции A_g , B_g , C_g самой картушки относительно этих осей, мы можем вообразить, что вместо грузика в точке $x_p = l_1$, $y_p = 0$, $z_p = h_1$ приложена вертикальная сила p_1 , равная весу грузика за вычетом силы инерции переносного его движения.

В таком случае, ограничиваясь членами первого порядка и пренебрегая моментами инерции грузика, мы можем написать уравнения колебательного движения картушки в следующем виде:

$$-A_g \theta_1'' = \Sigma (Zy - Yz)$$

$$B_{\theta}\psi'' = \Sigma (X_z - Z_x) \quad (14)$$

$$C_{\theta}\varphi'' = \Sigma (Y_x - X_y)$$

В правых частях стоят суммы моментов всех сил, действующих на картушку относительно осей $Gxyz$.

Силы эти, не считая пока сопротивления воздуха, суть:

- а) вес картушки (без грузика) P_0 ,
- б) реакция топки на шпильку,
- в) вес грузика p_1 ,
- г) магнитные силы,
- д) силы инерции переносного движения грузика¹ p_1 .

Исчислив каждый из моментов этих сил в отдельности и взяв их суммы, мы тотчас же получим уравнения в развернутой форме.

Отдельные же силы дают следующие моменты.

а. *Вес картушки* P_0 : $M_{0x} = M_{0y} = M_{0z} = 0$.

б. *Реакция топки на шпильку*: силы X_e , Y_e , Z_e [см. формулу (13)]; координаты точки приложения $x_e = 0$, $y_e = 0$, $z_e = h$; моменты:

$$\begin{aligned} L_{e0} &= -Y_e h = - \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] h \psi'' - \frac{p_1 l_1}{g} h \varphi'' - (P_0 + p_1) h \theta_1 \\ M_{e0} &= X_e h = \left[-\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] h \psi'' - (P_0 + p_1) h \psi \end{aligned} \quad (15)$$

$$N_{e0} = 0$$

в. *Вес грузика* p_1 : силы: $\Xi_p = 0$; $\Pi_p = 0$; $Z_p = -p_1$, $X_p = p_1 \psi$, $Y_p = p_1 \theta_1$, $Z_p = -p_1$; координаты точки приложения: $x_p = l$, $y_p = 0$, $z_p = h_1$; моменты:

$$L_{p0} = p_1 h_1 \theta_1, \quad M_{p0} = p_1 h_1 \psi + p_1 l_1, \quad N_{p0} = -p_1 l \theta_1 \quad (16)$$

г. *Магнитные силы*. Так как девиация предполагается вполне уничтоженной, то на картушку действует только земной магнетизм, слагающие напряжения которого обозначим: горизонтальную через H , вертикальную через $Z = H \operatorname{tg} i$, где i — магнитноеклонение в данном месте.

¹ Этот момент сохранен, ибо по своей величине он сравним с моментом магнитных сил.

Вообразим, что система магнитов катушки заменена одним магнитом с магнитным моментом M , равнодействующим магнитных моментов стрелок катушки, а этот последний заменен совокупностью магнитных масс $\mu, -\mu$, координаты которых

$$\text{для } \mu \quad x_n = l; \quad y_n = 0; \quad z_n = h_n$$

$$\text{для } -\mu \quad x_s = -l; \quad y_s = 0; \quad z_s = h_n$$

Слагающие магнитных сил, действующие на эти массы:

$$\Xi_n = \mu H; \quad H_n = 0; \quad Z_n = -\mu H \operatorname{tg} i$$

$$\Xi_s = -\mu H; \quad H_s = 0; \quad Z_s = +\mu H \operatorname{tg} i$$

$$X_n = -X_s = \mu H + \mu H \operatorname{tg} i \cdot \psi$$

$$Y_n = -Y_s = -\mu H \varphi + \mu H \operatorname{tg} i \cdot \theta_1$$

$$Z_n = -Z_s = \mu H \psi - \mu H \operatorname{tg} i$$

Отсюда видно, что в суммах проекций магнитные силы исчезают; моменты же будут

$$L_{m0} = 0$$

$$M_{m0} = -2lZ_n = -MH\psi + MH \operatorname{tg} i \quad (17)$$

$$N_{m0} = 2lY_n = -MH\varphi + MH \operatorname{tg} i \cdot \theta_1$$

ибо по предположению $2\mu l = M$ равно магнитному моменту катушки.

д. *Силы инерции груза* (реакции связи между грузиком и катушкой).

Относительные координаты груза:

$$x_p = l_1; \quad y_p = 0; \quad z_p = h_1$$

Проекции сил инерции по уравнению (11):

$$-\frac{P_1}{g} \xi_p'' = -\frac{P_1}{g} (h_1 - h) \psi''$$

$$-\frac{P_1}{g} \eta_p'' = -\frac{P_1}{g} [l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta_1'']$$

$$-\frac{P_1}{g} \zeta_p'' = \frac{P_1}{g} l_1 \psi''$$

Проекции сил инерции на оси $Gxyz$, взятые без членов порядка выше первого, суть

$$J_x = -\frac{P_1}{g}(h_1 - h)\psi''; \quad J_y = -\frac{P_1}{g}[l_1\varphi'' + (h_1 - h)\theta_1'']; \quad J_z = +\frac{P_1}{g}l_1\psi''$$

Моменты этих сил:

$$L_{i0} = J_x y_p - J_y z_p = -J_y h_1 = \frac{P_1 h_1}{g}[l_1\varphi'' + (h_1 - h)\theta_1'']$$

$$M_{i0} = J_x z_p - J_z x_p = J_x h_1 - J_z l_1 = \frac{P_1}{g}[-(h_1 - h)h_1 - l_1^2]\psi'' \quad (17')$$

$$N_{i0} = J_y x_p - J_z y_p = J_y l_1 = -\frac{P_1}{g}[l_1^2\varphi'' + l_1(h_1 - h)\theta_1'']$$

Подставив выражения (15)–(17), (17') в уравнения (14), получим уравнения колебательного движения картушки на покоящемся корабле сперва в таком виде:

$$\begin{aligned} A_g \theta_1'' + (L_{e0} + L_{p0} + L_{i0} + L_{m0}) &= 0 \\ B_g \psi'' - (M_{e0} + M_{p0} + M_{i0} + M_{m0}) &= 0 \\ C_g \varphi'' - (N_{e0} + N_{p0} + N_{i0} + N_{m0}) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Затем, подставив вместо L_{e0} , L_{p0} , ..., N_{m0} их развернутые выражения и ограничиваясь членами первого порядка, получим следующие уравнения движения картушки на *покоящемся* корабле в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \left[A_g + \frac{P_0}{g}h^2 + \frac{P_1}{g}(h_1 - h)^2 \right] \theta_1'' + [P_0 h + p_1(h - h_1)] \theta_1 &= 0 \\ \left[B_g + \frac{P_0}{g}h^2 + \frac{P_1}{g}(h_1 - h)^2 + \frac{P_1}{g}l_1^2 \right] \psi'' + [P_0 h + p_1(h - h_1) + \\ + MH] \psi - [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] &= 0 \\ \left[C_g + \frac{P_1}{g}l_1^2 \right] \varphi'' + MH \varphi - [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 + \frac{P_1}{g}l_1(h_1 - h)\theta_1' &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Положим

$$A_g + \frac{P_0}{g}h^2 + \frac{P_1}{g}(h_1 - h)^2 = A$$

$$B_g + \frac{P_0}{g} h^2 + \frac{P_1}{g} (h_1 - h)^2 + \frac{P_1}{g} l_1^2 = B \quad (19')$$

$$C_g + \frac{P_1}{g} l_1^2 = C$$

Очевидно, что величины A , B , C представляют собой моменты инерции картушки вместе с грузиком относительно осей, параллельных осям Gx , Gy , Gz , проведенным через острие шпильки; сделав эту замену, разделим первое уравнение почленно на A , второе на B , третье на C и положим

$$\begin{aligned} \frac{P_0 h + P_1 (h - h_1)}{A} &= n_1^2 \approx \frac{P_0 h}{A} \\ \frac{P_0 h + P_1 (h - h_1) + MH}{B} &= n_2^2 \approx \frac{P_0 h}{B} \\ \frac{MH}{C} &= n_3^2 \end{aligned} \quad (20)$$

тогда уравнения (19) примут вид

$$\begin{aligned} \theta_1'' + n_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \psi'' + n_2^2 \psi &= \frac{1}{B} (MH \operatorname{tg} i + P_1 l_1) = \frac{C}{B} \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{P_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + n_3^2 \varphi &= \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{P_1 l_1}{C} \right) \theta_1 + \frac{P_1 l_1 (h - h_1)}{gC} \theta_1' = \\ &= \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{P_1 l_1}{C} \right) \theta_1 - n_1^2 \frac{P_1 l_1}{gC} (h - h_1) \theta_1 \end{aligned} \quad (21)$$

Определим прежде всего положение равновесия картушки. Положив $\theta_1'' = \psi'' = \varphi'' = 0$, получим:

$$\begin{aligned} (\theta_1)_0 = 0; \psi_0 &= \frac{MH \operatorname{tg} i + P_1 l_1}{P_0 + P_1 (h - h_1) + MH} \approx \frac{MH \operatorname{tg} i + P_1 l_1}{P_0 h} \\ \varphi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Второе из этих равенств показывает, что вообще положение равновесия картушки таково, что линия NS наклонена на угол ψ_0 , оставаясь в плоскости магнитного меридиана.

Необходимо обратить внимание, что координаты острия шпильки суть

$$x_e = 0; y_e = 0; z_e = h \quad (23)$$

т. е. центр тяжести картушки $G(0, 0, 0)$ и острие шпильки лежат на прямой, перпендикулярной плоскости лимба, и если бы стрелки намагничены не были ($M=0$) и грузика p_1 не ставить, то было бы $\psi_0 = 0$.

Назовем это условие, выражаемое аналитически равенствами (15), механическим уравниванием картушки.

Ясно, что такая картушка после намагничивания ее стрелок при $p_1 l_1 = 0$, иначе $p_1 = 0$, приняла бы наклон

$$\psi_1 = \frac{MH \operatorname{tg} i}{P_0 h + MH + p_1(h - h_1)} \approx \frac{MH \operatorname{tg} i}{P_0 h} \quad (24)$$

Этот наклон магнитного происхождения можно уничтожать установкою такого грузика p_1 на плече l_1 (по линии NS^1), чтобы было

$$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0 \quad (25)$$

Это есть *правильный* способ выбора и установки грузика p_1 (ниже указано, как это проверить и исправить), но часто этого не соблюдают и, *не проверив* механического уравнивания, передвигают или ставят грузик p_1 так, чтобы было $\psi_0 = 0$. Вредное влияние такой неправильной установки грузика будет показано ниже.

В дальнейшем, как и до сих пор, будем предполагать, что условия (15) при $p_1 = 0$ выполнены, т. е. картушка *механически уравновешена*.

§ 4. Мы имели уравнения

$$\theta_1'' + n_1^2 \theta_1 = 0$$

¹ В северных магнитных широтах, где угол $i > 0$, будет $l_1 < 0$, т. е. грузик надо будет располагать между шпилькою и точкою S картушки.

$$\psi'' + n_2^2 \psi = \frac{1}{B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] = \frac{C}{B} \left(n_2^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \quad (21')$$

$$\varphi'' + n_3^2 \varphi = \frac{1}{C} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 - n_1^2 \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{gC} \theta_1$$

Эти уравнения принимают простейший вид, если взять грузик p_1 так, чтобы было

$$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0 \quad (26)$$

т. е. магнитная пара, происходящая от вертикальной силы, была бы уравновешена грузиком p_1 ; тогда будет

$$\begin{aligned} \theta_1'' + n_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \psi'' + n_2^2 \psi &= 0 \\ \varphi'' + n_3^2 \varphi &= -n_1^2 \frac{p_1 l_1}{gC} (h - h_1) \theta_1 \end{aligned} \quad (27)$$

Ясно, что эти уравнения представляют простые гармонические колебания, периоды которых суть

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{A}{P_0 h + p_1 h_1}} \\ \tau_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{B}{P_0 h + p_1 h_1 + MH}} \\ \tau_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{C}{MH}} \end{aligned} \quad (28)$$

так что общие интегралы этих уравнений суть

$$\begin{aligned} \theta_1 &= K_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + K_2 \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} \\ \psi &= K_3 \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} + K_4 \sin \frac{2\pi t}{\tau_2} \\ \varphi &= K_5 \cos \frac{2\pi t}{\tau_3} + K_6 \sin \frac{2\pi t}{\tau_3} + \\ &+ \frac{\tau_3^2}{\tau_3^2 - \tau_1^2} \cdot \frac{p_1 l_1}{gC} (h - h_1) \theta_1 \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим здесь же, что коэффициент у последнего члена составляет около $1/250$, и потому этот член может быть отброшен. Величины $K_1, K_2, \dots, K_6$ — постоянные произвольные, на определении которых по начальным условиям нет надобности останавливаться.

§ 5. При составлении уравнений (18) и полученных из них уравнений (21) сопротивление воздуха во внимание не принято; если же считать его пропорциональным первой степени скорости, то в левые части уравнений (18) надо соответственно приписать члены

$$+2N_1\theta'_1, +2N_2\psi', +2N_3\varphi'$$

и в уравнениях (21) — члены

$$2f_1\theta'_1, 2f_2\psi', 2f_3\varphi' \quad (30)$$

так что эти уравнения будут

$$\begin{aligned} \theta''_1 + 2f_1\theta'_1 + n_1^2\theta_1 &= 0 \\ \psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi - \frac{1}{B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] &= 0 \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi - \frac{1}{C} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Полагая

$$\begin{aligned} n_1^2 - f_1^2 &= s_1^2; \quad n_2^2 - f_2^2 = s_2^2; \quad n_3^2 - f_3^2 = s_3^2 \\ T_1 &= \frac{2\pi}{s_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{s_2}; \quad T_3 = \frac{2\pi}{s_3} \end{aligned} \quad (32)$$

мы получим общие интегралы этих уравнений в таком виде:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e^{-f_1 t} \left[K_1 \cos \frac{2\pi t}{T_1} + K_2 \sin \frac{2\pi t}{T_1} \right] \\ \psi &= e^{-f_2 t} \left[K_3 \cos \frac{2\pi t}{T_2} + K_4 \sin \frac{2\pi t}{T_2} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n_2^2 B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \quad (33)$$

$$\varphi = e^{-f_3 t} \left[K_5 \cos \frac{2\pi t}{T_3} + K_6 \sin \frac{2\pi t}{T_3} \right] + \\ + \frac{1}{C} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] e^{-f_1 t} \left[D_1 \cos \frac{2\pi t}{T_1} + D_2 \sin \frac{2\pi t}{T_1} \right]$$

Постоянные произвольные $K_1, K_2, \dots, K_6$ определяются по начальным условиям, постоянные D_1 и D_2 суть некоторые линейные функции от K_1 и K_2 . Так как

$$n_2^2 B = P_0 h - p_1 h_1 + MH$$

то из формул (33) видно, что каковы бы ни были начальные условия, по которым определяются постоянные $K_1, K_2, \dots, K_6$, картушка совершает затухающие колебания около своего положения равновесия

$$\theta_1 = 0; \quad \psi = \psi_0; \quad \varphi = 0$$

к которому она асимптотически приближается.

Определение по наблюдениям качаний параметров f_1, f_2, f_3 и n_1^2, n_2^2, n_3^2 , входящих в уравнения (31), слишком хорошо известно, чтобы на нем здесь останавливаться.

§ 6. Положим теперь, что компас находится на качающемся на волнении корабле, и рассмотрим, каким возмущениям он будет подвержен вследствие того, что топка, на которую опирается острие шпильки E , не остается в покое, а увлекается кораблем в его движении.

Как уже указано в § 1, точку опоры топки можно считать неизменной в корабле. Обозначим через E_0 то положение, которое занимает точка E при равновесии и покое корабля; проведем через эту точку неподвижные в пространстве оси координат $E_0 \xi \eta \zeta$, которые при равновесии и покое корабля совпадут с осями $E \xi \eta \zeta$, введенными в § 2.

Оси $Gxyz$ картушки возьмем те же, как и раньше, так что относительные координаты точки G суть

$$x_g = 0, \quad y_g = 0, \quad z_g = 0 \quad (34)$$

координаты же точки E будут

$$x_e = 0; y_e = 0; z_e = h \quad (35)$$

Эйлеровы углы, таблицы косинусов, их точные и приближенные значения, формулы преобразования (1'), (2'), (3') сохраняют свой вид, но значения координат ξ_e , η_e , ζ_e точки опоры острия шпильки уже не будут

$$\xi_e = 0; \eta_e = 0; \zeta_e = 0$$

а будут вследствие движения корабля

$$\xi_e = F_1(t); \eta_e = F_2(t); \zeta_e = F_3(t) \quad (36)$$

причем $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ будут известные функции времени t , ибо положение точки E на корабле задается, движение же корабля также предполагается заданным.

Для составления уравнений колебательного движения мы будем поступать совершенно подобно тому, как в § 3, и составим перечисленные в § 3 моменты действующих на картушку сил, учитывая и переносное движение. Эти силы суть: а) вес картушки, б) реакция топки на шпильку, в) вес груза, г) магнитные силы, д) силы инерции переносного движения груза.

а. *Вес картушки* моментов не дает.

б. *Реакция топки*. По закону движения центра тяжести системы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{g} \xi_g'' + \frac{p_1}{g} \xi_p'' &= E_e \\ \frac{P_0}{g} \eta_g'' + \frac{p_1}{g} \eta_p'' &= H_e \\ \frac{P_0}{g} \zeta_g'' + \frac{p_1}{g} \zeta_p'' + P_0 + p_1 &= Z_e \end{aligned} \quad (37)$$

где E_e , H_e , Z_e суть проекции реакции топки.

На основании формулы (10) будет

$$\xi_p'' = \xi_g'' + h_1 \psi''; \eta_p'' = \eta_g'' + l_1 \varphi'' + h_1 \theta_1''; \zeta_p'' = \zeta_g'' - l_1 \psi'' \quad (38)$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\Xi_e &= \frac{P_0 + P_1}{g} \xi''_g + \frac{P_1 h_1}{g} \psi'' \\ H_e &= \frac{P_0 + P_1}{g} \eta''_g + \frac{P_1 l_1}{g} \varphi'' + \frac{P_1 h_1}{g} \theta''_1 \\ Z_e &= \frac{P_0 + P_1}{g} \zeta'' - \frac{P_1 l_1}{g} \psi'' + P_0 + P_1\end{aligned}\quad (39)$$

Из формулы (1'), при $x_e = 0$; $y_e = 0$; $z_e = h$, имеем на основании, (21):

$$\xi_g = F_1(t) - h\psi; \quad \eta_g = F_2(t) - h\theta_1; \quad \zeta_g = F_3(t) - h \quad (38')$$

значит, будет

$$\xi''_g = F''_1(t) - h\psi''; \quad \eta''_g = F''_2(t) - h\theta''_1; \quad \zeta''_g = F''_3(t) \quad (40)$$

Обозначим реакции при покое корабля, выраженные формулой (13), через Ξ_{e0} , H_{e0} , Z_{e0} , тогда на основании уравнений (39) и (40)

$$\begin{aligned}\Xi_e &= \Xi_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} F''_1(t); \quad H_e = H_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} F''_2(t) \\ Z_e &= Z_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} F''_3(t)\end{aligned}\quad (41)$$

а так как на основании формулы (3')

$$\begin{aligned}X_e &= \Xi_e + H_e \varphi - Z_e \psi \\ Y_e &= -\Xi_e \varphi + H_e - Z_e \theta_1 \\ Z_e &= \Xi_e \psi + H_e \theta_1 + Z_e\end{aligned}$$

то при очевидном обозначении будет

$$\begin{aligned}X_e &= X_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} [F''_1(t) + \varphi F''_2(t) - \psi F''_3(t)] \\ Y_e &= Y_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} [-\varphi F''_1(t) + F''_2(t) - \theta_1 F''_3(t)] \\ Z_e &= Z_{e0} + \frac{P_0 + P_1}{g} [\psi F''_1(t) + \theta_1 F''_2(t) + F''_3(t)]\end{aligned}\quad (42)$$

и моменты реакции

$$\begin{aligned}
 L_e &= Z_e y_e - Y_e z_e = \\
 &= L_{e0} - \frac{P_0 + p_1}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] h \\
 M_e &= X_e z_e - Z_e x_e = \\
 &= M_{e0} + \frac{P_0 + p_1}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] h \\
 N_e &= Y_e x_e - X_e y_e = \\
 &= \frac{P_0 + p_1}{g} l_1 [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)]
 \end{aligned} \tag{43}$$

в. Моменты от веса картушки равны нулю. Моменты от веса грузика и моменты магнитных сил остаются прежние:

$$L_p = L_{p0}; \quad M_p = M_{p0}; \quad N_p = N_{p0} \tag{44}$$

г. Моменты магнитных сил остаются без изменения:

$$L_m = L_{m0}; \quad M_m = M_{m0}; \quad N_m = N_{m0} \tag{45}$$

д. Моменты сил инерции переносного движения грузика. На основании формул (38') и (40) имеем:

$$\begin{aligned}
 \xi_p'' &= F_1''(t) + (h - h_1) \psi''; \quad \eta_p'' = F_2''(t) + l_1 \varphi'' - (h - h_1) \theta_1'' \\
 \zeta_p &= F_3''(t) - l_1 \varphi''
 \end{aligned}$$

Следовательно, слагающие сил инерции будут

$$\begin{aligned}
 E_i &= -\frac{p_1}{g} F_1''(t) - \frac{p_1}{g} (h - h_1) \psi'' \\
 H_i &= -\frac{p_1}{g} F_2''(t) - \frac{p_1}{g} l_1 \varphi'' + \frac{p_1}{g} (h - h_1) \theta_1'' \\
 V_i &= -\frac{p_1}{g} F_3''(t) + \frac{p_1}{g} l_1 \varphi''
 \end{aligned}$$

и, значит,

$$X_i = X_{i0} - \frac{p_1}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)]$$

$$Y_i = Y_{i0} - \frac{p_1}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)]$$

$$Z_i = Z_{i0} - \frac{p_1}{g} [\psi F_1''(t) + \theta_1 F_2''(t) + F_3''(t)]$$

и моменты сил инерции будут

$$\begin{aligned} L_i &= Z_i y_p - Y_i z_p = -Y_i h_i = L_{i0} + \\ &+ \frac{p_1}{g} h_1 [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \\ M_i &= X_i z_p - Z_i x_p = X_i h_1 - Z_i l_1 = \\ &= M_{i0} - \frac{p_1}{g} h_1 [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] + \\ &+ \frac{p_1}{g} l_1 [\psi F_1''(t) + \theta_1 F_2''(t) + F_3''(t)] \\ N_i &= Y_i x_p - X_i y_p = Y_i l_1 = \\ &= N_{i0} - \frac{p_1 l_1}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \end{aligned} \quad (46)$$

По подстановке составленных выражений моментов в уравнение (14) мы получим два ряда членов: 1) суммы членов, относящихся к покоящемуся кораблю, и 2) суммы членов, содержащих функции $F_1''(t)$, $F_2''(t)$, $F_3''(t)$, происходящих от движения корабля. Очевидно, что первые члены после переноса в левые части уравнений дадут левые части уравнений (19), которые на основании формул (20) после деления на A , B , C представят свободные колебания картушки [см. уравнения (18), (19), (21)]:

$$\theta_1'' + n_1^2 \theta_1 = 0$$

$$\psi'' + n_2^2 \psi - \frac{1}{B} (MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1) = 0$$

$$\varphi'' + n_3^2 \varphi - \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 + n_1^2 \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{gC} \theta_1 = 0$$

в правых же частях будут суммы (после перемены знака у первого уравнения)

$$\begin{aligned} & \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{gA} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \\ & \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{gB} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] \\ & - \frac{p_1 l_1}{gC} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \end{aligned}$$

По формулам (20)

$$\frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{gA} = \frac{n_1^2}{g}; \quad \frac{MH}{B} = \frac{C}{B} n_3^2 \approx 2n_3^2$$

поэтому, присоединив сопротивление среды, мы можем написать общие уравнения колебательного движения катушки на движущемся корабле в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_1'' + 2f_1 \theta_1' + n_1^2 \theta_1 &= \frac{n_1^2}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \\ \psi'' + 2f_2 \psi' + n_2^2 \psi &= \frac{n_1^2}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] + \\ &+ \frac{C}{B} \left[n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right] \\ \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3^2 \varphi &= -\frac{p_1 l_1}{gC} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] + \\ &+ \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 - \frac{n_1^2}{g} \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{C} \theta_1 \end{aligned} \quad (47)$$

причем последний член в третьем уравнении может быть по его малости отброшен. Здесь функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ представляют уравнения движения точки, а значит и острия шпильки

$$\xi_e = F_1(t); \quad \eta_e = F_2(t); \quad \zeta_e = F_3(t) \quad (48)$$

§ 7. Прежде чем прилагать эти общие уравнения к частным случаям, сделаем одно замечание исторического характера.

Вопрос о влиянии качаний корабля на показания компаса впервые рассмотрен Вильямом Томсоном (лордом Кельвином) в статье: „On the perturbations of the compass produced by the Rolling of the Ship“, помещенной первоначально в „Philosophical Magazine“, vol. XLVIII, Nov., 1847, pp. 363—369, вошедшей затем в том IV собрания сочинений Томсона (Mathematical and physical papers, vol. IV, pp. 464—469).

В этой статье Томсон, ограничиваясь рассмотрением чисто боковой качки корабля, получает из простых геометрических соображений уравнение, равносильное третьему из уравнений (47), и, заметив, что возмущающая сила — синусоидальная, приходит к общему выводу, что если сделать период свободных колебаний значительно больше периода изменчивости силы, то возмущения будут весьма малые. За такой период он берет 30 сек. и ставит следующую задачу: „Является важный практический вопрос, каким образом такой период может быть достигнут совместно с малостью стрелок компаса, которая необходима для возможности точного уничтожения девиации компаса“.

Поставив этот общий вопрос, знаменитый автор, не вдаваясь в изложение подробностей и разбора влияния качаний корабля, „что слишком бы удлинило его статью“, после трехлетней экспериментальной работы, к 1877 г. создал свой компас с легкой картушкой, малыми стрелками, приборами для полного уничтожения девиации (т. е. полукруговой, четвертной и креновой), дефлектором и пеленгатором и представил его английскому адмиралтейству.

Адмиралтейство не сочло возможным принять компасы Томсона на суда флота, но допустило к пользованию их капитанами, подобно тому как многие пользуются своим секстаном, а не казенным, и пять лет отклоняло домогательства Томсона. Лишь чисто случайное обстоятельство повело к их введению на судах английского военного флота.

В 1882 г. правитель Египта Араби-паша восстал против султана турецкого, объявил себя независимым и взял под свой контроль Суэцкий канал, большая часть акций которого уже тогда принадлежала английскому правительству.

Англия послала свой броненосный флот под командой адмирала Сеймура умирять Араби-пашу. Одним из наиболее мощных броненосцев „Инфлексибл“, вооруженным 80-тонными 17-дюймового калибра орудиями, командовал тогда капитан 1-го ранга Фишер, который во время мировой войны в чине генерал-адмирала (admiral of the fleet) был первым лордом адмиралтейства и направлял все стратегические действия английского флота. Другим таким же кораблем командовал капитан Хозам, впоследствии также полный адмирал. У обоих капитанов были свои собственные компасы Томсона.

Сеймур без всяких дипломатических проволочек разгромил флотом главный оплот Араби — форты Александрии. Араби-паша покорился, передал Египет „во временное управление Англии для установления порядка и обеспечения свободы судоходства по Суэцкому каналу“.

Это „временное управление“ продолжалось и по днесь, Араби же с изрядной пенсией, в 20 000 ф. ст. в год, был поселен в райском климате Сешельских островов.

В бою с фортами Александрии на обоих кораблях, да и на всех прочих, от сотрясений при стрельбе из громадных орудий все компасы вышли из строя: их картушки ходили вкруговую, ни править по ним, ни определяться было невозможно; лишь компасы Томсона у Фишера и Хозама действовали превосходно, и успех боя в значительной мере зависел от кораблей, которыми они командовали. Они уверенно маневрировали среди отмелей, выбирали близкую дистанцию, с которой стрельба из 80-тонных орудий отличалась удивительной меткостью, а их снарядам не могли противостоять никакие — ни каменные, ни земляные — брустверы.

В своих донесениях и Фишер и Хозам дали восторженные отзывы о компасах Томсона. Адмиралтейство вынуждено было распустить тот состав компасного комитета, который не признавал компасов Томсона, назначить новый состав комитета под председательством Фишера. Компасы Томсона на основании боевого опыта были немедленно приняты к употреблению на судах английского флота.

§ 8. После этого замечания вернемся к уравнениям (47) и применим их последовательно к различным случаям качаний корабля, начиная с простейших.

Но сперва надо показать, каким образом задается движение корабля и как, зная это движение, курс корабля, положение компаса на корабле, составить функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, входящие в уравнение (47). Эту выкладку проведем в общем виде, чтобы не повторять ее в каждом отдельном частном случае.

При рассмотрении качаний корабля берут две системы координат: относительную и абсолютную, как и при движении всякого твердого тела.

За начало координат относительной системы, т. е. неизменной в корабле, принимают точку K — центр тяжести корабля — и направляют эти оси так: Kx_1 — по диаметральной плоскости параллельно грузовой ватерлинии в нос, Ky_1 — перпендикулярно диаметральной плоскости к правому борту, Kz_1 — в диаметральной плоскости перпендикулярно грузовой ватерлинии вверх.

Таким образом, плоскости корабельных координат суть: Kx_1z_1 — диаметральной плоскости, Ky_1z_1 — плоскости шпангоута, Kx_1y_1 — плоскости, параллельная грузовой, причем все три плоскости пересекаются в точке K — центре тяжести корабля.

За оси координат, неизменные в пространстве, принимают то положение осей $Kx_1y_1z_1$, которое они занимают при равновесии и покое корабля на тихой воде. Эти оси обозначим через $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$ и, чтобы связать их с осями $Kx_1y_1z_1$, берем Эйлера углы совершенно так же, как указано в § 1, обозначив их соответственно через Φ , Ψ , Θ_1 , так что при малых размахах угол Φ представляет приближенно рыскание корабля на курсе, угол Ψ — килевую качку, угол Θ_1 — боковую качку.

Положение корабля в любой момент времени t определяется:

- 1) мгновенными значениями координат его центра тяжести ξ_{1k} , η_{1k} , ζ_{1k} относительно осей $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$;
- 2) мгновенными значениями углов Φ , Ψ , Θ_1 .

Все эти шесть переменных должны быть заданы в функции времени t .

Положение компаса на корабле, точнее говоря — его топки и совпадающего с нею острия шпильки E , задается ее координатами:

$$x_{1e} = a_e; y_{1e} = b_e; z_{1e} = h_e \quad (49)$$

относительно корабельных осей $Kx_1y_1z_1$.

Обыкновенно главный компас ставится в диаметральной плоскости, так что $b_e = 0$. На современных судах, снабженных рулевыми машинами, и путевой компас ставят в диаметральной плоскости корабля.

Величина h_e обыкновенно положительная и в сотни раз больше h , равной EG , ибо компас ставится много выше центра тяжести корабля.

Положим, что корабль правит по магнитному курсу α , которому равен и компасный, ибо девиация предполагается уничтоженной.

Прежде всего необходимо установить соотношение между осями $K_0\xi_1\zeta_1$ и осями $E\xi\zeta$ или осями, им параллельными, причем плоскость $E\xi\zeta$ есть плоскость магнитного меридиана места.

У этих двух систем оси $K\zeta_1$ и $E\zeta$ параллельны и вертикальны, поэтому координаты ζ и ζ_1 будут отличаться между собою на величину h_e — превышения точки E над точкою K , так что будет

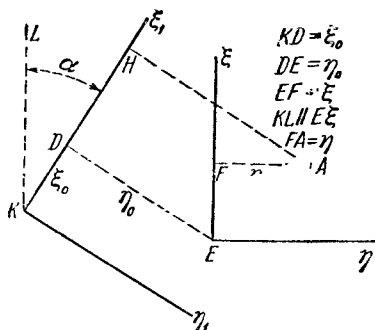
$$\zeta_1 = \zeta + h_e$$

Составив чертеж на плоскости $K\xi_1\eta_1$ (фиг. 4), мы и получим формулы

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 + \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \\ \eta_1 &= \eta_0 - \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned} \quad (50a)$$

и обратно:

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1 - \xi_0) \cos \alpha - (\eta_1 - \eta_0) \sin \alpha \\ \eta &= (\xi_1 - \xi_0) \sin \alpha + (\eta_1 - \eta_0) \cos \alpha \end{aligned} \quad (50b)$$



Фиг. 4.

Таблица косинусов между осями $Kx_1y_1z_1$, корабля и неподвижными осями $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$ будет:

	ξ_1	η_1	ζ_1
x_1	1	Φ	$-\Psi$
y_1	$-\Phi$	1	$-\Theta_1$
z_1	Ψ	Θ_1	1

Следовательно, будет вообще

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_{10} + x_1 - \Phi y_1 + \Psi z_1 \\ \eta_1 &= \eta_{10} + \Phi x_1 + y_1 + \Theta_1 z_1 \\ \zeta_1 &= \zeta_{10} - \Psi x_1 - \Theta_1 y_1 + z_1\end{aligned}\quad (51)$$

где величины ξ_{10} , η_{10} , ζ_{10} суть координаты точки K относительно осей $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$, представляющие движение центра, которое задается.

Для точки E острия шпильки, координаты которого суть по предположению

$$x_{1e} = a_e; \quad y_{1e} = b_e = 0; \quad z_{1e} = h_e$$

получим:

$$\begin{aligned}\xi_{1e} &= \xi_{10} + a_e + \Psi h_e \\ \eta_{1e} &= \eta_{10} + \Phi a_e + \Theta_1 h_e \\ \zeta_{1e} &= \zeta_{10} - \Psi a_e = h_e\end{aligned}\quad (52)$$

Составив по этим формулам выражения ξ_{1e} , η_{1e} , ζ_{1e} , по формулам (50а), (50б) составим ξ_e , η_e , ζ_e , т. е. координаты, отнесенные к осям, включающим магнитный меридиан; это и даст нам функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, ибо

$$\xi_e = F_1(t); \quad \eta_e = F_2(t); \quad \zeta_e = F_3(t) \quad (53)$$

Эти функции и входят в уравнения (47), в которых после этой постановки останутся только неизвестные φ , ψ , θ_1 , определяемые этими уравнениями.

§ 9. Относительно уравнений (47) необходимо высказать ряд замечаний.

1. Как видно, эти уравнения, хотя и линейные, но не с постоянными, а с переменными коэффициентами, представляющими периодические функции времени. По виду своему они напоминают уравнения движения Луны, рассмотренные и численно по методу последовательных приближений интегрированные Эйлером в его „Новой теории Луны“, извлечения из которой переведены мною на русский язык.

Прилагая методу последовательных приближений, весьма важно отдать себе предварительно отчет о сравнительной величине различных членов уравнений.

Возьмем для примера второе из уравнений (47); все сказанное о нем будет применимо и к двум прочим.

Это уравнение есть

$$\psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi = \frac{n_1^2}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_2''(t)] + \\ + \frac{C}{B} \left[n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 i_1}{C} \right]$$

Внесем множитель $\frac{1}{g}$ в скобки; тогда в них получатся величины

$$\frac{F_1''(t)}{g}, \quad \frac{F_2''(t)}{g}, \quad \frac{F_3''(t)}{g}$$

представляющие безразмерные отвлеченные числа, которые по свойству качания корабля все будут малые, т. е. около 0.1—0.2, т. е., по нашему условию, „малые“ по сравнению с 1, т. е. „малые первого порядка“. Произведения этих величин на φ , ψ , θ_1 будут второго порядка, которые при самом составлении уравнений были отброшены, поэтому в каждой из скобок надо удерживать лишь тот член, который множителя θ_1 , φ или ψ не содержит.

Уравнения (47) примут вид

$$\begin{aligned}\theta_1'' + 2f_1'\theta_1' + n_1^2\theta_1 &= \frac{n_1^2}{g} F_2''(t) \\ \psi'' + 2f_2'\psi' + n_2^2\psi &= \frac{n_1^2}{g} F_1''(t) + \frac{C}{B} \left[n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right] \\ \varphi'' + 2f_3'\varphi' + n_3^2\varphi &= -\frac{p_1 l_1}{gC} F_2''(t) + \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1\end{aligned}\quad (54)$$

и будут линейные с *постоянными* коэффициентами, как это имеет место во всякой задаче „о малых колебаниях“ в первом приближении, которое в нашем случае является и окончательным.

2. Томсон рекомендует брать период

$$\tau_3 = \frac{2\pi}{n_3} = 30 \text{ сек.}$$

Значит, будет

$$n_3^2 = \frac{4\pi^2}{900} \approx 0.044$$

Вместе с тем он пишет: „Вообще не требуется передвижного грузика у картушки при переходе от крайних северных магнитных широт до крайних южных“. Значит, по Томсону, можно брать $p_1 = 0$, а тогда наклон картушки ψ_0 при покое и равновесии корабля будет изменяться в пределах

$$\text{от } +\frac{C}{B} \cdot \frac{n_3^2}{n_1^2} \operatorname{tg} i_1 \text{ до } -\frac{C}{B} \cdot \frac{n_3^2}{n_1^2} \operatorname{tg} i_1 \quad \left(\frac{C}{B} \approx 2, \operatorname{tg} i_1 \approx 4 \right)$$

Уклон ψ_0 картушки в $5^\circ \approx \frac{1}{12}$ уже мешает править.

Значит, будет $\frac{8n_3^2}{n_1^2} \leq \frac{1}{12}$; $n_3^2 \approx 0.044$

следовательно,

$$n_1 \approx 2.1$$

и

$$\tau_1 \approx \tau_2 = \frac{2\pi}{n_1} \approx 3 \text{ сек.}$$

Если бы приняли явно недопустимый уклон $\psi^\circ = 10^\circ = \frac{1}{6}$, то получили бы

$$n_1^2 \approx 50n_3^2 \text{ и } \tau_1 \approx \tau_2 \approx 4.2 \text{ сек.}$$

3. Отношение амплитуд двух последовательных свободных размахов катушки составляет вообще $e^{-f^2} = e^{-\frac{2\pi}{n}f}$; вместе с тем

$$m = \sqrt{n^2 - f^2} = n \left(1 - \frac{f^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx n \left(1 - \frac{f^2}{2n^2}\right)$$

Эти величины показаны в следующей таблице:

$\frac{f}{n}$	$e^{-\frac{2\pi f}{n}}$	$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{n^2}$
1/4	1 : 4.73	1 - 1/32
1/6	1 : 2.83	1 - 1/72
1/8	1 : 2.16	1 - 1/128
1/9	1 : 2.00	1 - 1/162
1/10	1 : 1.86	1 - 1/200

Т. е. от введения сопротивления, пропорционального первой степени скорости, погашение размахов происходит весьма быстро, период же почти не изменяется.

4. Нам придется пользоваться частными решениями уравнений вида

$$\omega'' + n^2\omega = n^2E \sin(kt + \delta) \quad (\text{а})$$

и

$$\omega'' + 2f\omega' + n^2\omega = n^2E \sin(kt + \delta) \quad (\text{б})$$

Частное решение уравнения (а) есть

$$\Omega = \frac{n^2}{n^2 - k^2} E \sin(kt + \delta) = \frac{T^2}{T^2 - \tau^2} E \sin(kt + \delta) \quad (\text{а'})$$

причем

$$\tau = \frac{2\pi}{n}; \quad T = \frac{2\pi}{k}$$

Для уравнения (6) частное решение есть

$$\Omega = \frac{n^2}{+ \sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2 k^2}} E \sin(kt + \delta + \varepsilon) \quad (55)$$

причем

$$\cos \varepsilon = \frac{n^2 - k^2}{+ \sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2 k^2}}$$

$$\sin \varepsilon = - \frac{2fk}{+ \sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2 k^2}} \quad (55')$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{2fk}{n^2 - k^2}$$

по $\operatorname{tg} \varepsilon$ найдется величина ε , знаки же $\cos \varepsilon$ и $\sin \varepsilon$ укажут ту четверть, в которой этот угол лежит.

В нашем вопросе изменение фазы ε не будет иметь значения, и важна лишь величина амплитуды колебаний, определяемая значением множителя

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{n^2}{+ \sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2 k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4f^2}{k^2} \cdot \frac{k^2}{n^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}} \end{aligned} \quad (56)$$

причем положено

$$q = \frac{k}{n} = \frac{T}{\tau}; \quad \mu = \frac{2f}{n}$$

так что множитель λ есть функция не трех переменных n, k, f , а только двух q и μ .

5. В системе (54) третье уравнение, которым определяется угол рыскания картушки φ , связано с первым, которым опреде-

ляется угол θ_1 , т. е. колебания катушки около ее оси NS. Коэффициент этой связи равен

$$n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} = \frac{1}{C} (MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1)$$

Очевидно, что этот коэффициент связи зависит от момента $p_1 l_1$ уравнивающего грузика. Обыкновенно этот грузик ставят так, чтобы было достигнуто магнитное уравнивание, т. е. чтобы

$$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0 \quad (57)$$

и линия NS катушки была горизонтальна, когда катушка *предварительно уравновешена механически*; или же, как рекомендует Томсон, этот грузик совсем не ставить, т. е. брать

$$p_1 = 0$$

и момента $MZ = MH \operatorname{tg} i$, происходящего от вертикальной слагающей земного магнетизма, не изменять.

Спрашивается: которое из этих двух крайних положений выгоднее?

Возьмем простейший и наиболее часто встречающийся случай, когда

$$F_2(t) = E \sin(kt + \delta)$$

значит,

$$F_2''(t) = -k^2 E \sin(kt + \delta)$$

Первое и третье уравнения (47) принимают тогда вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \theta_1'' + 2f_1 \theta_1' + n_1^2 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 E \sin(kt + \delta) \\ \text{б) } \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3^2 \varphi &= \frac{p_1 l_1}{gC} k^2 E \sin(kt + \delta) + \\ &+ \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned} \quad (58)$$

Из уравнения (а) следует частное решение

$$\eta_1 = -\frac{k^2}{g} \frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}} E \sin(kt + \delta + \varepsilon)$$

Обозначим для краткости письма

$$R_1 = \sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}; \quad R_3 = \sqrt{(n_3^2 - k^2)^2 + 4f_3^2 k^2} \quad (59)$$

Уравнение (b) по замене η_1 его величиною будет

$$\begin{aligned} \varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi &= \frac{p_1 l_1 k^2}{gC} E \sin(kt + \delta) - \\ &- \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} E \sin(kt + \delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

Его частное решение есть

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{p_1 l_1 k^2}{gC} \cdot \frac{E}{R_3} \sin(kt + \delta + \varepsilon_1) - \\ &- \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3} E \sin(kt + \delta + \varepsilon) \end{aligned} \quad (60)$$

Как видно, это частное решение зависит от величины p_1 и будет при $p_1 = 0$

$$\varphi = -\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_2} E \operatorname{tg} i \sin(kt + \varepsilon + \varepsilon_1) \quad (61)$$

а при $n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} = MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \sin(kt + \delta + \varepsilon_1) \quad (62)$$

Фазы не имеют практического значения, важны амплитуды, т. е. величины размахов; обозначим их соответственно при $p_1 = 0$

$$\text{амплитуда } A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (63)$$

при $n^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} = 0$

$$\text{амплитуда } A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (63')$$

причем амплитуды рассматриваются по их абсолютной величине, поэтому будет

$$\left| \frac{p_1 l_1}{C} \right| = |n_3^2 \operatorname{tg} i|$$

значит, отношение $A_0 : A_1$ будет

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{n_1^2}{R_1} = \frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}} \quad (64)$$

Это *общее* свойство колебательного движения катушки при всякой возмущающей силе, следующей синусоидальному закону, весьма важно, ибо множитель

$$\frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}}$$

как известно из теории вынужденных колебаний, может изменяться в весьма широких пределах, и *правильное* уравнивание катушки имеет весьма большое практическое значение.

Здесь необходимо пояснить, как надо понимать слова „*правильное* уравнивание“, как его производить и как его проверить, ибо обыкновенно оно производится *неправильно*, хотя 360 лет тому назад компасный мастер Норман в Лондоне производил его *правильно*.

Норман заметил, что катушка, у которой стрелки *намагничены не были*, будучи уравновешена двумя грузиками, расположенными по диаметрам NS и OW так, что оба диаметра были горизонтальны, *после намагничивания* принимала слегка наклонное положение и диаметр NS опускался N-м концом вниз, диаметр же OW оставался горизонтальным, и приходилось или передвигать грузик по диаметру NS в направлении к S, или прибавлять новый грузик между топкой и точкой S, или под самой точкой S.

Исследовав ближе этот вопрос, Норман построил специальный прибор, названный впоследствии инклинометром, и открыл так называемое „магнитное наклонение“.¹

Таким образом, когда стрелки не намагничены, Норман достиг *механического* уравнивания картушки, т. е. ее центр тяжести лежал в точности на прямой, перпендикулярной к плоскости картушки и проходящей через вершину топки или острие шпильки, если шпилька укреплялась на картушке. Добавочный же грузик уничтожал момент, происходящий от вертикальной слагающей земного магнетизма, т. е. удовлетворял условию

$$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

как это и нужно, чтобы формулы (63) и (64) имели место.

Впоследствии от практики Нормана *раздельного* уравнивания механического и магнитного отступили, стали производить *огульное* уравнивание и грузик устанавливать *после* того, как стрелки намагничены; так поступали 54 года тому назад, когда я работал в компасной мастерской Главного гидрографического управления, так поступают и теперь, и за все 360 лет никто не удосужился ни теоретически, ни экспериментально изучить этот вопрос.

Причина отступления от практики Нормана, по-видимому, состояла не столько в упрощении работы (замена двух операций одной), сколько в том, что уже более ста лет принято магниты проваривать в кипящем льняном масле, чтобы они сохранили свою силу и с течением времени не размагничивались, а готовую картушку в масле не проваришь.

6. Спрашивается: каким образом проверить, соблюдено ли у данной готовой картушки условие (25), и, если не соблюдено, как исправить?

В настоящее время к каждому компасу изготовления мастерских Главного гидрографического управления прилагается дефлектор де Коллонга и картушка Штемпеля с качающимися стрелками; этими приборами и надо воспользоваться.

¹ Свое открытие Норман опубликовал в изданной им в 1581 г. книге „A New Attractive“.

Свести компас на берег, установить на треноге, заменить картушку картушкой Штемпеля, поставить дефлектор, измерить вертикальную силу, переменить картушку на обыкновенную и, оставив магнит дефлектора на том отсчете, который ему придан при измерении вертикальной силы, поставить его на компас — вертикальная сила будет уничтожена дефлектором. Если при этом диаметр NS картушки сохранит горизонтальное положение, ее уравновешение правильное; если диаметр NS примет наклонное положение, — неправильное; тогда, перемещая добавочный грузик или наклеивая кусочки воска по диаметру NS, довести уравновешение до правильного.

7. Иногда встречаются компасы, у которых шпилька закреплена на картушке, а топка — на колонке котелка. Спрашивается: которой конструкции отдать предпочтение и почему?

Шпильку следует закреплять на *картушке*, ибо этим обеспечивается неизменность относительного расположения острия шпильки и центра тяжести картушки. Когда же на картушке укреплена топка, в особенности обыкновенная, а не брауэровская, то топка может перемещаться по шпильке, а от этого меняется относительное расположение точки опоры и центра тяжести и появляются добавочные моменты, учесть которые ввиду их случайного характера невозможно. Эти моменты производят добавочные нежелательные колебания картушки. Установка шпильки относится уже к производственным вопросам, таковых вопросов множество — вдаваться в их рассмотрение в этой статье невозможно; упомянем лишь об одном из них.

8. Еще много лет тому назад были более или менее удачные попытки увеличить погашение колебаний сухой картушки, располагая около ее стрелок массы красной меди; образующиеся токи Фуко создавали сопротивление движению, *пропорциональное первой* степени скорости, и вносили погашение по показательному закону. Современная техника с ее усилительными лампами, фотоэлементами, кинотронами и пр. дает основание полагать, что теперь имеются такие возможности, о которых нельзя было и мечтать не то что 50 лет тому назад, но и 5 лет назад.

§ 10. Выведем теперь общие формулы для расчета колебаний картушки, вызываемых заданными качаниями корабля при данном его курсе как относительно меридиана, так и направления бега волн, скорости хода и положения компаса на корабле. Формулы эти приведем в такой вид, чтобы получение по ним численных результатов сводилось к простым арифметическим действиям, не требующим пояснений.

Качания корабля на волнении в общем случае состоят из следующих движений:

а) *орбитальное движение* центра тяжести корабля, а с ним и всего корабля;

б) *боковая качка*, т. е. качания корабля около его продольной оси, проходящей через ц. т. корабля;

в) *килевая качка*, т. е. качания около поперечной оси, проходящей через ц. т. корабля;

г) *рыскание*, т. е. качания около оси, перпендикулярной к плоскости грузовой ватерлинии, накрашенной на корабле, иначе к плоскости, перпендикулярной к двум другим осям и проходящей через ц. т. корабля.

Каждое из этих движений оказывает свое механическое воздействие на картушку компаса и производит свое возмущение картушки. Полное возмущение и складывается из этих частных.

Так как уравнения (54), которыми эти частные возмущения определяются, линейные и с постоянными коэффициентами, то каждое из них может быть рассчитано отдельно, независимо от прочих.

Составим общие формулы для этих отдельных расчетов.

а. *Влияние орбитального движения.* Орбитальное движение происходит в плоскости бега волн, и, если бы корабль не имел хода, эта плоскость была бы неподвижна и в ней ц. т. корабля описывал бы эллиптическую орбиту. Когда же корабль имеет ход, то траектория его ц. т. представит спираль с упомянутым эллиптическим основанием; причем шаг этой спирали равен длине, проходимой кораблем за время одного обращения центра тяжести.

Так как прямолинейное и равномерное поступательное движение корабля (ход) на компас не влияет, то достаточно рассмотреть случай, когда корабль хода не имеет.

В § 8 указаны те системы координатных осей, которыми надо пользоваться, и даны формулы перехода от одних осей к другим.

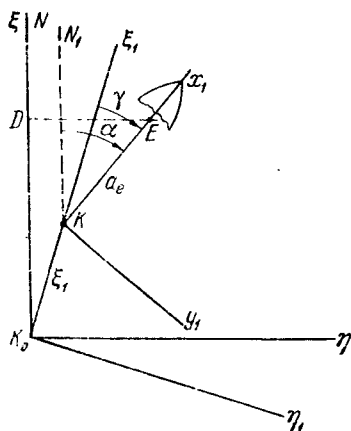
Эти формулы суть: (50а), (50б), (51), (52) и (53); они доставляют требуемые выражения функций $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, входящих в уравнения движения как полные (47), так и упрощенные (54).

Итак, положение компаса на корабле, точнее говоря, точки E топки, являющейся спорою острия шпильки, укрепленной на картушке, таково:

$$x_{1e} = a_e; \quad y_{1e} = b_e; \quad z_{1e} = h_e$$

Орбитальное движение корабля задается движением точки K в плоскости $K_0\xi_1\zeta_1$ бега волн (фиг. 5). Уравнения этого движения — вида

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a \sin(kt + \delta) \\ \eta_1 &= b \cos(kt + \delta) \end{aligned} \quad (65)$$



Фиг. 5.

Пусть плоскость $K_0\xi$ есть плоскость магнитного меридиана, α — курс корабля, тогда по фиг. 5 имеем:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \xi_e = \xi_1 \cos(\alpha - \gamma) + a_e \cos \alpha = \\ &= a \sin(kt + \delta) \cos(\alpha - \gamma) + a_e \cos \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_1 \sin(\alpha - \gamma) + a_e \sin \alpha = \\ &= a \sin(kt + \delta) \sin(\alpha - \gamma) + a_e \sin \alpha \\ F_3(t) &= \zeta_e = b \cos(kt + \delta) \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$F_1''(t) = -ak^2 \cos(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta)$$

$$F_2''(t) = -ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) \quad (66)$$

$$F_3''(t) = b \cos(kt + \delta)$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} \theta_1'' + 2f_1\theta_1' + n_1^2\theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g}ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) \\ \psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi &= -\frac{n_1^2}{g}ak^2 \cos(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) + \\ &+ \frac{C}{B} \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{P_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi &= \frac{P_1 l_1}{C_g} ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) + \\ &+ \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{P_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned} \quad (67)$$

Эти уравнения имеют как раз вид уравнений (58), рассматриваемых в п. 5 § 9, стоит только в уравнении (58) положить

$$E = a \sin(\alpha - \gamma) \quad (67')$$

Это показывает, что лишь горизонтальная слагающая орбитального движения вызывает рыскание компаса; амплитуды этого рыскания даются формулами (63).

Обратим внимание на то, что величина K должна рассчитываться по видимому периоду волн T_1 , который связан с истинным периодом волн T , скоростью хода корабля v м/сек. и его курсовым углом γ относительно направления бега волн формулой

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{v}{L} \cos \gamma \quad (68)$$

где L — длина волны, которая связана с истинным ее периодом соотношением

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} \quad (68')$$

б. Влияние боковой качки. Координаты компаса обозначаем по-прежнему

$$x_e = a_e; \quad y_e = 0; \quad z_e = h_e$$

Боковая качка корабля представляет его колебание около продольной оси K_0x_1 и выражается формулой вида

$$\Theta_1 = [n \sin(\lambda t + \varepsilon_1) + m \sin(kt + \varepsilon)] \Theta_0 \sin \gamma \quad (69)$$

где

$$\lambda = \frac{2\pi}{\tau}; \quad k = \frac{2\pi}{T_1}$$

причем τ есть период свободных боковых качаний корабля на тихой воде, T_1 — видимый период волн.

Пока отношение

$$\frac{k}{\lambda} < 0.8 \quad \text{и} \quad \frac{k}{\lambda} > 1.2$$

то приближенно

$$n = 2m$$

когда же

$$0.8 < \frac{\lambda}{\lambda_1} < 1.2$$

то, вместо формулы (69), можно брать

$$\Theta_1 = m \Theta_0 \sin(kt + \varepsilon) \quad (69')$$

Тогда будет

$$\xi_{1e} = a_e; \quad \eta_{1e} = h_e \Theta_1; \quad z_{1e} = h_e$$

значит,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \xi_e = \xi_{1e} \cos \alpha - \eta_{1e} \sin \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_{1e} \sin \alpha + \eta_{1e} \cos \alpha \\ F_3(t) &= \zeta_e = h_e \end{aligned} \quad (70)$$

Следовательно, будет

$$\begin{aligned} F_1''(t) &= h_e [n\lambda^2 \sin(\lambda t + \varepsilon_1) + mk^2 \sin(kt + \varepsilon)] \Theta_0 \sin \gamma \sin \alpha \\ F_2''(t) &= -h_e [n\lambda^2 \sin(\lambda t + \varepsilon_1) + mk^2 \sin(kt + \varepsilon)] \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \quad (70') \\ F_3''(t) &= 0. \end{aligned}$$

В этих формулах Θ_0 есть волновой склон, составляющий около 8° . Корабль имеет наибольшие размахи качки, когда период его свободных качаний τ близок к видимому периоду T_1 волны.

Размахи качки в этом случае могут достигать до $30-35^\circ$ на сторону; этим случаем и ограничимся, т. е. положим $n=0$, так что будет

$$\begin{aligned} F_1''(t) &= -h_e m k^2 \Theta_0 \sin \gamma \sin \alpha \sin (kt + \epsilon) \\ F_2''(t) &= -h_e m k^2 \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \sin (kt + \epsilon) \end{aligned} \quad (71)$$

и уравнения (54) примут вид

$$\begin{aligned} \theta_1'' + 2f_1\theta_1' + n_1^2\theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \sin \alpha \sin (kt + \epsilon) \\ \psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \sin (kt + \epsilon) + \\ &+ \frac{C}{B} \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi &= \frac{p_1 l_1}{gC} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \sin (kt + \epsilon) + \\ &+ \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned} \quad (72)$$

т. е. тот же вид, как уравнения (58); причем

$$E = h_e m \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \quad (72')$$

и, значит, амплитуда рыскания будет при $p_1=0$

$$\text{амплитуда } A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (73)$$

при $MN \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$

$$\text{амплитуда } A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (73')$$

Этот случай есть как раз тот, который был рассмотрен Томсоном, и наш результат

$$\varphi = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} h_e m \Theta_0 \sin \gamma \operatorname{tg} i \cos \alpha \sin (kt + \epsilon + \epsilon_1) \quad (74)$$

совпадает с данным Томсоном, если положить $\gamma = 90^\circ$, т. е. корабль идет лагом к волне, и соответственно изменить обозначения Томсона на наши.

в. *Влияние килевой качки.* Координаты компаса обозначаем по-прежнему:

$$x_e = a_e; \quad y_e = 0; \quad z_e = h$$

Килевая качка состоит только из вынужденных колебаний и выражается формулой вида

$$\Psi = \Psi_0 \sin(kt + \delta) \quad (75)$$

причем

$$k = \frac{2\pi}{T_1}$$

где T_1 — *видимый* период волны, определяемый по формуле (68).

По формулам (52) будет

$$\begin{aligned} \xi_{1e} &= a_e + h_e \Psi \\ \eta_{1e} &= 0 \\ \zeta_{1e} &= -a_3 \Psi + h_e \end{aligned} \quad (76)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \xi_e = \xi_{1e} \cos \alpha - \eta_{1e} \sin \alpha = (a_e + h_e \Psi) \cos \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_{1e} \sin \alpha + \eta_{1e} \cos \alpha = \xi_{1e} \sin \alpha = (a_e + h_e \Psi) \sin \alpha \\ F_3(t) &= -a_3 \Psi + h_e \end{aligned} \quad (77)$$

и по дифференцировании:

$$\begin{aligned} F_1''(t) &= -k^2 h_e \Psi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta) \\ F_2''(t) &= -k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) \end{aligned} \quad (78)$$

По подстановке первое и третье уравнения (54) будут

$$\begin{aligned} \theta_1'' + 2f_1 \theta_1' + n_1^2 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) \\ \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3^2 \varphi &= \frac{p_1 l_1}{gC} k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) + \\ &+ \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned} \quad (79)$$

т. е. имеют вид (58). Значит, амплитуды рыскания получаются по формулам (63), (63'):

при $p_1 = 0$

$$A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (80)$$

при $MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$

$$A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$$

причем

$$E = h_e \Psi_0 \sin \alpha \quad (80')$$

г. Влияние рыскания корабля. Координаты компаса:

$$x_{1e} = a_e; \quad y_{1e} = 0; \quad z_{1e} = h_e$$

Рыскание корабля на курсе, производимое волной, состоит только из вынужденного колебания, выражаемого формулой

$$\Phi = \Phi_0 \sin(kt + \delta_1); \quad \Theta_1 = 0; \quad \Psi = 0$$

причем

$$k = \frac{2\pi}{T_1}$$

где T_1 — видимый период волн, определяемый по формуле (68).

По формуле (52) имеем:

$$\xi_{1e} = a_e$$

$$\eta_{1e} = a_e \Phi$$

$$\zeta_{1e} = h_e$$

Затем по формуле (50b) получаем:

$$F_1(t) = \xi_e = \xi_{1e} \cos \alpha - \eta_{1e} \sin \alpha = a_e \cos \alpha - a_e \Phi \sin \alpha$$

$$F_2(t) = \eta_e = \xi_{1e} \sin \alpha + \eta_{1e} \cos \alpha = a_e \sin \alpha + a_e \Phi \cos \alpha$$

Следовательно,

$$F_1''(t) = k^2 a_e \Phi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta_1)$$

$$F_2''(t) = -k^2 a_e \Phi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta_1)$$

и первое и третье уравнения (54) будут

$$\theta_1'' + 2f_1\theta_1' + n_1^2\theta_1 = -\frac{n_1^2}{g} k^2 a_e \Phi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta_1)$$

$$\varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi = \frac{p_1 l_1}{gC} a_e \Phi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta_1) + \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C}\right) \theta_1$$

Эти уравнения имеют вид (58); следовательно, амплитуды колебаний будут
при $p_1 = 0$

$$A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i \quad (81)$$

при $MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$

$$A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$$

причем

$$E = a_e \Phi_0 \cos \alpha \quad (81')$$

Для удобства применения полученных результатов к числовым расчетам сделаем общую их сводку.

Координаты точки:

$$x_{1e} = a_e; \quad y_{1e} = 0; \quad z_{1e} = h_e$$

Периоды свободных качаний катушки:
вокруг оси NS

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1} \quad (\text{около } 3-4 \text{ сек.})$$

вокруг оси OW

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{n_2} \approx \tau_1$$

Рыскание φ картушки

Движение корабля	Уравнения движения корабля	E	$p_1 = 0$	
			A_0	
Орбитальное	$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= a \sin (kt + \delta_1) \\ \dot{\gamma}_1 &= b \cos (kt + \delta_1) \end{aligned}$	$a \sin (z - \gamma)$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
				A_1
Боковая качка	$\theta_1 = m \theta_0 \sin \gamma \sin (kt + \varepsilon)$	$h_e \theta_0 \sin \gamma \cos z$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
Килевая качка	$\Psi = \Psi_0 \sin (kt + \varepsilon_1)$	$h_e \Psi_0 \sin z$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
Рыскание	$\Phi = \Phi_0 \sin (kt + \varepsilon_2)$	$a_e \Phi_0 \cos z$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$

вокруг вертикальной оси

$$\tau_3 = \frac{2\pi}{n_2} \approx 30 \text{ сек.}$$

Видимый период волны (68)

$$T_1 = \frac{2\pi}{k}; \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{v}{\lambda} \cos \gamma$$

Истинный период волны

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

где λ — длина волны.

Скорость хода корабля v м/сек.

Курсовой угол, считаемый от направления бега волн, γ .

Магнитный курс корабля α .

$$R_1 = \sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}; \quad R_3 = \sqrt{(n_3^2 - k^2)^2 + 4f_3^2 k^2}$$

Примем

$$\mu = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = \frac{f_3}{n_3} = \frac{1}{5}; \quad e^{-2\pi\mu} = 1:3.5 = 0.284$$

или

$$\mu = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = \frac{f_3}{n_3} = \frac{1}{10}; \quad e^{-2\pi\mu} = 1:1.86 = 0.536$$

По поводу этой сводки сделаем следующие замечания.

1. Очевидно, что легко составить такую же таблицу для углов θ_1 и ψ ; но мы ограничились углом φ потому, что этот угол представляет целиком погрешность показаний компаса во всякий момент времени.

2. Значения величин E показывают, что угол φ изменяется в зависимости от магнитного курса корабля; изменения эти имеют полукруговой характер, и, например, влияние боковой качки вносит погрешность, совершенно подобную креновой девиации.

3. Угол φ зависит от угла γ — курса корабля по отношению к направлению бега волн; но эта зависимость не прямая, а косвенная, и происходит оттого, что качания корабля зависят от угла γ . При изменении угла γ изменяются действующий волновой склон,

действующая длина волны, видимый период волн, а этими элементами и определяется качка корабля.

4. Обратим внимание, что при прочих одинаковых условиях рыскание φ картушки пропорционально $\operatorname{tg} i$, т. е. тангенсу угла наклона: чем этот тангенс меньше, тем компас спокойнее.

5. По формулам, показанным в сводке, расчет амплитуды рыскания картушки, происходящего от каждого рода качаний корабля, в отдельности настолько прост, что не требует пояснений.

Чтобы получить совокупное влияние нескольких колебаний, надо взять сумму абсолютных величин их амплитуд, ибо фазовые углы могут скомбинироваться так, что все синусы одновременно обратятся в $+1$.

6. Для облегчения расчетов помещаем табличку значений λ [формула (56)] (см. стр. 160).

Г л а в а II

КОЛЕБАНИЯ КАРТУШКИ В ЖИДКОСТИ

§ 11. Малое погашение размахов „сухой“ картушки магнитного компаса заставило еще много лет тому назад прибегнуть, в особенности для путевых компасов, к устройству компасов с жидкостью.

Динамика их колебаний существенно отличается от динамики колебаний „сухой“ картушки. Это отличие состоит не только в более сильном погашении размахов, а главным образом в том, что картушка почти плавает в жидкости, оказывая самое ничтожное давление на шпильку, которая только центрует картушку в котелке, не давая ей касаться его внутренней поверхности; вертикальная слагающая реакции топки изменяется лишь в тесных пределах, поскольку изменяются сила поддержания и вес картушки вследствие движений корабля.

Чтобы составить уравнения движения картушки, будем следовать методу, изложенному в гл. I, внося лишь необходимые изменения.

§ 12. Начнем рассмотрение со свободных колебаний картушки, предполагая, что корабль неподвижен, картушка же выведена

из положения равновесия и без всякого толчка предоставлена самой себе.

Само собою разумеется, что все изложенное в § 1 остается без изменения.

Вдобавок к силам, перечисленным в § 2, на картушку действует сила поддержания Q_0 , приложенная в центре плавучести; координаты этой точки обозначим через x_q, y_q, z_q , так что будет

$$x_q = 0; \quad y_q = 0; \quad z_q = a \quad (82)$$

вместе с тем

$$\xi_q = -a\psi; \quad \eta_q = -a\theta_1; \quad \zeta_q = a - h \quad (83)$$

Обозначим проекции силы поддержания на абсолютные оси через E_q, H_q, Z_q и проекции реакции шпильки по-прежнему через E_e, H_e, Z_e , весом грузика p_1 пренебрежем; тогда на основании уравнений (83) будет

$$E_e + E_q = -\frac{P_0}{g} h\psi''; \quad H_e + H_q = -\frac{P_0}{g} h\theta_1; \quad -P_0 + Z_e + Z_q = 0$$

Так как вес картушки P_0 и сила поддержания Q_0 известны, то ее слагающие суть $E_q = H_q = 0, Z_q = Q_0$, и из предыдущих уравнений имеем:

$$E_e = -\frac{P_0}{g} h\psi''; \quad H_e = -\frac{P_0}{g} h\theta_1; \quad Z_e = P_0 - Q_0 = q_0 \approx 0 \quad (84)$$

Соппротивление жидкости пока не рассматриваем, введем его в окончательные уравнения движения.

Нет надобности повторять выкладки § 2, чтобы составить уравнения колебательного (вращательного) движения картушки; достаточно присовокупить к моментам действующих сил моменты силы поддержания Q_0 , которая практически равна P_0 и приложена в центре плавучести, лежащем на величину $(a - h)$ выше центра тяжести картушки; поэтому моменты силы Q_0 будут

$$L_q = +Q_0 a\theta_1; \quad M_q = -Q_0 a\psi; \quad N_q = 0 \quad (85)$$

поэтому в уравнениях (19) восстанавливающие члены будут

$$[P_0 h - Q_0 a + p_1(h - h_1)]\theta_1; \quad [P_0 h - Q_0 a + p_1(h - h_1) + MH]\psi; \quad MH\varphi$$

Так как $Q_0 \approx P_0$, то вместо выражений (20) положим

$$\begin{aligned}\frac{P_0(h-a) + p_1(h-h_1)}{A} &= m_1^2 \approx \frac{P_0(h-a)}{A} \\ \frac{P_0(h-a) + p_1(h-h_1) + MH}{B} &= m_2^2 \approx \frac{P_0(h-a)}{B} \\ \frac{MH}{C} &= m_3^2\end{aligned}\quad (86)$$

Здесь предположено, что моменты инерции A , B , C сохранили свои значения, т. е. что картушка не увлекает с собой жидкости, или эти моменты инерции включают и моменты инерции увлекаемой жидкости и что величины m_1 , m_2 , m_3 определяются из соотношений

$$m_1 = \frac{2\pi}{\tau_1}; \quad m_2 = \frac{2\pi}{\tau_2}; \quad m_3 = \frac{2\pi}{\tau_3}$$

причем периоды и погашения размахов наблюдаются по качаниям картушки в *жидкости*, а не в воздухе; кроме того, надо иметь в виду соотношение (32). Ниже будет указано, каким образом обеспечить пропорциональность сопротивления *первой* степени скорости; тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\theta_1'' + 2f_1\theta_1' + m_1^2\theta_1 &= 0 \\ \psi'' + 2f_2\psi' + m_2^2\psi &= MH \operatorname{tg} i - \frac{p_1 l_1}{B} = \frac{C}{B} \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi &= \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1\end{aligned}\quad (87)$$

причем в последнем уравнении отброшен член

$$-m_1^2 \frac{p_1 l_1}{gC} (h-h_1) \theta_1$$

по его малости.

Уравнения (87) имеют тот же самый вид, как и уравнения (21'), и, следовательно, все сказанное об уравнениях (21') в §§ 4, 5 и 6 целиком применимо и к уравнениям (87) свободных колебаний картушки в жидкости на *покоящемся* корабле.

Вследствие большого сопротивления жидкости эти колебания быстро погашаются.

По наблюденному закону погашения, представляя уменьшение размахов в функции амплитуды их, находится и закон сопротивления жидкости по следствиям предложения XXXI теоремы XXV Ньютоновых „Начал“, в которых сказано:

„Сл. 1. Если сопротивление пропорционально скорости, то и уменьшение размахов в этой среде пропорционально величине размахов, и обратно.

„Сл. 2. Если сопротивление пропорционально второй степени скорости, то и уменьшение размахов пропорционально второй степени величины их, и обратно.

„Сл. 3. Вообще, если сопротивление пропорционально третьей или любой иной степени скорости, то и уменьшение размахов будет пропорционально той же степени величины их.

„Сл. 4. Если сопротивление будет частью пропорционально первой степени скорости, частью второй, то уменьшение размахов будет частью пропорционально первой степени их величины, частью второй, и обратно. Одинаков будет закон и пропорциональности сопротивления скорости и закон уменьшения размахов в зависимости от величины их.

„Сл. 5. Поэтому, когда маятник совершает последовательные неравные размахи, то можно найти закон убывания размахов в зависимости от величины их; таков же будет и закон сопротивления в зависимости от скорости“.

Качания картушки, каждое в отдельности взятое, представляют маятникообразное движение. Теорема Ньютона дает возможность убедиться, каков закон сопротивления жидкости и в какой мере он отклоняется от пропорциональности первой степени скорости и, значит, какие изменения надо внести в уравнения (87) подобно тому, как это было сделано Ньютоном при исследовании сопротивления воды качаниям маятника, в нее погруженного.

Ясно, что, изменяя форму поплавка и его нагрузку, делая балластные камеры, как глухие, так и сообщающиеся с жидкостью и между собою (подобно успокоительным сестерам Фрама), можно

в весьма широких пределах изменять закон погашения размахов, периоды их и пр., чтобы достигнуть возможно меньшего рыскания картушки, когда корабль идет по *прямому* курсу на взволнованном море.

Влияние поворотов корабля или полного описания циркуляции требует отдельного рассмотрения, которое слишком удлинит бы эту статью.

§ 13. Перед тем, как составить уравнения движения картушки компаса с жидкостью, необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства.

Котелок заполняется жидкостью целиком, так что жидкость в нем свободной поверхности не имеет и картушка вполне погружена в жидкость. Котелок подвешивается на кардановском подвесе так: оси подвеса пересекаются в той точке, где находится топка, а значит, практически и острое шпильки, которая должна быть укреплена к *картушке*, что часто не исполняется, и шпилька укрепляется к дну котелка.

Оба периода качаний котелка должны быть возможно малые по сравнению с периодами свободных качаний корабля, чтобы котелок во всякий момент времени занимал положение динамического равновесия в поле тех переменных сил, которые имеют место на качающемся корабле в той точке, в которой пересекаются оси качания котелка, иначе, в острое шпильки.

При таком устройстве и прямом курсе корабля жидкость внутри котелка будет находиться во всякий момент времени в состоянии динамического равновесия и в относительном к котелку покое. Этого нельзя сказать, когда корабль описывает циркуляцию или вообще находится на повороте; тогда котелок имеет вместе с кораблем вращательное движение около вертикальной оси. В это движение вследствие внутреннего трения увлекается и жидкость, трение которой о картушку ее увлекает и создает не периодическое с малым периодом рыскание, а отклонение, непрерывно возрастающее, пока продолжается движение жидкости в образовавшемся вихре.

Здесь теоретический расчет настолько ненадежен, что предпочтительнее при разработке рациональной конструкции компаса исследовать его экспериментально на обычной поворотной платформе, но только вращая ее не вручную, а передачей от мотора с тою угловою скоростью и на тот угол, на который будет поворачиваться корабль при наиболее обычном маневрировании.

Вот почему я и ограничиваюсь теоретическим исследованием влияния качаний для прямого курса корабля. Эти качания будут налагаться на те длительные отклонения, которые вызываются движением жидкости на повороте корабля и которые весьма легко и просто определять экспериментально. Полную же систему колебаний картушки, вызываемых качаниями корабля, воспроизвести на берегу экспериментально весьма трудно: это требует ввиду орбитального движения корабля весьма сложной и весьма громоздкой карусельной установки.

Поворотных же платформ, на которых мне приходилось работать с 1884 по 1887 г., было в компасной мастерской шесть штук; стоимость каждой из них 10—15 руб.

Таким образом, на основании сказанного в начале этого параграфа, уравнения (87), которыми определяются свободные колебания картушки, сохраняют свой вид; возмущающие же моменты будут

$$\begin{aligned} & \frac{m_1^2}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] \\ & \frac{m_1^2}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] + \frac{C}{B} \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ & - \frac{p_1 l_1}{gC} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] + \\ & + \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

и полные уравнения колебательного движения будут

$$\theta_1'' + 2f_1 \theta_1' + m_1^2 \theta_1 = \frac{m_1^2}{g} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)]$$

$$\psi'' + 2f_2\psi' + m_2^2\psi = \frac{m_1^2}{g} [F_1''(t) + \varphi F_2''(t) - \psi F_3''(t)] + \\ + \frac{C}{B} \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right)$$

$$\varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi = -\frac{p_1 l_1}{gC} [-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] + \\ + \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1$$

Отбросив же в этих уравнениях весьма малые члены, как это объяснено в § 10, получим уравнения, совершенно подобные уравнениям (54), а именно:

$$\theta_1'' + 2f_1\theta_1' + m_1^2\theta_1 = \frac{m_1^2}{g} F_2''(t)$$

$$\psi'' + 2f_2\psi' + m_2^2\psi = \frac{m_1^2}{g} F_1''(t) + \frac{C}{B} \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right)$$

$$\varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi = -\frac{p_1 l_1}{gC} F_2''(t) + \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1$$

причем m_1^2 , m_2^2 , m_3^2 выражаются формулами (86). Затем все сказанное в §§ 9 и 10 прилагается и здесь вместе со сводкою формул, в которой надо только вместо букв n_1^2 и n_3^2 писать m_1^2 и m_3^2 и отношение $\mu = \frac{f_1}{m_1} = \frac{f_2}{m_2} = \frac{f_3}{m_3}$ брать около $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

§ 14. Как видно, математическая сторона исследования колебаний картушки в жидкости и картушки „сухой“ одинакова, но нельзя того же сказать о части физической: здесь разница весьма существенная.

1. Для сухой картушки восстанавливающий момент, происходящий от веса, пропорционален статическому моменту $P_0 h$. Для картушки в жидкости этот момент пропорционален произведению $P_0(h - a)$ веса на расстояние между центром тяжести и центром плавучести подобно тому, как это имеет место для подводных

судов и вообще всякого тела, вполне погруженного в жидкость; таким образом, при конструировании картушки мы имеем *одним параметром больше (а)*, располагаясь которым, можем придавать картушке желаемые качества.

2. Так как вес картушки уравнивается почти полностью ее плавучестью, то давление на шпильку, равное $P_0 - Q_0$, может быть сделано как угодно малым, хотя каждая из величин P_0 и Q_0 в отдельности может быть и большая. Это даст возможность придавать картушке большие моменты инерции и малые моменты статические, делать периоды колебаний настолько большими, чтобы возможность резонанса с колебаниями корабля исключалась, что для „сухой“ картушки практически недостижимо.

Вместе с тем этим устраняется необходимость делать картушку чрезмерно легкой в ущерб ее прочности и неизменности расположения ее частей.

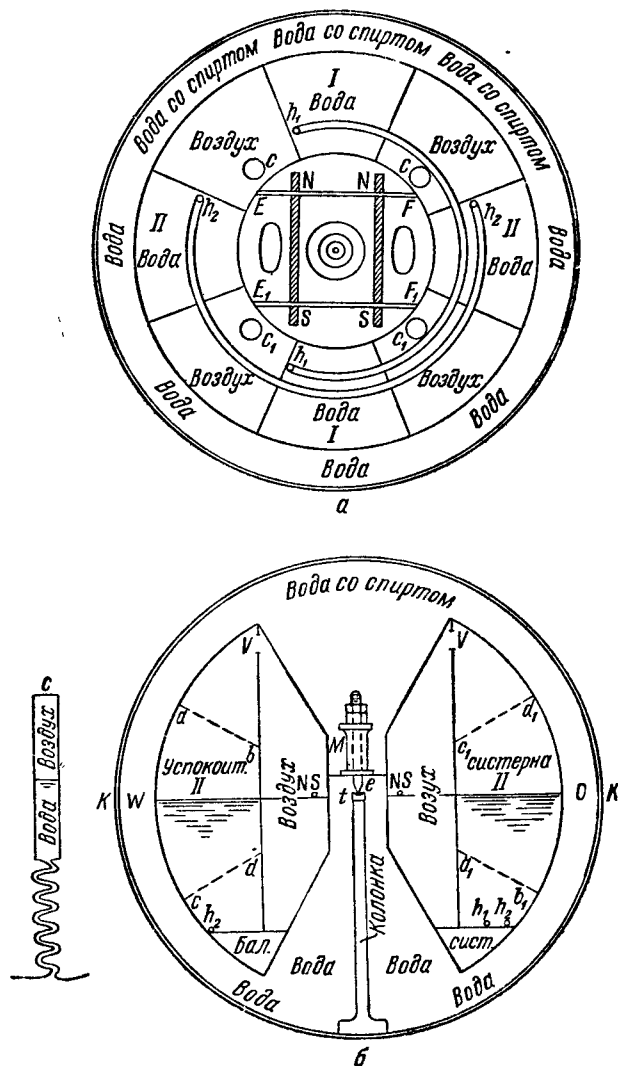
3. Придавая картушке вместе с ее поплавком сферическую форму, как у гирокомпасов Аншютца, можно обеспечить пропорциональность сопротивления первой степени скорости и достигать желаемой величины погашения размахов.

На фиг. 6 показаны горизонтальное (а) и вертикальное (б) сечения такой сферической картушки, как здесь намечено. Устройство ее настолько просто, что дальнейших объяснений не требует.

Есть еще целый ряд возможностей, о которых здесь не будем распространяться, так как они имеют производственный характер, детали которого не представляют общего интереса.

Цель нашей статьи состоит в том, чтобы, рассмотрев колебания картушки, вызываемые *механическими*, а не магнитными причинами (чего до сих пор с достаточною полнотою сделано не было), дать руководящие основания и методы расчета картушки и выбора соответствующего компаса для корабля заданного типа.

Может возникнуть вопрос, стоило ли для исследования такого ничтожества, как картушка компаса, исписать 50 печатных страниц формулами и уравнениями, не есть ли это упражнение в „стрельбе по воробьям из пушек“.



Фиг. 6. Схема сферической картушки с успокоительными систернами.

a — экваториальное сечение; b — вертикальное сечение плоскостью OW . I — успокоительная систерна, колеблющаяся около оси NS ; II — успокоительная систерна, колеблющаяся около оси OW ; e — шпилька, K — котелок; h_1 — соединительная трубка систеры I ; h_2 — соединительная трубка систеры II ; NS — магнитные стрелки; EF, E_1F_1 — рамка и площадка для укрепления стрелок; CC_1 — цилиндры для компенсации влияния температурных расширений (предварительный расчет показывает, что компенсаторов можно не ставить); t — топка; M — закрученная внутри втулка для укрепления шпильки и регулирования ее высоты так, чтобы получить возможно больший период свободных колебаний; V — просветы для воздуха.

Но если припомнить, сколько кораблей погибло и теперь еще гибнет из-за неправильности показаний компаса или оттого, что от качки он перестал действовать, сколько труда затрачено на составление магнитных карт всех морей и океанов, начиная с экспедиций 1701 и 1702 гг. знаменитого Галлея, сколько труда затрачено на создание теории земного магнетизма в течение 25 лет самим „*princepi mathematicorum*“ Гауссом, какой невероятный труд по громадности численных вычислений в течение 40 лет затрачен Адамсом на выработку методов составления магнитных карт по наблюдениям в отдельных пунктах; если припомнить, сколько над компасом работал величайший физик XIX в. Вильям Томсон (лорд Кельвин), и принять в соображение, что конечная цель всех этих трудов состоит в получении правильности показаний компаса, — то 50 страниц нашей работы представляются ничтожно малою величиною по сравнению с упомянутыми великими трудами.

Недаром еще давно неким мудрецом сказано: „Компас инструмент малый, но, если бы его не было, Америка не была бы открыта“.

О ТЕОРИИ ГИРОКОМПАСА АНШЮТЦА, ИЗЛОЖЕННОЙ проф. ГЕККЕЛЕРОМ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статья проф. Геккелера „Kreiselkompass und Schiffsmanöver“, помещенная в „Ingenieur Archiv“ (IV Bd., Н. 1 и 2, 1933), справедливо почитается инженерами, ведущими на одном из наших заводов производство гироскопов, основным теоретическим руководством в этом деле и рекомендуется для изучения в тех вузах, где читается гироскопия.

Между тем изложение Геккелера, местами весьма сжатое, представляет для инженеров трудности и включает некоторые существенные недостатки; при этом не вполне правильно освещены и не указаны те неизбежные погрешности, которым гироскопас Аншютца подвержен и которые обнаруживаются при испытаниях этого компаса на быстроходных судах.

Ввиду этого в моей статье теория Геккелера подвергнута полной переработке и настолько подробно изложению, что оно должно быть вполне доступно инженерам с обычной математической подготовкой, даваемой нашими вузами.

Я не касаюсь описания устройства гироскопа Аншютца — оно дано со всею подробностью в книге проф. Б. И. Кудревича „Теория и практика гироскопического компаса“ (часть IV, „Гироскопические компасы Аншютца“, Военмориздат, 1939), а также в книге проф. Б. В. Булгакова „Прикладная теория гироскопов“, к которым и отсылаю.

Статья моя подразделена на две главы. В гл. I излагается общая теория гирокомпаса и его колебаний при испытаниях на берегу, когда компас установлен на неподвижном фундаменте.

В гл. II рассматриваются колебания гирокомпаса, установленного на корабле, идущем на тихой воде в отсутствие качки, и подробно разбираются возникающие при этом погрешности, не учтенные в статье проф. Геккелера. Рассмотрение влияния качаний корабля на показания гирокомпаса я предполагаю изложить в отдельной статье.

Долголетняя практика показала мне, что запятые в формулах часто приводят к опечаткам, превращаясь в указатели, что искажает смысл формул, поэтому, где знаки препинания между формулами неизбежны, запятые заменены через точку с запятой, а где без них можно обойтись — просто опущены.

Лет двенадцать тому назад на такое отступление от грамматики мною было испрошено согласие Академии наук. В математической статье важна математика и верность формул, а не преклонение перед правилами грамматики в ущерб делу.

6 мая 1940 г.

Академик А. Крылов.

Г л а в а I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСФЕРЫ КОМПАСА АНШЮТЦА, УСТАНОВЛЕННОГО НА НЕПОДВИЖНОМ ФУНДАМЕНТЕ

§ 1. Геккелер в своей статье „Kreiselkompass und Schiffsmannöver“ представляет движение гиросферы и жидкости в успокоителе системою дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -S(\beta - \chi_N) - C\vartheta &= B(\alpha' - U \sin \varphi) \\ 0 &= \beta' - \frac{v_N}{R} - \alpha U \cos \varphi \\ \vartheta' &= -F(\beta - \chi_N + \vartheta) \end{aligned} \quad (1)$$

причем им сделаны следующие обозначения:

$U = \frac{2\pi}{T^*} = 0.72921 \cdot 10^{-4}$ — угловая скорость вращения Земли;

$R = 6370.3$ км — радиус Земли, принимаемой за шар;

T^* — звездные сутки, равные 86 164 сек. среднего времени;

φ — географическая широта места наблюдения;

g — ускорение силы тяжести;

B — кинетический момент, в случае нескольких гироскопов — равнодействующий кинетический момент;

m — масса плавающей системы;

a — расстояние от центра тяжести плавающей системы до центра плавучести ее;

$S = mga$ — наибольший восстанавливающий момент;

α — азимут направления равнодействующей кинетического момента;

β — наклонение равнодействующей кинетического момента к истинному горизонту;

ϑ — наклонение уровня жидкости в успокоителе к направлению равнодействующего кинетического момента;

$\beta + \vartheta$ — наклонение уровня жидкости к истинному горизонту;

C — постоянная успокоителя;

F — фактор перетекания;

χ_N — отнесенная к единице массы слагающая возмущающей силы по меридиану;

v_N — проекция скорости хода по меридиану.

Изменим обозначения Геккелера на принятые у нас:

$$U \cos \varphi = \omega_1; U \sin \varphi = \omega_2; U = \omega \quad (2)$$

Определим положение „динамического“ равновесия системы при покое корабля, иначе при испытании компаса на берегу, положив в уравнении (1)

$$\begin{aligned} \alpha &= u + \alpha_r; \quad \beta = v + \beta_r; \quad \vartheta = w + \vartheta_r \\ \chi_N &= 0; \quad v_N = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

причем $\alpha_r, \beta_r, \vartheta_r$ — постоянные. Тогда система (1) будет

$$\begin{aligned} Bu' + Sv + Cw + S\beta_r + C\vartheta_r &= B\omega_2 \\ v' - \omega_1 u - \omega_1 \alpha_r &= 0 \\ w' + Fv + Fw + F\beta_r + F\vartheta_r &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Определим $\alpha_r, \beta_r, \vartheta_r$ так, чтобы все постоянные члены в системе (4) исчезли, т. е. чтобы было

$$\begin{aligned} \frac{S}{B}\beta_r + \frac{C}{B}\vartheta_r &= \omega_2 \\ \alpha_r \omega_1 &= 0 \\ \beta_r + \vartheta_r &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

отсюда следует

$$\alpha_r = 0; \beta_r = -\vartheta_r = \frac{B\omega_2}{S - C} \quad (6)$$

Это и есть положение динамического равновесия.

При сделанных обозначениях (3) уравнения „свободных колебаний“ гиросферы будут

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{S}{B}v - \frac{C}{B}w \\ v' &= \omega_1 u \\ w' &= -Fv - Fw \end{aligned} \quad (7)$$

Будем искать решение системы (7) под видом

$$u = C_1 e^{\lambda t}; \quad v = KC_1 e^{\lambda t}; \quad w = LC_1 e^{\lambda t} \quad (8)$$

причем C_1 — произвольная постоянная; K, L, λ — некоторые постоянные, пока неизвестные числа, которые надо определить так, чтобы величины (8) были решениями системы (7).

По подстановке величин (8) в уравнения (7) и по сокращении множителя $C_1 e^{\lambda t}$, который не должен равняться нулю, имеем равенства

$$SK + CL + B\lambda = 0$$

$$\lambda K - \omega_1 = 0 \quad (9)$$

$$FK + (\lambda + F)L = 0$$

Второе из этих равенств, рассматриваемых как уравнения, служащие для определения неизвестных K и L , дает

$$K = \frac{\omega_1}{\lambda} \quad (10)$$

тогда из третьего уравнения следует

$$L = -\frac{F\omega_1}{\lambda(\lambda + F)} \quad (11)$$

Чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо и достаточно, чтобы величины (10) и (11) удовлетворяли уравнению (9), т. е. чтобы было

$$\frac{S\omega_1}{\lambda} - \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{F\omega_1}{\lambda + F} + B\lambda = 0 \quad (12)$$

Мы имеем в своем распоряжении величину λ , надо ее взять так, чтобы равенство (12) имело место, т. е. чтобы было

$$S\omega_1(\lambda + F) - CF\omega_1 + B\lambda^2(\lambda + F) = 0 \quad (13)$$

т. е. по разделении на B и раскрытии скобок

$$\lambda^3 + F\lambda^2 + \frac{S\omega_1}{B}\lambda + \frac{F}{B}(S - C)\omega_1 = 0 \quad (14)$$

Это и есть так называемое „характеристическое“ уравнение системы (7).

Вместо величин $\frac{S\omega_1}{B}$ и $\frac{F}{B}(S - C)\omega_1$ Геккелер вводит величины Ω^2 и χ , полагая

$$\frac{S\omega_1}{B} = \Omega^2; \quad \chi = \frac{S - C}{S} \quad (15)$$

так что будет

$$\frac{F}{B}(S - C)\omega_1 = \frac{S\omega_1}{B} \cdot \frac{S - C}{S} F = \chi \Omega^2 F \quad (16)$$

Заметим, что если успокоитель выключить, т. е. положить $F=0$, то уравнение (14) примет вид

$$\lambda^3 + \frac{S\omega_1}{B}\lambda = 0$$

и его корни будут

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{S\omega_1}{B}} i$$

чему соответствует периодическое решение с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega_1}} \quad (17)$$

поэтому

$$\Omega = \sqrt{\frac{S\omega_1}{B}} = \frac{2\pi}{T_0} \quad (18)$$

представляет „круговую частоту“ периодических колебаний гиросферы при выключенном успокоителе.

В общем же случае характеристическое уравнение будет

$$\lambda^3 + F\lambda^2 + \Omega^2\lambda + \kappa\Omega^2F = 0 \quad (19)$$

Гироскопасу придают такие значения входящих в него элементов, что уравнение (19) имеет один отрицательный вещественный корень и два мнимых с отрицательной вещественной частью. Обозначим эти корни так:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -n + qi \\ \lambda_3 &= -n - qi \end{aligned} \quad (20)$$

Между этими корнями и коэффициентами уравнения имеем соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -F; \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \Omega^2; \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\kappa\Omega^2F \quad (21)$$

из которых следует

$$\mu + 2n = F; \quad \mu(n^2 + q^2) = \kappa\Omega^2F$$

$$n^2 + q^2 = \frac{x\Omega^2 F}{\mu} = \Omega^2 - 2\mu n \quad (22)$$

$$F - \mu = 2n; \quad F - n = \mu + n$$

Каждому из корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

соответствуют свои значения K и L и своя система решений; обозначим эти значения K и L так:

$$K(\lambda_1); L(\lambda_1); K(\lambda_2); L(\lambda_2); K(\lambda_3); L(\lambda_3) \quad (23)$$

Тогда по формулам (10) и (11) будет

$$\begin{aligned} K(\lambda_1) &= \frac{\omega_1}{\lambda_1}; \quad L(\lambda_1) = -\frac{F\omega_1}{\lambda_1(\lambda_1 + F)} \\ K(\lambda_2) &= \frac{\omega_1}{\lambda_2}; \quad L(\lambda_2) = -\frac{F\omega_1}{\lambda_2(\lambda_2 + F)} \\ K(\lambda_3) &= \frac{\omega_1}{\lambda_3}; \quad L(\lambda_3) = -\frac{F\omega_1}{\lambda_3(\lambda_3 + F)} \end{aligned} \quad (24)$$

Значит, корню λ_1 соответствует решение

$$u_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad v_1 = \frac{\omega_1}{\lambda_1} C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad w_1 = -\frac{F\omega_1}{\lambda_1(\lambda_1 + F)} C_1 e^{\lambda_1 t} \quad (25)$$

Подобно этому для корня λ_2 будет

$$u_2 = C_1 e^{\lambda_2 t}; \quad v_2 = \frac{\omega_1}{\lambda_2} C_1 e^{\lambda_2 t}; \quad w_2 = -\frac{F\omega_1}{\lambda_2(\lambda_2 + F)} C_1 e^{\lambda_2 t} \quad (26)$$

и для корня λ_3 будет

$$u_3 = C_1 e^{\lambda_3 t}; \quad v_3 = \frac{\omega_1}{\lambda_3} C_1 e^{\lambda_3 t}; \quad w_3 = -\frac{F\omega_1}{\lambda_3(\lambda_3 + F)} C_1 e^{\lambda_3 t} \quad (27)$$

Каждое из этих решений (26) и (27) может быть умножено на свою постоянную произвольную, например A_2 и B_2 , и сложено с (25), в результате чего получим новое решение; обозначив про-

извольные постоянные $A_2 C_1 = C_2$; $B_2 C_1 = C_3$, получим общее решение или общий интеграл системы (7) в таком виде:

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} \\ v &= \frac{\omega_1}{\lambda_1} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\omega_1}{\lambda_2} C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\omega_1}{\lambda_3} C_3 e^{\lambda_3 t} \\ w &= -\frac{F\omega_1}{\lambda_1(\lambda_1 + F)} C_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{F\omega_1}{\lambda_2(\lambda_2 + F)} C_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{F\omega_1}{\lambda_3(\lambda_3 + F)} C_3 e^{\lambda_3 t} \end{aligned} \quad (28)$$

Заметив, что имеет место тождество

$$-\frac{F\omega_1}{\lambda_1(\lambda_1 + F)} = -\omega_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + F} \right) = -\frac{\omega_1}{\lambda_1} + \frac{\omega_1}{\lambda_1 + F} \quad (29)$$

и другие два подобных для λ_2 и λ_3 , видим, что величина w может быть написана следующим образом:

$$w = -v + \frac{\omega_1}{\lambda_1 + F} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\omega_1}{\lambda_2 + F} C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\omega_1}{\lambda_3 + F} C_3 e^{\lambda_3 t} \quad (30)$$

Величины u , v , w и представят свободные колебания гиросферы, но не в окончательном виде, потому что необходимо еще сделать следующее:

а) найденные величины надо будет освободить от мнимых знаков;

б) постоянные произвольные C_1 , C_2 , C_3 надо определить так, чтобы были удовлетворены начальные условия: при $t=0$ должно быть

$$(u)_{t=0} = u_0; \quad (v)_{t=0} = v_0; \quad (w)_{t=0} = w_0 \quad (31)$$

в) рассмотреть вынужденные колебания гиросферы, определяемые системой уравнений

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{S}{B} \beta - \frac{C}{B} \vartheta + \varphi_1(t) \\ \beta' &= \omega_1 \alpha + \varphi_2(t) \\ \vartheta' &= -F\beta - F\vartheta + \varphi_3(t) \end{aligned} \quad (32)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ — заданные функции времени, представляющие возмущающие силы, действующие на гиросферу, когда корабль маневрирует на ходу;

г) изучить погрешности гироскопа, происходящие при простейших маневрах.

Исследование этих вопросов может быть произведено обычными приемами интегрирования системы линейных уравнений первого порядка, но тогда приходится иметь дело с довольно громоздкими выкладками, поэтому выгоднее воспользоваться так называемым „символическим способом“.

§ 2. Известно, насколько символический способ упрощает решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, в особенности неоднородных, т. е. таких, как система (32).

Обозначим знаком Δ оператор $\frac{d}{dt}$, т. е. положим

$$\Delta x = \frac{d}{dt} x = \frac{dx}{dt}; \quad \Delta^2 x = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) x = \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ и т. д.} \quad (33)$$

Тогда система (32) может быть написана так:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha + \frac{S}{B} \beta + \frac{C}{B} \vartheta &= \varphi_1(t) \\ -\omega_1 \alpha + \Delta \beta &= \varphi_2(t) \\ F \beta + (F + \Delta) \vartheta &= \varphi_3(t) \end{aligned} \quad (34)$$

Будем эту систему рассматривать как систему трех алгебраических уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\alpha, \beta, \vartheta$$

Решим эти уравнения как алгебраические, рассматривая коэффициент Δ как алгебраическое количество, а затем истолкуем величину Δ как символ действия дифференцирования.

Практически наибольший интерес представляют азимутальные колебания α , с которых и начнем.

Из уравнений исключаем сперва величину β , умножив первое уравнение на Δ , второе на $-\frac{S}{B}$, и, сложив, имеем:

$$(\Delta^2 + \Omega^2) \alpha + \frac{C}{B} \Delta \vartheta = \Delta \varphi_1 - \frac{S}{B} \varphi_2 \quad (*)$$

Затем, умножив первое уравнение (34) на F , третье на $-\frac{S}{B}$ и сложив, имеем:

$$F\Delta\alpha + \left(\frac{CF}{B} - \frac{SF}{B} - \frac{S}{B}\Delta\right)\vartheta = F\varphi_1 - \frac{S}{B}\varphi_3 \quad (**)$$

Исключив из уравнений (*) и (**) величину ϑ , имеем сперва

$$\begin{aligned} & \left\{(\Delta^2 + \Omega^2)\left(\frac{C-S}{B}F - \frac{S}{B}\Delta\right) - \frac{CF}{B}\Delta^2\right\}\alpha = \\ & = \left(\frac{CF}{B} - \frac{SF}{B} - \frac{S}{B}\Delta\right)\left(\Delta\varphi_1 - \frac{S}{B}\varphi_2 - \frac{CF}{B}\Delta\varphi_1 + \frac{S}{B} \cdot \frac{C}{B}\Delta\varphi_3\right) \end{aligned}$$

Затем, по упрощении и разделении на $-\frac{S}{B}$, получим:

$$\begin{aligned} & \left[\Delta^3 + F\Delta^2 + \Omega^2\Delta + \frac{S-C}{S}\Omega^2F\right]\alpha = \\ & = \Delta^2\varphi_1 + F\Delta\varphi_1 - \frac{S}{B}\Delta\varphi_2 - \frac{S-C}{S}F\varphi_2 - \frac{C}{B}\Delta\varphi_3 \end{aligned}$$

или, заменив $\frac{S-C}{S}$ через κ и знак Δ и его степени — значками производных, получим дифференциальное уравнение

$$\alpha''' + F\alpha'' + \Omega^2\alpha' + \kappa\Omega^2F\alpha = \varphi_1'' + F\varphi_1' - \frac{S}{B}\varphi_2' - \kappa F\varphi_2 - \frac{C}{B}\varphi_3' \quad (35)$$

Правая часть этого равенства при заданных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ будет известная функция времени, которую обозначим через $\psi(t)$ или просто через ψ , так что будет

$$\alpha'' + F\alpha' - \frac{S}{B}\varphi_2' - \kappa F\varphi_2 - \frac{C}{B}\varphi_3' = \psi \quad (36)$$

Тогда предыдущее уравнение может быть написано так:

$$\alpha''' + F\alpha'' + \Omega^2\alpha' + \kappa F\Omega^2\alpha = \psi \quad (37)$$

Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения есть

$$P(\lambda) = \lambda^3 + F\lambda^2 + \Omega^2\lambda + \kappa F\Omega^2 = 0 \quad (38)$$

которое мы уже имели [см. уравнения (14) или (19)] и корни которого суть

$$\lambda_1 = -\mu; \quad \lambda_2 = -n + qi; \quad \lambda_3 = -n - qi \quad (39)$$

так что

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = (\lambda + \mu)[(\lambda + n)^2 + q^2] \quad (40)$$

Символически уравнение (35) напишется

$$P(\Delta)\alpha = \psi(t) \quad (41)$$

и его символическое решение есть

$$\alpha = [P(\Delta)]^{-1}\psi(t) \quad (42)$$

Но алгебраически

$$[P(\Delta)]^{-1} = \frac{1}{(\Delta + \mu)(\Delta - \lambda_2)(\Delta - \lambda_3)} \quad (43)$$

причем символ $[P(\Delta)]^{-1}$, рассматриваемый как алгебраическое количество, можно подвергать любому тождественному рациональному преобразованию и затем истолковывать как оператор.

Дробь в правой части равенства (43) может быть разложена на сумму частных дробей

$$\frac{1}{P(\Delta)} = \frac{M_1}{\Delta + \mu} + \frac{M_2}{\Delta - \lambda_2} + \frac{M_3}{\Delta - \lambda_3} \quad (44)$$

причем коэффициенты M_1, M_2, M_3 определяются формулами

$$M_1 = \frac{1}{P'(\lambda_1)}; \quad M_2 = \frac{1}{P'(\lambda_2)}; \quad M_3 = \frac{1}{P'(\lambda_3)} \quad (45)$$

Но на основании (40) будет

$$\begin{aligned} P'(\lambda_1) &= (-\mu + n - qi)(-\mu + n + qi) = (\mu - n)^2 + q^2 \\ P'(\lambda_2) &= (\mu + \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) = (\mu - n + qi)(2qi) \\ P'(\lambda_3) &= (\mu + \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2) = (\mu - n - qi)(-2qi) \end{aligned} \quad (46)$$

так что будет

$$M_1 = \frac{1}{(\mu - n)^2 + q^2}; \quad M_2 = \frac{1}{2qi} \cdot \frac{1}{\mu - n + qi}; \quad M_3 = -\frac{1}{2qi} \cdot \frac{1}{\mu - n - qi} \quad (47)$$

Значит, будет

$$\begin{aligned} \alpha &= M_1 \frac{1}{\Delta + \mu} \psi + M_2 \frac{1}{\Delta - \lambda_2} \psi + M_3 \frac{1}{\Delta - \lambda_3} \psi = \\ &= M_1 S_1 + M_2 S_2 + M_3 S_3 \end{aligned} \quad (48)$$

причем величины S_1, S_2, S_3 определяются равенствами

$$S_1 = \frac{1}{\Delta + \mu} \psi; \quad S_2 = \frac{1}{\Delta - \lambda_2} \psi; \quad S_3 = \frac{1}{\Delta - \lambda_3} \psi \quad (49)$$

из которых следует

$$\Delta S_1 + \mu S_1 = \psi; \quad \Delta S_2 - \lambda_2 S_2 = \psi; \quad \Delta S_3 - \lambda_3 S_3 = \psi \quad (50)$$

Все эти равенства пока алгебраические; приняв их за символические, получим для определения S_1, S_2, S_3 следующие линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$S_1' + \mu S_1 = \psi; \quad S_2' - \lambda_2 S_2 = \psi; \quad S_3' - \lambda_3 S_3 = \psi \quad (51)$$

множители этих уравнений соответственно таковы:

$$e^{\mu t}; \quad e^{-\lambda_2 t}; \quad e^{-\lambda_3 t}$$

так что предыдущие уравнения будут

$$(e^{\mu t} S_1)' = e^{\mu t} \psi; \quad (e^{-\lambda_2 t} S_2)' = e^{-\lambda_2 t} \psi; \quad (e^{-\lambda_3 t} S_3)' = e^{-\lambda_3 t} \psi \quad (52)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} e^{\mu t} S_1 &= C_1 + \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi, \quad \text{т. е. } S_1 = C_1 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi \\ e^{-\lambda_2 t} S_2 &= C_2 + \int_0^t e^{-\lambda_2 \xi} \psi(\xi) d\xi, \quad \text{т. е. } S_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 \xi} \psi(\xi) d\xi \\ e^{-\lambda_3 t} S_3 &= C_3 + \int_0^t e^{-\lambda_3 \xi} \psi(\xi) d\xi, \quad \text{т. е. } S_3 = C_3 e^{\lambda_3 t} + e^{\lambda_3 t} \int_0^t e^{-\lambda_3 \xi} \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, получаем общее решение

$$\alpha = M_1 C_1 e^{-\mu t} + M_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + M_3 C_3 e^{\lambda_3 t} + A(t) \quad (54)$$

причем

$$\Lambda(t) = M_1 e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi + M_2 e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 \xi} \psi(\xi) d\xi + M_3 e^{\lambda_3 t} \int_0^t e^{-\lambda_3 \xi} \psi(\xi) d\xi \quad (55)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, и так как при $\varphi_1(\xi) \equiv 0; \varphi_2(\xi) \equiv 0, \varphi_3(\xi) \equiv 0$, т. е. когда функции $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi)$ тождественно равны нулю для *всех* значений переменной ξ — таких, что $0 \leq \xi \leq t$, то величина $\Lambda(t) \equiv 0$. Так как произведения

$$M_1 C_1; M_2 C_2; M_3 C_3$$

такие же произвольные постоянные, как C_1, C_2, C_3 , то ясно, что члены, их содержащие, представляют *свободные колебания*, обозначенные через u , так что будет, как и раньше,

$$u = C_1 e^{-\mu t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} \quad (56)$$

Величина же $\Lambda(t)$ представляет вынужденные азимутальные колебания, напрасно названные „погрешностью“ гирокомпас в статье Геккелера. Прежде всего надо освободить выражение (54) от мнимых знаков. Стоит только положить

$$C_2 = \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} E i \text{ и } C_3 = \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} E i \quad (57)$$

и мы на основании формул Эйлера получим:

$$u = C_1 e^{-\mu t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} = C_1 e^{-\mu t} + e^{-n t} [D \cos qt + E \sin qt] \quad (58)$$

причем D и E суть вещественные произвольные постоянные.

Величина $\Lambda(t)$ представляет, как уже сказано, вынужденные азимутальные колебания гиросферы. Напишем $\Lambda(t)$ так:

$$\Lambda(t) = \Lambda_1(t) + \Lambda_2(t) + \Lambda_3(t) \quad (59)$$

и освободим это выражение от мнимых знаков.

Первый член

$$\Lambda_1(t) = M_1 e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi \quad (60)$$

вещественный и преобразования не требует.

Подставив вместо λ_2, λ_3 их значения, имеем:

$$\begin{aligned} A_2(t) + A_3(t) &= M_2 e^{-nt} e^{qti} \int_0^t e^{n\xi} e^{-q\xi i} \psi(\xi) d\xi + M_3 e^{-nt} e^{-qti} \int_0^t e^{n\xi} e^{+q\xi i} \psi(\xi) d\xi = \\ &= e^{-nt} \left\{ M_2 \int_0^t e^{n\xi} [\cos q(t-\xi) + i \sin q(t-\xi)] \psi(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + M_3 \int_0^t e^{n\xi} [\cos q(t-\xi) - i \sin q(t-\xi)] \psi(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

Но мы имеем:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{2qi} \cdot \frac{1}{\mu - n + qi} = -\frac{1}{2q} \cdot \frac{q + i(\mu - n)}{(\mu - n)^2 + q^2} = \\ &= -\frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{N} (\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon) \end{aligned} \quad (62)$$

причем положено

$$N = +\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}; \quad \cos \varepsilon = \frac{q}{N}; \quad \sin \varepsilon = \frac{\mu - n}{N} \quad (63)$$

Затем

$$\begin{aligned} M_3 &= -\frac{1}{2qi} \cdot \frac{1}{\mu - n - qi} = -\frac{1}{2q} \cdot \frac{q - i(\mu - n)}{(\mu - n)^2 + q^2} = \\ &= -\frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{N} (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon) \end{aligned} \quad (64)$$

следовательно, будет

$$A_2(t) + A_3(t) = -\frac{1}{q} \cdot \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} \int_0^t e^{n\xi} \cos [q(t-\xi) + \varepsilon] \psi(\xi) d\xi \quad (65)$$

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{e^{-\nu t}}{(\mu - n)^2 + q^2} X(t) - \\ &- \frac{1}{q} \cdot \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} [Y(t) \cos(qt + \varepsilon) + Z(t) \sin(qt + \varepsilon)] \end{aligned} \quad (66)$$

причем положено

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^t e^{\mu\xi} \psi(\xi) d\xi \\ Y(t) &= \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \psi(\xi) d\xi; \quad Z(t) = \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (67)$$

На основании формулы (36) будет

$$\psi(\xi) = \varphi_1''(\xi) + F\varphi_1'(\xi) - \frac{S}{B}\varphi_2'(\xi) - \frac{S-C}{B}F\varphi_2(\xi) - \frac{C}{B}\varphi_3'(\xi) \quad (68)$$

таким образом, вышеприведенные интегралы будут содержать под своим знаком производные φ_1'' , φ_1' , φ_2' , φ_3' , тогда как заданы самые функции φ_1 , φ_2 , φ_3 .

Если эти функции заданы аналитически, то составление их производных затруднений не представляет и интегралы $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ для простых случаев маневрирования находятся в конечном виде, как это будет показано ниже; но при сложном маневрировании, в особенности если функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ заданы графически, нахождение их производных затруднительно, и необходимо выражения $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ преобразовать „интегрированием по частям“ так, чтобы под знаком интеграла остались лишь самые функции, а не их производные. Таким образом, имеем:

$$X_{11}(t) = \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_1'(\xi) d\xi = e^{\mu t} \varphi_1(t) - \varphi_1(0) - \mu \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_1(\xi) d\xi \quad (69)$$

$$\begin{aligned} X_{12}(t) = \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_1''(\xi) d\xi = e^{\mu t} [\varphi_1'(t) - \mu \varphi_1(t)] - [\varphi_1'(0) - \mu \varphi_1(0)] + \\ + \mu^2 \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_1(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (70_1)$$

$$\begin{aligned} Y_{11}(t) = \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1'(\xi) d\xi = [e^{nt} \varphi_1(t) \cos qt - \varphi_1(0)] - \\ - n \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1(\xi) d\xi + q \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (70_2)$$

$$\begin{aligned} Y_{12}(t) = \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1''(\xi) d\xi = e^{nt} \{ [\varphi_1'(t) - n_1 \varphi_1(t)] \cos qt + \\ + q \varphi_1(t) \sin qt \} - [\varphi_1'(0) - n_1 \varphi_1(0)] + (n^2 - q^2) \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1(\xi) d\xi - \end{aligned}$$

$$- 2nq \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1(\xi) d\xi \quad (70_3)$$

$$\begin{aligned} Z_{11}(t) = & \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1'(\xi) d\xi = e^{nt} \varphi_1(t) \sin qt - \\ & - n \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1(\xi) d\xi - q \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1(\xi) d\xi \quad (70_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{12}(t) = & \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1''(\xi) d\xi = e^{nt} \{ \varphi_1'(t) - n\varphi_1(t) \sin qt - q\varphi_1(t) \cos qt \} + \\ & + q\varphi_1(0) + (n^2 - q^2) \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_1(\xi) d\xi + 2nq \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_1(\xi) d\xi \quad (70_5) \end{aligned}$$

Таким образом, все требуемые выражения приведены к вычислению интегралов

$$\begin{aligned} H_j(t) = & \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_j(\xi) d\xi; \quad G_j(t) = \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_j(\xi) d\xi \\ E_j(t) = & \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_j(\xi) d\xi \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (71)$$

Примем следующее систематическое обозначение:

$$\begin{aligned} X_{jk}(t) = & \int_0^t e^{\mu\xi} \varphi_j^{(k)}(\xi) d\xi; \quad Y_{jk} = \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \varphi_j^{(k)}(\xi) d\xi \\ Z_{jk} = & \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \varphi_j^{(k)}(\xi) d\xi \quad (72) \end{aligned}$$

т. е. значок (j) показывает номер функции, значок (k) — порядок производной от этой функции; буквою X_{jk} обозначены интегралы, под знаком которых множителем при $\varphi_j^{(k)}(\xi)$ стоит показательная $e^{\mu\xi}$; буквою Y_{jk} обозначены интегралы, под знаком которых стоит множитель $e^{n\xi} \cos q\xi$; буквою Z_{jk} обозначены интегралы, содержащие множитель $e^{n\xi} \sin q\xi$.

При таком обозначении будет

$$X(t) = \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi = \int_0^t e^{\mu \xi} (\varphi_1'' + F\varphi_1' - \frac{S}{B} \varphi_2' - \frac{S-C}{B} F\varphi_2 - \frac{C}{B} \varphi_3') d\xi \quad (73)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^t e^{\mu \xi} \psi(\xi) d\xi = X_{12} + FX_{11} - \frac{S}{B} X_{21} - \frac{S-C}{B} FE_2 - \frac{C}{B} X_{31} \\ Y(t) &= \int_0^t e^{\mu \xi} \cos q\xi \psi(\xi) d\xi = Y_{12} + FY_{11} - \frac{S}{B} Y_{21} - \\ &\quad - \frac{S-C}{B} FH_2 - \frac{C}{B} Y_{31} \end{aligned} \quad (74)$$

$$Z(t) = \int_0^t e^{\mu \xi} \sin q\xi \psi(\xi) d\xi = Z_{12} + FZ_{11} - \frac{S}{B} Z_{21} - \frac{S-C}{B} FG_2 - \frac{C}{B} Z_{31}$$

§ 3. Кроме азимутальных колебаний, определяемых углом α , необходимо определять колебания, представляемые углами β и ϑ , которые хотя и не могут быть непосредственно наблюдаемы, ибо успокоитель скрыт внутри гиросферы и нет шкал, по которым отсчитывались бы эти углы, но они необходимы, чтобы иметь возможность найти значения постоянных произвольных по начальным условиям, для того чтобы при разработке конструкции придать достаточную высоту чашкам успокоителя.

Итак, возьмем систему уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\alpha + \frac{S}{B} \beta + \frac{C}{B} \vartheta &= \varphi_1(t) \\ -\omega_1 \alpha + \Delta\beta &= \varphi_2(t) \\ F\beta + (F + \Delta) \vartheta &= \varphi_3(t) \end{aligned} \quad (75)$$

из которой, рассматривая Δ как алгебраическое количество, найдем:

$$(\Delta^3 + F\Delta^2 + \Omega^2\Delta + \kappa\Omega^2F)\beta = P(\Delta)\beta = \Delta^2\varphi_2 + F\Delta\varphi_2 + \\ + \omega_1\Delta\varphi_1 + F\omega_1\varphi_1 - \frac{C\omega_1}{B}\varphi_3$$

и, полагая

$$\sigma(t) = \varphi_2'' + F\varphi_2' + \omega_1\varphi_1' + F\omega_1\varphi_1 - \frac{C\omega_1}{B}\varphi_3 \quad (76)$$

подобно предыдущему, получим равенство

$$\beta = [P(\Delta)]^{-1}\sigma \quad (77)$$

Совершенно так же, положив

$$\theta(t) = \varphi_2'' + \Omega^2\varphi_3 - F\varphi_2' - F\omega_1\varphi_1 \quad (78)$$

получим равенство

$$\theta = [P(\Delta)]^{-1}\theta \quad (79)$$

Из выражений (77) и (79) видно, что, заменив в формулах (74) функцию $\psi(\xi)$ через $\sigma(\xi)$, мы получим частное решение для β , которое обозначим через $B(t)$, именно будет

$$B(t) = \frac{e^{-\mu t}}{(\mu - n)^2 + q^2} \int_0^t e^{\mu\xi} \sigma(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{q} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} \cos(qt + \varepsilon) \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \sigma(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{q} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} \sin(qt + \varepsilon) \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \sigma(\xi) d\xi \quad (80)$$

причем, на основании равенства,

$$\sigma(\xi) = \varphi_2''(\xi) + F\varphi_2'(\xi) + \omega_1\varphi_1'(\xi) + F\omega_1\varphi_1(\xi) - \frac{C\omega_1}{B}\varphi_3(\xi) \quad (81)$$

будет при прежних обозначениях

$$\int_0^t e^{\mu\xi} \sigma(\xi) d\xi = X_{22} + FX_{21} + \omega_1 X_{11} + F\omega_1 E_1 - \frac{C\omega_1}{B} E_3$$

$$\int_0^t e^{\mu \xi} \cos q \xi \sigma(\xi) d\xi = Y_{22} + FY_{21} + \omega_1 Y_{11} + F\omega_1 H_1 - \frac{C\omega_1}{B} H_3 \quad (82)$$

$$\int_0^t e^{\mu \xi} \sin q \xi \sigma(\xi) d\xi = Z_{22} + FZ_{21} + \omega_1 Z_{11} + F\omega_1 G_1 - \frac{C\omega_1}{B} G_3$$

Совершенно так же, обозначая через $\Theta(t)$ вынужденные колебания для переменной ϑ , т. е. уровня жидкости в успокоителе, получим:

$$\begin{aligned} \Theta(t) = & \frac{e^{-\mu t}}{(\mu - n)^2 + q^2} \int_0^t e^{\mu \xi} \vartheta(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{q} \cdot \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} \cos(qt + \varepsilon) \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \vartheta(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{q} \cdot \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 + q^2}} \sin(qt + \varepsilon) \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \vartheta(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (83)$$

причем, на основании равенства (78),

$$\vartheta(\xi) = \varphi_3''(\xi) + \Omega^2 \varphi_3(\xi) - F\varphi_2'(\xi) - F\omega_1 \varphi_1(\xi) \quad (84)$$

будет

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mu \xi} \vartheta(\xi) d\xi &= X_{32} + \frac{S\omega_1}{B} E_3 - FX_{21} - F\omega_1 E_1 \\ \int_0^t e^{n\xi} \cos q\xi \vartheta(\xi) d\xi &= Y_{32} + \frac{S\omega_1}{B} H_3 - FY_{21} - F\omega_1 H_1 \\ \int_0^t e^{n\xi} \sin q\xi \vartheta(\xi) d\xi &= Z_{32} + \frac{S\omega_1}{B} G_3 - FZ_{21} - F\omega_1 G_1 \end{aligned} \quad (85)$$

Отсюда видно, что для вычисления $B(t)$ и $\Theta(t)$ служат те же формулы (70) и те же определенные интегралы, которые входят в азимутальные колебания $A(t)$, только в иных комбинациях, определяемых выражениями $\sigma(\xi)$ и $\vartheta(\xi)$.

Что касается свободных колебаний, то, воспользовавшись выражениями (25), (26), (27) и формулами (57), получим после простых преобразований равенства

$$\begin{aligned}
 u &= C_1 e^{-\mu t} + e^{-nt} (D \cos qt + E \sin qt) \\
 v &= -\frac{\omega_1}{\mu} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{n^2 + q^2} [(nD + qE) \cos qt - (qD - nE) \sin qt] \\
 w + v &= \frac{\omega_1}{2n} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{(F - n)^2 + q^2} [(nD + qE - FD) \cos qt - \\
 &\quad - (qD - nE + FE) \sin qt]
 \end{aligned} \tag{86}$$

Таким образом, окончательно будет

$$\begin{aligned}
 \alpha &= u + A(t) + \delta \\
 \beta &= v + B(t) + \beta_r \\
 \vartheta + \beta &= w + v + B(t) + \Theta(t)
 \end{aligned} \tag{87}$$

причем δ есть так называемая курсовая погрешность, о которой см. ниже формулу (132).

§ 4. Покажем теперь определение тех значений

$$C_{10}, D_0, E_0 \tag{88}$$

постоянных произвольных, при которых удовлетворяются начальные условия

$$(u)_{t=0} = u_0; (v)_{t=0} = v_0; (w)_{t=0} = w_0 \tag{89}$$

Ввиду того, что

$$A(0) = B(0) = \Theta(0) = 0 \tag{90}$$

мы получим для определения значений (88) требуемые уравнения, положив $t=0$ в уравнениях (86), именно будет

$$\left. \begin{aligned}
 C_{10} + D_0 + 0 &= u_0 \quad (1) \\
 h^2 C_{10} + 0 + \mu X_0 &= g_1 \quad (2) \\
 (h^2 + \mu F) C_{10} + 2nFD_0 - 2nX_0 &= g_2 \quad (3)
 \end{aligned} \right\} \tag{91}$$

причем для сокращения письма положено

$$n^2 + q^2 = h^2; \text{ тогда } (F - n)^2 + q^2 = h^2 + \mu F$$

$$g_1 = -\mu h^2 \frac{v_0}{\omega_1}; \quad g_2 = 2n(h^2 + \mu F) \frac{w_0 + v_0}{\omega_1} \quad (92)$$

$$n_0 D_0 + q E_0 = X_0$$

Применим к решению уравнений (91) способ множителей; именно, чтобы найти C_{10} , берем множители p_1, r_1, s_1 так, чтобы комбинация уравнений давала

$$(1)p_1 + (2)r_1 + (3)s_1 = C_{10} = p_1 u_0 + r_1 g_1 + s_1 g_2 \quad (93)$$

Очевидно, что множители p_1, r_1, s_1 определяются тогда уравнениями

$$p_1 + h^2 r_1 + (h^2 + \mu F) s_1 = 1$$

$$p_1 + 0 + 2n F s_1 = 0 \quad (94)$$

$$0 + \mu r_1 - 2n s_1 = 0$$

откуда следует

$$p_1 = -2n F s_1; \quad r_1 = \frac{2n}{\mu} s_1 \quad (95)$$

Подставив эти значения в первое из уравнений (94) и положив

$$(\mu - n)^2 + q^2 = H^2 \quad (96)$$

получим:

$$H^2 s_1 = \frac{\mu}{F}; \quad H^2 r_1 = \frac{2n}{F}; \quad H^2 p_1 = -2n\mu \quad (97)$$

следовательно, будет

$$H^2 C_{10} = -2n\mu u_0 + \frac{1}{F} (2ng_1 + \mu g_2) \quad (98)$$

Но

$$g_1 = -\mu h^2 \frac{v_0}{\omega_1}; \quad g_2 = 2n(h^2 + \mu F) \frac{w_0 + v_0}{\omega_1}$$

значит, на основании соотношений (22) будет

$$\frac{1}{F} (2ng_1 + \mu g_2) = \frac{2n\mu}{F} \cdot \frac{F}{\mu} (x\Omega^2 + \mu^2) = 2n(x\Omega^2 + \mu^2)$$

Таким образом, будет

$$H^2 C_{10} = -2n\mu u_0 + 2n\mu^2 \frac{v_0}{\omega_1} + 2n(\kappa\Omega^2 + \mu^2) \frac{w_0}{\omega_1} \quad (99)$$

Затем из уравнения

$$C_{10} + D_0 = u_0$$

после простых преобразований получается

$$H^2 D_0 = \frac{\mu^3 + \kappa\Omega^2 F}{\mu} u_0 - 2n\mu^2 \frac{v_0}{\omega_1} - 2n(\kappa\Omega^2 + \mu^2) \frac{w_0}{\omega_1} \quad (100)$$

Затем из уравнения

$$h^2 C_{10} + \mu X_0 = g_1$$

получим:

$$\begin{aligned} H^2 X_0 = \frac{2n}{\mu} \kappa\Omega^2 F u_0 - \frac{\kappa\Omega^2 F + \mu^3}{\mu^2} \kappa\Omega^2 F \frac{v_0}{\omega_1} - \\ - 2n\kappa\Omega^2 F (\kappa\Omega^2 + \mu^2) \frac{w_0}{\omega_1} \end{aligned} \quad (101)$$

Чтобы иметь в дальнейшем симметричное обозначение, положим

$$\begin{aligned} H^2 C_{10} &= k_1 u_0 + l_1 \frac{v_0}{\omega_1} + m_1 \frac{w_0}{\omega_1} \\ H^2 D_0 &= k_2 u_0 + l_2 \frac{v_0}{\omega_1} + m_2 \frac{w_0}{\omega_1} \\ H^2 X_0 &= k_3 u_0 + l_3 \frac{v_0}{\omega_1} + m_3 \frac{w_0}{\omega_1} \end{aligned} \quad (102)$$

тогда из равенства

$$nD_0 + qE_0 = X_0$$

положив

$$H^2 E_0 = k_3 u_0 + l_3 \frac{v_0}{\omega_1} + m_3 \frac{w_0}{\omega_1} \quad (103)$$

следуют равенства

$$k_3 = k_4 - nk_2; \quad l_3 = l_4 - nl_2; \quad m_3 = m_4 - nm_2; \quad (104)$$

Слиячая формулы (99) и (102), получаем:

$$\begin{aligned}
 H^2 k_1 &= -2n\mu; & H^2 l_1 &= 2n\mu^2; & H^2 m_1 &= 2m(\chi\Omega^2 + \mu^2) \\
 H^2 k_2 &= \frac{\mu^3 + \chi\Omega^2 F}{\mu}; & H^2 l_2 &= -2n\mu^2 & H^2 m_2 &= -2n(\chi\Omega^2 + \mu^2) \\
 H^2 k_3 &= H^2(k_4 - nk_2); & H^2 l_3 &= H^2(l_4 - nl_2); & H^2 m_3 &= H^2(m_4 - nm_2) \quad (104_1) \\
 H^2 k_4 &= \frac{2n}{\mu} \chi\Omega^2 F; & H^2 l_4 &= -\frac{\chi\Omega^2 F}{\mu^2} (\mu^3 + \chi\Omega^2 F); & H^2 m_4 &= -\frac{2n}{\mu^2} \chi\Omega^2 F (\chi\Omega^2 + \mu^2)
 \end{aligned}$$

Равенство

$$H^2(qD_0 - nE_0) = \left(k_5 u_0 + l_5 \frac{v_0}{\omega_1} + m_5 \frac{w_0}{\omega_1}\right) H^2 \quad (104_2)$$

дают

$$\begin{aligned}
 H^2 k_5 &= H^2(qk_2 - nk_3); & H^2 l_5 &= H^2(ql_2 - nl_3); \\
 H^2 m_5 &= H^2(qm_2 - nm_3) \quad (105)
 \end{aligned}$$

Затем равенства

$$\begin{aligned}
 H^2(X_0 - FD_0) &= H^2\left(k_6 u_0 + l_6 \frac{v_0}{\omega_1} + m_6 \frac{w_0}{\omega_1}\right) \\
 H^2(qD_0 - nE_0 + FE_0) &= H^2\left(k_7 u_0 + l_7 \frac{v_0}{\omega_1} + m_7 \frac{w_0}{\omega_1}\right) \quad (104_3)
 \end{aligned}$$

дают

$$\begin{aligned}
 H^2 k_6 &= H^2(k_4 - Fk_2); & H^2 l_6 &= H^2(l_4 - Fl_2); & H^2 m_6 &= H^2(m_4 - Fm_2); \\
 H^2 k_7 &= H^2(k_5 + Fk_3); & H^2 l_7 &= H^2(l_5 + Fl_3); & H^2 m_7 &= H^2(m_5 + Fm_3). \quad (105_1)
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных произвольных по начальным условиям существует еще несколько других приемов, как то: прием Коши при помощи интегральных вычетов (см. „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики“) и разные приемы, которые можно найти в „Динамике“ Рауса (т. II, гл. VIII). Примененный здесь прием „множителей“ является наиболее простым и наглядным для системы трех линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

На основании полученных значений (105) конечные уравнения движения (28) напишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\omega_1} (k_1 \omega_1 u_0 + l_1 v_0 + m_1 w_0) e^{-\mu t} + \\
 &+ \frac{1}{\omega_1} e^{-\mu t} [(k_2 \omega_1 u_0 + l_2 v_0 + m_2 w_0) \cos qt + \\
 &+ \frac{1}{\omega_1} e^{-\mu t} [(k_3 \omega_1 u_0 + l_3 v_0 + m_3 w_0) \sin qt] \\
 v &= -\frac{1}{\omega_1} (k_1 \omega_1 u_0 + l_1 v_0 + m_1 w_0) e^{-\mu t} - \\
 &- \frac{1}{n^2 + q^2} e^{-\mu t} [(k_4 \omega_1 u_0 + l_4 v_0 + m_4 w_0) \cos qt] + \\
 &+ \frac{1}{n^2 + q^2} e^{-\mu t} [(k_5 \omega_1 u_0 + l_5 v_0 + m_5 w_0) \sin qt] \\
 w &= -\frac{1}{2n} (k_1 \omega_1 u_0 + l_1 v_0 + m_1 w_0) e^{-\mu t} - \\
 &- \frac{e^{-\mu t}}{(n + n)^2 + q^2} [(k_6 \omega_1 u_0 + l_6 v_0 + m_6 w_0) \cos qt] + \\
 &+ \frac{e^{-\mu t}}{(n + n)^2 + q^2} [(k_7 \omega_1 u_0 + l_7 v_0 + m_7 w_0) \sin qt]
 \end{aligned} \tag{106}$$

Сгруппировав члены этих формул в ином порядке, получим:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\omega_1} [k_1 \omega_1 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} (k_2 \omega_1 \cos qt + k_3 \omega_1 \sin qt)] u_0 + \\
 &+ \frac{1}{\omega_1} [l_1 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} (l_2 \cos qt + l_3 \sin qt)] v_0 + \\
 &+ \frac{1}{\omega_1} [m_1 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} (m_2 \cos qt + m_3 \sin qt)] w_0 \\
 v &= -\left[\frac{k_1}{\nu} \omega_1 e^{-\mu t} + \frac{e^{-\mu t}}{n^2 + q^2} (k_4 \omega_1 \cos qt - k_5 \sin qt) \right] u_0 - \\
 &- \left[\frac{l_1}{\nu} e^{-\mu t} + \frac{e^{-\mu t}}{n^2 + q^2} (l_4 \cos qt - l_5 \sin qt) \right] v_0 -
 \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
w = & \left[\frac{m_1}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{e^{-nt}}{n^2 + q^2} (m_4 \cos qt - m_5 \sin qt) \right] w_0 \\
& + \left[\frac{k_1 \omega_1}{2n} e^{-\mu t} - \frac{e^{-nt}}{(\mu + n)^2 + q^2} (k_6 \omega_1 \cos qt - k_7 \sin qt) \right] u_0 + \\
& + \left[\frac{l_1}{2n} e^{-\mu t} - \frac{e^{-nt}}{(\mu + n)^2 + q^2} (l_6 \cos qt - l_7 \sin qt) \right] v_0 + \\
& + \left[\frac{m_1}{2n} e^{-\mu t} - \frac{e^{-nt}}{(\mu + n)^2 + q^2} (m_6 \cos qt - m_7 \sin qt) \right] w_0
\end{aligned} \quad (107)$$

Из этих формул ясно видно влияние каждого из начальных значений u_0 , v_0 , w_0 на последующее движение гиросферы; ясно видно также постепенное погашение этого влияния и связь между движениями гиросферы и жидкости в успокоителе.

Формулы (106) и (107) представляют свободные колебания гиросферы; к ним надо, как указано выше [формула (87)], присовокупить *вынужденные* колебания $A(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$.

Все эти формулы развиты, несмотря на некоторую длинноту вычислений, на буквах в общем виде, так что, пользуясь ими, можно разобрать влияние на гироскопический маневрирования корабля. Кроме того, на основании этих формул по записи азимутальных колебаний α или, что то же, u , автоматически доставляемой курсографом, когда компас установлен на неподвижном фундаменте на берегу, — можно найти *все* параметры гиросферы, поступая так, как это показано в следующем параграфе.

§ 5. Итак, положим, что для величины

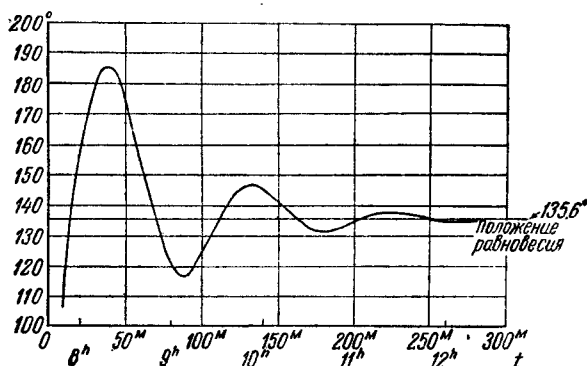
$$u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} \quad (108)$$

получена запись от курсографа. Эта запись имеет показанный на фиг. 1 вид извилистой кривой, приближающейся асимптотически к оси времен t . Требуется по этой записи найти величины λ_1 , λ_2 , λ_3 характеристического уравнения и частные значения постоянных произвольных C_1 , C_2 , C_3 , входящих в формулу (108).

Полное аналитическое решение этого вопроса изложено в моих „Лекциях о приближенных вычислениях“ (издание 3-е, § 64). Для

ясности и простоты справок это решение приводится здесь в несколько измененном и дополненном виде.

На полученной записи берется участок, захватывающий приблизительно три периода свободных колебаний гиросферы, т. е. около $4-4\frac{1}{2}$ часов.



Фиг. 1.

От начального момента t_0 , принимаемого за ноль отсчетов времени, откладываются по оси времени равноотстоящие абсциссы

$$0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots, k\tau \quad (109)$$

Взяв промежуток τ равным 5—6 минутам, на оси абсцисс помещают соответствующие этим значениям точки и снимают принадлежащие им ординаты

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \quad (110)$$

скажем, просто в миллиметрах, вводя масштаб в окончательные результаты.

Положив

$$e^{\lambda_1 \tau} = z_1; \quad e^{\lambda_2 \tau} = z_2; \quad e^{\lambda_3 \tau} = z_3 \quad (111)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= C_1 + C_2 + C_3 & (0) \\ \alpha_1 &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 & (1) \\ \alpha_2 &= C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 + C_3 z_3^2 & (2) \\ \alpha_3 &= C_1 z_1^3 + C_2 z_2^3 + C_3 z_3^3 & (3) \\ \alpha_4 &= C_1 z_1^4 + C_2 z_2^4 + C_3 z_3^4 & (4) \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_k &= C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k & (k) \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

в которой величины (110)

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$$

будут известны; неизвестными же являются

$$C_1, C_2, C_3, z_1, z_2, z_3 \quad (113)$$

Чтобы решить эти уравнения, положим, что

$$z_1, z_2, z_3$$

суть корни уравнения

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0 \quad (114)$$

коэффициенты которого B_1, B_2, B_3 — пока неизвестные числа. Чтобы их определить, подразделяем уравнения (112) на группы по четыре последовательных уравнения в каждой группе, составляя эти группы следующим образом: берем уравнения (0), (1), (2), (3) и, умножив их соответственно на

$$B_3, B_2, B_1, 1$$

складываем; тогда получаем:

$$\begin{aligned} B_3 \alpha_0 + B_2 \alpha_1 + B_1 \alpha_2 + \alpha_3 &= C_1 (B_3 + B_2 z_1 + B_1 z_1^2 + z_1^3) + \\ &+ C_2 (B_3 + B_2 z_2 + B_1 z_2^2 + z_2^3) + C_3 (B_3 + B_2 z_3 + B_1 z_3^2 + z_3^3) \end{aligned}$$

Так как по предположению z_1, z_2, z_3 суть корни уравнения (114), то будет тождественно

$$B_3 + B_2 z_1 + B_1 z_1^2 + z_1^3 = 0$$

$$B_3 + B_2 z_2 + B_1 z_2^2 + z_2^3 = 0$$

$$B_3 + B_2 z_3 + B_1 z_3^2 + z_3^3 = 0$$

а от первой группы получится равенство

$$B_3 \alpha_0 + B_2 \alpha_1 + B_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (115_1)$$

Это есть первое уравнение той системы, которая послужит для определения B_1, B_2, B_3 .

Совершенно так же, начав с уравнения (1) и поступая по предыдущему, имеем:

$$B_3 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + B_1 \alpha_3 + \alpha_4 = C_1 z_1 (B_3 + B_2 z_1 + B_1 z_1^2 + z_1^3) + \\ + C_2 z_2 (B_3 + B_2 z_2 + B_1 z_2^2 + z_2^3) + C_3 z_3 (B_3 + B_2 z_3 + B_1 z_3^2 + z_3^3)$$

отсюда следует уравнение

$$B_3 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + B_1 \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \quad (115_2)$$

Начав с уравнения (2), совершенно так же получим:

$$B_3 \alpha_2 + B_2 \alpha_3 + B_1 \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \quad (115_3)$$

Таким образом составитя система уравнений (115), служащая для определения неизвестных B_1, B_2, B_3 , а именно:

$$B_3 \alpha_0 + B_2 \alpha_1 + B_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ B_3 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + B_1 \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ B_3 \alpha_2 + B_2 \alpha_3 + B_1 \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \dots \dots \dots$$

$$B_3 \alpha_{k-3} + B_2 \alpha_{k-2} + B_1 \alpha_{k-1} + \alpha_k = 0$$

Эту систему, в которой B_1, B_2, B_3 суть неизвестные, решаем по методу наименьших квадратов, после чего составляем уравнение (114)

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0$$

и вычисляем его корни¹

$$z_1, z_2, z_3 \quad (116)$$

Если бы почему-либо потребовалось (для нашей цели этого не надо) вычислить и величины C_1, C_2, C_3 , то значения (116) надо подставить в уравнения системы (112), в которой тогда останутся неизвестные

$$C_1, C_2, C_3$$

и определить эти неизвестные по методу наименьших квадратов; но, повторяем, для нашей цели — определения параметров гиросферы — в вычислении C_1, C_2, C_3 нет надобности.

В самом деле, после того как корни z_1, z_2, z_3 вычислены, имеем равенства

$$e^{\lambda_1 \tau} = z_1; e^{\lambda_2 \tau} = z_2; e^{\lambda_3 \tau} = z_3 \quad (117)$$

причем τ — известная и притом положительная величина; эти равенства и послужат во всех случаях к определению неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

В гироскопической практике один из корней λ_1 — вещественный и отрицательный; значит, одна из величин z_1, z_2, z_3 будет вещественная, положительная и меньше 1; эту величину и примем за z_1 . Пусть будет

$$z_1 = \frac{1}{a}$$

где $a > 1$; тогда

$$\lambda_1 \tau = \ln a = -2.3026 \lg a$$

$$\lambda_1 = -2.3026 \frac{\tau}{\tau} \lg a \quad (118)$$

Другие два корня λ_2 и λ_3 комплексные, попарно сопряженные. Пусть

$$\lambda_2 = -n + qi; \quad \lambda_3 = -n - qi$$

¹ Этот изящный способ решения столь сложной системы уравнений, как (112), кажется, был дан Гауссом.

соответствующие значения z_2 и z_3 будут

$$z_2 = e^{-n\tau} e^{qi} = e^{-n\tau} (\cos q\tau + i \sin q\tau) = c + di$$

$$z_3 = e^{-n\tau} e^{-qi} = e^{-n\tau} (\cos q\tau - i \sin q\tau) = c - di$$

отсюда следует

$$e^{-n\tau} = + \sqrt{c^2 + d^2} = \rho$$

значит,

$$-n\tau = \ln \rho = 2.3026 \lg \rho$$

$$n = -2.3026 \frac{1}{\tau} \lg \rho \quad (119)$$

Затем имеем:

$$\rho \cos q\tau = c; \quad \rho \sin q\tau = d$$

следовательно,

$$\cos q\tau = \frac{c}{\rho}; \quad \sin q\tau = \frac{d}{\rho}; \quad |\operatorname{tg} q\tau| = \left| \frac{c}{d} \right| \quad (120)$$

Из равенства

$$|\operatorname{tg} q\tau| = \left| \frac{c}{d} \right|$$

найдем значение $q\tau$ в первой четверти, знаки же c и d покажут ту четверть, в которой $q\tau$ лежит; определив угол $q\tau$, находим и величину q , т. е. значения λ_2 и λ_3 — корней характеристического уравнения

$$\lambda^3 + F\lambda^2 + \frac{S\omega_1}{B}\lambda + \frac{F}{B}(S - C)\omega_1 = 0$$

Так как значения корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нам теперь известны, а именно:

$$\lambda_1 = -\mu; \quad \lambda_2 = -n + qi; \quad \lambda_3 = -n - qi$$

то по соотношению между корнями и коэффициентами имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\mu - 2n = -F \quad \text{или} \quad F = \mu + 2n \quad (121)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = n^2 + q^2 + 2n\mu = \frac{S\omega_1}{B} \quad (122)$$

$$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\mu(n^2 + q^2) = \frac{F}{B} \cdot (S - C)\omega_1$$

Из этих соотношений имеем:

$$\frac{F}{B} (S - C) \omega_1 \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{B}{S \omega_1} = 1 - \frac{C}{S} \quad (123)$$

отсюда определим C .

Кинетический момент B можно также определить по моменту инерции роторов гироскопов, что выполняется общеизвестным способом и по угловой их скорости, которая находится при помощи стробоскопа. Величина статического момента $S = mga$ определяется опытом наклона гиросферы, плавающей в ртутной ванне. Оба эти определения не зависят от предыдущих, что дает хороший контроль.

Здесь изложен общий теоретически правильный способ определения элементов гиросферы по анализу записи азимутальных ее колебаний.

На практике обыкновенно применяют приближенный способ определения указанных элементов, пользуясь максимумами и минимумами отклонений α , что дает величины p и q , после чего находится μ . На подробностях этой методы останавливаться не будем.

Г л а в а II

КОЛЕБАНИЯ ГИРОСФЕРЫ, КОГДА КОРАБЛЬ НАХОДИТСЯ НА ХОДУ

§ 6. Гироскопу присущи две погрешности: а) курсовая погрешность, или курсовая девиация, б) баллистическая погрешность, к рассмотрению которых и перейдем.

Курсовая погрешность зависит от скорости хода корабля, его курса и широты места и происходит вследствие кривизны земной поверхности, имея характер полукруговой девиации.

В самом деле, положим, что корабль в северном полушарии идет по курсу γ со скоростью V узлов и что в рассматриваемый момент его географическая широта есть φ и долгота λ . Скорости хода V и курсу γ соответствует быстрота изменения широты

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = \frac{V \cos \gamma}{R} \cdot \frac{1850}{3600} = \frac{c \cos \gamma}{6\,370\,000} = \frac{c \cos \gamma}{R} \quad (124)$$

и долготы

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda' = \frac{V \sin \gamma}{R \cos \varphi} \cdot \frac{1850}{3600} = \frac{c \sin \gamma}{6\,370\,000 \cos \varphi} = \frac{c \sin \gamma}{R \cos \varphi} \quad (125)$$

где множитель $\frac{1850}{3600}$ служит для перевода скорости, выраженной в узлах, в скорость c , выраженную в метрах в секунду, а $R=6\,370\,000$ есть длина радиуса Земли в метрах. Земля принимается за шар.

Ясно, что вышеприведенные выражения (124) и (125)

$$\varphi' = -\frac{c \cos \gamma}{R} \quad \text{и} \quad \lambda' = \frac{c \sin \gamma}{R \cos \varphi}$$

представляют угловые скорости изменения широты и долготы, выраженные в числовой мере, т. е. размерность их есть $\frac{1}{\text{сек.}}$.

Эти угловые скорости представляются следующими векторами: φ' вектором, откладываемым перпендикулярно меридиану места к Ost'y, когда φ' положительное, и к West'y, когда φ' отрицательное; λ' представляется вектором, откладываемым по оси мира по направлению к северному полюсу, когда λ' положительное, и к южному, когда λ' отрицательное, считая долготу от 0 до 2π положительной к Ost'y, принимая за начальный меридиан какого-либо данного места, скажем Гринича, как это делается для морских карт.

Вообразим координатные, неизменно связанные с землею оси $O\xi\eta\zeta$, начало коих O в данный момент t совпадает с центром гироскопа, ось $O\xi$ направлена вертикально вверх (к зениту), ось $O\xi$ — горизонтально к Nord'y, ось $O\eta$ — горизонтально к Ost'y, тогда имеем следующие слагающие угловых скоростей, с которыми увлекается гиросфера:

1) угловой скорости Земли ω :

$$\begin{array}{ll} \text{по оси } O\xi & \omega_1 = \omega \cos \varphi \\ \text{по оси } O\eta & 0 \\ \text{по оси } O\zeta & \omega_2 = -\omega \sin \varphi \end{array} \quad (126)$$

2) угловой скорости φ' изменения широты:

$$\begin{aligned} \text{по оси } O\xi & 0 \\ \text{по оси } O\eta & \varphi' \\ \text{по оси } O\zeta & 0 \end{aligned} \quad (127)$$

3) угловой скорости λ' изменения долготы:

$$\begin{aligned} \text{по оси } O\xi & \lambda' \cos \varphi \\ \text{по оси } O\eta & 0 \\ \text{по оси } O\zeta & \lambda' \sin \varphi \end{aligned} \quad (128)$$

Силу тяжести, если пренебречь ничтожно малым поворотным (корриолисовым) ускорением, можно считать направленной по оси $O\zeta$ вертикально вниз; следовательно, когда корабль имеет *равномерный* ход, то гироскопический компас переносится в пространстве не с угловой скоростью Земли, а с угловой скоростью Q , слагающие которой суть:

$$\begin{aligned} \text{по оси } O\xi & Q_\xi = Q \cos(Q, \xi) = (\omega - \lambda') \cos \varphi \\ \text{по оси } O\eta & Q_\eta = Q \cos(Q, \eta) = \varphi' \\ \text{по оси } O\zeta & Q_\zeta = Q \cos(Q, \zeta) = (\omega - \lambda') \sin \varphi \end{aligned} \quad (129)$$

Следовательно, при постоянном ходе корабля положением равновесия гироскопа будет не плоскость географического меридиана, проходящая через отвесную линию $O\zeta$ и направление вектора, изображающего угловую скорость вращения Земли ω , иначе ось мира, а плоскость, проведенная через отвесную линию $O\zeta$ и через вектор, представляющий угловую скорость Q . Очевидно, что эта вертикальная плоскость составляет с меридианом места угол δ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Q_\eta}{Q_\zeta} = \frac{\varphi'}{(\omega - \lambda') \cos \varphi} = \frac{c \cos \gamma}{R} \cdot \frac{1}{\omega \cos \varphi - \frac{c \sin \gamma}{R}}$$

или иначе

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c \sin \gamma}{R\omega \cos \varphi}} \quad (130)$$

Здесь s есть скорость корабля, выраженная в метрах в секунду, а $R = 6\,370\,000$ м.

Эта формула принимает более простой вид, если выразить скорость хода корабля в узлах (V) и величины φ' и λ' в минутах дуги в 1 секунду времени, помня, что узел есть скорость в 1 морскую милю в час, т. е. в 1 минуту дуги меридиана в час. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'}{\omega} &= \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{V \cos \gamma}{3600} \cdot \frac{24 \cdot 3600}{2\pi} = \frac{1}{900} V \cos \gamma \\ \frac{\lambda'}{\omega} &= \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{V \sin \gamma}{3600 \cos \varphi} \cdot \frac{24 \cdot 3600}{2\pi} = \frac{1}{900} \cdot \frac{V \sin \gamma}{\cos \varphi}\end{aligned}\quad (131)$$

Таким образом, будет

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{1}{900} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{900} \cdot \frac{V \sin \gamma}{\cos \varphi}} \quad (132)$$

Скорость хода больших морских судов в настоящее время не превышает 45 узлов, поэтому отношение

$$\frac{V}{900} \leq \frac{1}{20} \quad (133)$$

значит, можно приближенно писать

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{1}{900} \cdot \frac{V}{\cos \varphi} \cdot \cos \gamma \quad (134)$$

или даже по малости угла δ вне близполярных широт будет в градусах

$$\delta^\circ = -\frac{57.3}{900} \cdot \frac{V}{\cos \varphi} \cos \gamma \approx -\frac{1}{15} \cdot \frac{V}{\cos \varphi} \cos \gamma \quad (135)$$

Отсюда видно, что в нашей широте (60°) курсовая девиация при ходе в 45 узлов по курсу $\gamma = 0(N)$ составит кругло

$$\delta^\circ = -6^\circ$$

Для весьма быстроходного 75-узлового моторного катера курсовая девиация составила бы

$$\delta^\circ = -10^\circ$$

а для самолета со скоростью 300 узлов (540 км в час) было бы

$$\delta^\circ = -\arctg\left(\frac{2}{3}\right) = -33^\circ$$

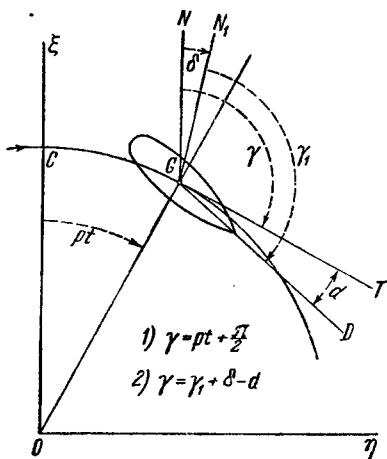
Гирокомпасы Аншютца и Сперри снабжаются особым счетным прибором, автоматически исправляющим курсовую девиацию, не воздействуя при этом на гиросферу.

§ 7. Баллистическая девиация происходит от изменений курса или скорости хода корабля, или того и другого вместе. Наиболее часто встречающийся случай есть тот, когда корабль описывает циркуляцию полную, т. е., описав полный круг, ложится на первоначальный курс, или неполную, когда корабль, описав полукруг, ложится на обратный курс, или вообще, описав дугу круга, изменяет свой курс на какой-либо угол.

С рассмотрения этого простейшего случая мы и начнем изучение баллистической девиации.

Итак, примем, что на корабле, идущем прямым курсом, руль будет отклонен от прямого своего положения на какой-нибудь угол, или, как говорят, будет „положен на борт“. Тогда корабль начнет описывать так называемую циркуляцию, которая после того, как корабль отклонится от прямого курса примерно на 45° , весьма близка к кругу, т. е. центр тяжести корабля движется с *постоянной по величине скоростью* по некоторому кругу, радиус которого называется *радиусом циркуляции*.

Гирокомпас, который мы предположим установленным так, что центр тяжести гиросферы совпадает с центром тяжести корабля, увлекается в это переносное движение и движется с *постоянным по величине ускорением*, направленным к центру указанного круга.



Фиг. 2.

Причиной этого постоянного ускорения, помимо давления воды на руль, является так называемый *угол дрейфа* корабля на циркуляции.

Пусть в рассматриваемый момент центр тяжести корабля находится в точке G (фиг. 2) и скорость v этой точки направлена по касательной GT к кругу циркуляции; под действием давления P на руль диаметральной плоскости корабля не совпадает с направлением касательной, а носовая часть уклонена от касательной *во внутрь* круга на угол d , который называется *углом дрейфа*.

Пусть GN есть направление географического меридиана места. Тогда угол $NGT = \gamma$ есть *истинный курс* корабля, т. е. то направление, по которому в данный момент центр тяжести G корабля перемещается, иными словами „корабль идет“; угол NGD есть направление диаметральной плоскости, т. е. *показание компаса*, если бы у него никакой погрешности не было; если же у компаса есть погрешность $NGN_1 = \delta$, то показание компаса (мгновенный компасный курс) будет

$$\gamma_1 = \gamma - \delta + d \quad (136)$$

значит,

$$\gamma = \gamma_1 + \delta - d \quad (136')$$

Если в этой формуле все углы считать от 0 до 360° по часовой стрелке, то все углы будут положительные. Но по отношению малых углов δ и d такой счет не удобен, и принято считать так: угол δ от истинного меридиана вправо, т. е. к Ost'у со знаком (+), к West'у со знаком (—); угол дрейфа $d = DGT$ считается вправо и влево от диаметральной плоскости GD до направления касательной GT , причем этому углу приписывается знак (+), если касательная лежит *вправо* от диаметральной плоскости, а знак (—), если касательная лежит *влево* от диаметральной плоскости, как это, например, имеет место на чертеже (фиг. 2).

При дрейфе формулу курсовой погрешности надо писать следующим образом:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{900} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{900} \cdot \frac{V \sin \gamma}{\cos \varphi}} \quad (137)$$

ибо направление хода корабля есть угол γ , а не γ_1 , по которому направлена диаметральной плоскость.

Формулу (136')

$$\gamma = \gamma_1 + \delta - d$$

надо разуметь алгебраически, соответственно указанному выше правилу знаков при счете входящих в эту формулу углов.

Здесь необходимо обратить внимание, что при обычном способе наблюдений, т. е. по створу, пеленгу отдаленного предмета, азимуту Солнца, можно получить из наблюдений углы

$$N_1GD = \gamma_1 + \delta \text{ и } NGD = \gamma \quad (138)$$

откуда найдется δ ; угол же дрейфа остается неопределенным (наблюдение по лаглиню на циркуляции или невозможно, или слишком неточно).

Практически возможный способ — это определять всю циркуляцию корабля по способу трех „компасов“; но этот способ мало употребителен по его сложности, и кажется, что, кроме меня, когда я заведывал Опытным бассейном (1900—1908 гг.), мало кто этот способ применял.

Для современных длинных быстроходных судов угол дрейфа вообще не велик (около 3—6°), поэтому обыкновенно полагают

$$\gamma = \gamma_1 + \delta \quad (139)$$

или просто $\gamma = \gamma_1$, считая, что на циркуляции курсовая девиация компенсируется баллистической, как о том будет сказано ниже.

После этих предварительных объяснений положим, что движение корабля установилось, так что его центр тяжести движется равномерно по кругу; это будет простейший случай, с рассмотрения которого и начнем.

Возьмем начало O неизменно связанных с Землею координат в центре O циркуляции; ось $O\xi$ направим по истинному географическому меридиану к Nord'у, ось $O\eta$ — по первому вертикалу к Ost'у и будем считать время с того момента, когда корабль пересек меридиан места и его курс Ost. Тогда, пренебрегая дви-

жением осей координат вместе с Землею в их плоскости, будем иметь следующие уравнения движения центра тяжести корабля:

$$\xi = a \cos pt; \quad \eta = a \sin pt \quad (140)$$

где a есть радиус циркуляции и $p = \frac{2\pi}{\tau}$; причем τ есть период обращения центра тяжести корабля по циркуляции, иначе время описания полной циркуляции, составляющее для больших судов около 300 секунд.

Уравнения движения гиросферы, освобожденные от члена ω_2 , т. е. отнесенные к положению ее динамического равновесия, как указано в § 1, суть

$$\begin{aligned} \alpha' + \frac{S}{B} \beta + \frac{C}{B} \vartheta - \frac{S}{B} \chi_N &= 0 \\ \beta' - \omega_1 \alpha - \frac{V_N}{R} &= 0 \\ \vartheta' + F\beta + F\vartheta - F\chi_N &= 0 \end{aligned} \quad (141)$$

При сделанных обозначениях будет

$$\begin{aligned} \chi_N &= -\frac{\xi''}{g} = +\frac{ap^2}{g} \cos pt \\ \frac{1}{R} V_N &= -\frac{ap}{R} \sin pt \end{aligned} \quad (142)$$

и возмущающие силы $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ будут

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{S}{B} \cdot \frac{ap^2}{g} \cos pt = \frac{S}{B} \chi_N \\ \varphi_2(t) &= -\frac{ap}{R} \sin pt = \frac{V_N}{R} \\ \varphi_3(t) &= F \frac{ap^2}{g} \cos pt = F\chi_N \end{aligned} \quad (143)$$

Имея эти выражения, можно, на основании формул § 2, составить конечные уравнения движения гиросферы и жидкости в усскоителе, но ввиду простоты выражений (143) применим не общие формулы, а частные приемы, как то делает Геккелер.

Из формулы (36) по подстановке и упрощении следует

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{\Omega^2}{\omega_1} \left(\frac{g}{R} - p^2 \right) \cdot \frac{ap}{q} [p \cos pt + \kappa F \sin pt] = \\ &= Q [p \cos pt + \kappa F \sin pt]\end{aligned}\quad (144)$$

причем временно положено

$$Q = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \left(\frac{g}{R} - p^2 \right) \cdot \frac{ap}{g} \approx - \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap^3}{g} \quad (145)$$

ибо величина $\frac{g}{R}$ весьма мала по сравнению с p^2 , именно $\frac{g}{R} < \frac{1}{200} p^2$.

Таким образом, уравнение, которым определяются азимутальные колебания гиросферы при движении корабля на циркуляции, есть

$$\alpha''' + F\alpha'' + \Omega^2\alpha' + \kappa\Omega^2F\alpha = \psi(t) = Q(p \cos pt + \kappa F \sin pt) \quad (146)$$

и на основании формулы (66) частное решение этого уравнения, представляющее *вынужденные* азимутальные колебания, есть

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{e^{-\nu t}}{(\mu - n)^2 + q^2} \int_0^t e^{\nu \xi} \psi(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{q} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{(\mu - n)^2 - \dots}} \int e^{\nu \xi} \cos[q(t - \xi) + \epsilon] \psi(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (147)$$

Нетрудно видеть, что если сдөрва не требовать, чтобы было соблюдено условие

$$A(0) = 0$$

то будет частное решение

$$A(t) = X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt \quad (148)$$

где X_1 , Y_1 суть неопределенные коэффициенты, которые находятся так, чтобы величина (148) удовлетворяла уравнению (146).

Поступая по обычной методе, имеем уравнения

$$(\kappa\Omega^2F - \mu^2F) X_1 + (p\Omega^2 - p^3) Y_1 = pQ \quad (149)$$

$$-(\Omega^2p - p^3) X_1 + (\kappa\Omega^2F - \mu^2F) Y_1 = \kappa FQ \quad (150)$$

Отсюда следует

$$X_1 = -\frac{Fp^3(1-\kappa)}{F^2(\kappa\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} Q \quad (151)$$

$$Y_1 = \frac{p^2(\Omega^2 - p^2) + \kappa F^2(\kappa\Omega^2 - p^2)}{F^2(\kappa\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} Q \quad (152)$$

следовательно,

$$\Lambda(t) = X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt \quad (153)$$

Выражения X_1 , Y_1 могут быть упрощены, ибо в практике гироскопического дела

$$\Omega^2 < \frac{1}{200} p^2; \quad \kappa \approx \frac{1}{3} \quad (154)$$

поэтому приближенно будет

$$\Omega^2 - p^2 \approx -p^2; \quad \kappa\Omega^2 - p^2 \approx -p^2$$

тогда будет

$$X_1 \approx -\frac{F(1-\kappa)}{p(p^2 + F^2)} Q; \quad Y_1 = -\frac{p^2 + \kappa F^2}{p^2(p^2 + F^2)} Q \quad (155)$$

Совершенно подобным же образом найдем для этого частного случая и величину $B(t)$, $\Theta(t)$, — стоит только составить, на основании формул (143), выражения $\sigma(t)$ и $\theta(t)$ по формулам (76) и (78):

$$\sigma(t) = \varphi_2'' + F\varphi_2' + \omega_1\varphi_1' + F\omega_1\varphi_1 - \frac{C\omega_1}{B} \varphi_3 \quad (76)$$

$$\theta(t) = \varphi_3'' + \Omega^2\varphi_3 - F\varphi_2' - F\omega_1\varphi_1 \quad (78)$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{ap^2}{g} F \left(\frac{g}{R} + \kappa\Omega^2 \right) \cos pt + \frac{ap^3}{g} \left(\Omega^2 - \frac{g}{R} \right) \sin pt \\ \theta(t) &= \frac{ap^2}{g} F \left[\left(\Omega^2 - \frac{g}{R} \right) - \left(p^2 + \frac{g}{R} \right) \right] \cos pt = \\ &= \frac{ap^2}{g} F (\Omega^2 - p^2) \cos pt \end{aligned} \quad (156)$$

Полагая затем

$$\begin{aligned} B(t) &= X_2 \cos pt + Y_2 \sin pt \\ \Theta(t) &= X_3 \cos pt + Y_3 \sin pt \end{aligned} \quad (157)$$

получим для определения X_2 , Y_2 , X_3 , Y_3 две системы уравнений, левые части которых будут отличаться от (149) и (150) только

тем, что вместо значка 1 стоят соответственно значки 2 и 3, т. е. будет

$$\begin{aligned} F(\chi\Omega^2 - p^2) X_2 + p(\Omega^2 - p^2) Y_2 &= \frac{ap^2}{g} F\left(\frac{g}{R} + \chi\Omega^2\right) \\ - p(\Omega^2 - p^2) X_2 + F(\chi\Omega^2 - p^2) Y_2 &= \frac{ap^3}{g} \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right) \end{aligned} \quad (158)$$

и

$$\begin{aligned} F(\chi\Omega^2 - p^2) X_3 + p(\Omega^2 - p^2) Y_3 &= \frac{ap^2}{g} F(\Omega^2 - p^2) \\ - p(\Omega^2 - p^2) X_3 + F(\chi\Omega^2 - p^2) Y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (159)$$

Отсюда следует

$$X_2 = \frac{F^2(\chi\Omega^2 - p^2) \left(\frac{g}{R} + \chi\Omega^2\right) - p^2(\Omega^2 - p^2) \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right)}{F^2(\chi\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} \cdot \frac{ap^2}{g} \quad (160)$$

$$Y_2 = \frac{(\Omega^2 - p^2) \left(\frac{g}{R} + \chi\Omega^2\right) + \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right) (\chi\Omega^2 - p^2)}{F^2(\chi\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} \cdot \frac{ap^3}{g} F$$

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{(\chi\Omega^2 - p^2) F}{F^2(\chi\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} \cdot \frac{ap^2}{g} F(\Omega^2 - p^2) \\ Y_3 &= \frac{p(\Omega^2 - p^2)}{F^2(\chi\Omega^2 - p^2)^2 + p^2(\Omega^2 - p^2)^2} \cdot \frac{ap^2}{g} F(\Omega^2 - p^2) \end{aligned} \quad (161)$$

Эти формулы, подобно формулам (151) и (152), значительно упрощаются, если в них отбросить малые сравнительно с p^2 члены; тогда будет

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{a}{g} \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right); & Y_2 &= - \frac{(1 + \chi)\Omega^2}{p} \cdot \frac{a}{g} F \\ X_3 &= \frac{ap}{g} \cdot F; & Y_3 &= \frac{ap}{g} F \end{aligned} \quad (162)$$

Вернемся к выражению $\Lambda(t)$, даваемому формулами (153) и (155), и положим, что успокоитель выключен; тогда $F=0$ и

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = - \frac{1}{p^2} Q; \quad Q = - \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap^3}{g} \quad (163)$$

$$\Lambda(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \frac{ap}{g} \sin pt \quad (164)$$

Но из фиг. 2 видно, что курс

$$\gamma = pt + \frac{\pi}{2}$$

значит,

$$\sin pt = \cos \gamma$$

следовательно,

$$A(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma = \frac{\Omega^2}{\omega} \cdot \frac{c}{g} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (165)$$

ибо

$$ap = c; \quad \omega_1 = \omega \cos \varphi$$

Но при скорости c и курсе γ курсовая девиация

$$\delta = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi}$$

поэтому полное отклонение оси гиросферы от меридиана будет

$$A(t) + \delta = \left(\frac{\Omega^2}{g} - \frac{1}{R} \right) \frac{c \cos \gamma}{c \cos \varphi} \quad (166)$$

Отсюда видно, что если взять

$$\Omega^2 = \frac{g}{R} \quad (167)$$

то будет

$$A(t) + \delta = 0 \quad (168)$$

т. е. баллистическая девиация $A(t)$ во всякий момент компенсирует курсовую девиацию гироскопа.

Условие (167) было дано Максом Шуллером в его докторской диссертации, и формула (167) есть одна из немногих формул теоретической механики, применение которой к практике охранялось патентом, выданным на имя Аншютца и Шуллера.

Необходимо однако обратить внимание, что указанная компенсация имеет место лишь при следующих условиях:

$$1) \quad F = 0$$

т. е. успокоитель выключен на циркуляции;

$$2) \quad A(0) = B(0) = \Theta(0) = 0$$

т. е. свободные колебания гиросферы не зависят от вынужденных.

Но при $F=0$ отсутствует погашение свободных колебаний; отсюда ясно, что возникает необходимость исследовать, что будет происходить, когда

$$F \neq 0 \text{ и } \Omega^2 - \frac{g}{R} \neq 0$$

и когда вместо приближенного выражения курсовой девиации

$$\delta = - \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi}$$

было бы взято полное ее выражение:

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \sin \gamma}{\cos \varphi}}$$

На необходимость этого исследования в статье Геккелера не обращено достаточного внимания, и при пользовании гирокомпасом обнаруживаются иногда погрешности, которые представляются противоречащими теории, на самом же деле являющиеся подтверждением ее.

§ 8. Прежде чем приступить к исследованию формулы (153)

$$\Lambda(t) = X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt$$

в которой положено

$$\begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{\tau}; \quad Q = \frac{\omega^2}{\omega_1} \left(\frac{g}{R} - p^2 \right) \frac{ap}{g} = - \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap^3}{g} \\ X_1 &\approx - \frac{F(1-\kappa)}{p(p^2 + F^2)} Q; \quad Y_1 = - \frac{p^2 + \kappa F^2}{(p^2 + F^2)p^2} Q \end{aligned} \quad (153_1)$$

приведем численные величины параметров гиросферы, указанные в статье Геккелера, на основании данных фирмы Аншютц.

Значения, приведенные в „Ingenieur Archiv“ (Bd. IV, N. 2, April, 1933), таковы:

стр. 135: $\frac{C}{S} = 0.667;$

стр. 143: $\frac{C}{S} = \frac{2}{3}; \quad \frac{F}{\Omega} = 1.6-0.9, \text{ среднее } 1.25; F = 0.001550;$

$$\Omega^2 = \frac{g}{R} = 1.538 \cdot 10^{-6}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 5063 \text{ сек.}$$

$$x = \frac{S-C}{S} = \frac{1}{3}$$

1.° Положим для примера $\tau = 300$ сек., тогда

$$p = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{6.28}{300} \approx \frac{1}{48} \left(\frac{1}{\text{сек.}} \right)$$

$$\frac{F}{p} = \frac{3}{40}; \quad \frac{F^2}{p^2} = \frac{9}{1600} = \frac{1}{177} \approx \frac{1}{180}$$

При вышеприведенных значениях будет приближенно

$$X_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{F}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{F^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{p^2} \approx -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{180}} \cdot \frac{1}{p^2} \approx -\frac{1}{20} p^2$$

$$Y_1 = -\frac{1 + x \frac{F^2}{p^2}}{p^2 \left(1 + \frac{F^2}{p^2} \right)} = -\frac{1 + \frac{1}{540}}{\left(1 + \frac{1}{180} \right) p^2} \approx -\frac{1 + 0.002}{1 + 0.006} \cdot \frac{1}{p^2} \approx \\ \approx -0.996 \frac{1}{p^2} \approx -\frac{1}{p^2}$$

Таким образом, при

$$\tau = 300 \text{ сек.}; \quad p = \frac{1}{48} \frac{1}{\text{сек.}}; \quad F = 0.00155 \frac{1}{\text{сек.}}$$

будет

$$\Lambda(t) = \frac{1}{20} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin \gamma + 0.996 \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma \quad (169)$$

Коэффициент $0.996 = 1 - 0.004$ дает в компенсации приближенного значения курсовой девиации

$$\delta = \delta_1 = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} = -\frac{1}{900} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (170)$$

погрешность, равную 0.004δ , что при $\delta = 6^\circ$ составляет 0.02 и практического значения не имеет; поэтому вместо $0.996 \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma$

можно брать $\frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma$ и, значит, главный член курсовой девиации (164) при соотношении

$$\Omega^2 = \frac{g}{R}$$

компенсируется в точности, но член

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin \gamma$$

вносит соответствующую ему погрешность, пропорциональную синусу курса. Наибольшая абсолютная величина этой погрешности составляет $\frac{1}{20} \delta$, т. е. в нашей широте при скорости 45 узлов около 0.3° , что вполне достаточно для навигационного назначения гирокомаса, но недостаточно для артиллерийских надобностей.

2° Величина

$$\delta_1 = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi}$$

представляет лишь первый член в разложении точного значения курсовой девиации, даваемого формулой

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi}$$

Разложение

$$\delta = \operatorname{tg} \delta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \delta = \operatorname{tg} \delta \left[1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \delta \right]$$

пока $\delta \leq 0.20$ (т. е. градусной мере $\delta \leq 12^\circ$), показывает, что погрешность формулы $\delta = \operatorname{tg} \delta$ составляет $\frac{1}{3} (0.2)^3 \approx 0.003$, что практического значения не имеет; таким образом, можно полагать

$$\delta = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi}$$

Но замена множителя

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi}$$

через единицу вносит погрешность, которая при $\varphi = 80^\circ$ и $V = 40$ узлов достигает 25%, т. е. $0.25 \delta_1$, что чувствительно даже при пользовании гироскопом для навигационных целей.

В самом деле, возьмем разложение

$$1 - \frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi = 1 + \frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi + \dots$$

и ограничимся в нем членом

$$\frac{1}{R\omega} c \sin \gamma \sec \varphi$$

Таблица 1

Значения ошибки в курсовой девиации вследствие удержания только главного члена в ее выражении

Ошибка относительная (%)								Ошибка абсолютная			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ	сек φ	$V = 40$ узлов	$V = 30$ узлов	$V = 25$ узлов	$V = 20$ узлов	$V = 15$ узлов	$V = 10$ узлов	$V = 40$ узлов	$V = 30$ узлов	$V = 20$ узлов	$V = 10$ узлов
40°	1.31	5.82	4.36	3.65	2.91	2.18	1.45	0°19	0°10	0°05	0°01
45	1.41	6.26	4.70	3.92	3.13	2.35	1.57	0.23	0.13	0.06	0.01
50	1.56	6.92	5.20	4.34	3.46	2.60	1.73	0.27	0.16	0.07	0.02
55	1.74	7.72	5.80	4.84	3.86	2.90	1.93	0.34	0.19	0.09	0.02
60	2.00	8.86	6.67	5.56	4.44	3.33	2.22	0.45	0.25	0.11	0.03
65	2.37	10.53	7.90	6.60	5.26	3.95	2.63	0.63	0.36	0.16	0.04
70	2.92	12.96	9.75	8.12	6.46	4.87	3.23	1.05	0.55	0.24	0.06
75	3.86	17.60	12.88	10.72	8.58	6.44	4.29	1.74	0.95	0.41	0.10
80	5.76	25.60	19.20	16.00	12.80	9.60	6.40	3.73	2.11	0.95	0.23

Примечание. Значения курсовой девиации взяты из столбцов 5, 7, 9 и 11 табл. 2. По умножении этих чисел на соответствующие значения относительной ошибки получена величина абсолютных ошибок.

Очевидно, что этот член и представит относительную погрешность величины δ . Наибольшее значение этого члена есть

$$\zeta_m = \frac{1}{R_\omega} c \sec \varphi$$

Абсолютная погрешность будет

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{R_\omega} c \sin \gamma \sec \varphi \cdot \delta = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_\omega} c \sec \varphi \right)^2 \sin 2\gamma$$

Для наглядности приводится табл. 1, показывающая процентную и абсолютную ошибку величины δ .

Из табл. 1 видно, что лишь при широте $\varphi = 70^\circ$ и скорости $V = 40$ узлов ошибка приближенного выражения

$$\delta = -\frac{57.3}{900} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (*)$$

достигает 1° , а затем превышает эту величину. Но плавание в столь высоких широтах, как 75 и 80° , со скоростью 30 и 40 узлов, если и происходит, то лишь вследствие теперешней войны.

Гирокомпасов на самолетах и дирижаблях мы в этой статье не касаемся.

Таким образом, можно считать, что для навигационных надобностей точность формулы (*) вполне достаточна.

Из пп. 1° и 2° следуют такие заключения:

а. *Баллистическая погрешность на круговой циркуляции выражается формулой (169) и при соотношении*

$$\Omega^2 = \frac{g}{R} \quad (171)$$

компенсирует главный член курсовой девиации

$$\delta_1^\circ = -\frac{57.3}{900} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (172)$$

Член

$$\zeta(t) = \frac{1}{20} \Omega^2 \frac{V}{g} \sin \gamma \quad (173)$$

в выражении баллистической погрешности остается некомпенсированным, но величина его не более $\frac{1}{20} \delta_1$ (при $\tau = 300$ сек.).

6. Компенсация баллистической девиацией главного члена курсовой девиации оставляет чувствительную в высоких широтах курсовую погрешность $\varepsilon_1(t)$, которая в градусной мере выражается приближенной формулой

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{2} 57.3 \left(\frac{c}{R_{\omega}} \sec \varphi \right)^2 \sin 2\gamma \quad (173_1)$$

Механический корректор, воспроизводящий точную формулу курсовой девиации, но не воздействующий на гиросферу, не устраняет вынужденных „остаточных колебаний“ гиросферы на циркуляции, по окончании описания которой эти „остаточные колебания“ переходят в затухающие свободные колебания гиросферы.

3°. В компасах марки „Курс“, не имеющих регулировки периода свободных колебаний соответственно широте места (такая регулировка осуществлена в компасах марки „Полус“), происходит при изменении широты погрешность показаний, величину которой и исчислим.

Положим сперва, что успокоитель выключен, т. е.

$$F=0$$

тогда уравнения свободных колебаний будут

$$\left. \begin{aligned} u' + \frac{S}{B} v + \frac{C}{B} w &= 0 & (1) \\ v' - \omega_1 u &= 0 & (2) \\ w' &= 0 & (3) \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

Из последнего уравнения следует

$$w = C_3 = w_0$$

где C_3 есть произвольная постоянная, которая равна начальному значению w_0 величины w .

Дифференцируя первое уравнение и заменяя v' его величиной из второго, имеем:

$$u'' + \frac{S\omega_1}{B} u = 0$$

а так как по формуле (15)

$$\frac{S\omega_1}{B} = \Omega^2$$

то предыдущее уравнение будет

$$u'' + \Omega^2 u = 0 \quad (175)$$

следовательно,

$$u = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t \quad (176)$$

и, на основании уравнения (1), будет

$$v = -\frac{C}{S} w_0 - \frac{B}{S} u' = -\frac{C}{S} w_0 + \frac{\omega_1}{\Omega} (C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t) \quad (177)$$

Положив

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \text{т. е. } T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega \cos \varphi}}$$

напишем предыдущие формулы так:

$$\begin{aligned} \alpha = u &= C_1 \cos \frac{2\pi t}{T_0} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T_0} \\ \beta = v + \beta_r &= \beta_r - \frac{C}{S} w_0 + \frac{\omega_1}{\Omega} \left(C_1 \sin \frac{2\pi t}{T_0} - C_2 \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) \end{aligned} \quad (178)$$

Отсюда видно, что T_0 есть период свободных колебаний гиросферы, т. е. как азимутальных, так и угловых колебаний ее оси, и на основании соотношения

$$\Omega^2 = \frac{g}{R}$$

будет

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{6370000}{9.810}} = 5063 \text{ сек.} \approx 84 \text{ мин. } 23 \text{ сек.}$$

Таким образом, теорема Шуллера может быть выражена так: *при выключенном успокоителе баллистическая погрешность и курсовая девиация на циркуляции взаимно компенсируются, если период свободных колебаний гиросферы равен 84 мин. 23 сек.*

Этот период выражается формулами

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega \cos \varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (179)$$

Указанная компенсация происходит, как показано выше, потому, что при выключенном успокоителе баллистическая погрешность на циркуляции выражается формулой

$$\Lambda(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma = \frac{\Omega^2}{\omega} \cdot \frac{c}{g} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (180)$$

и главный член курсовой девиации — формулой

$$\delta = -\frac{c}{R\omega_1} \cos \gamma = -\frac{c}{R\omega} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (181)$$

так что полная погрешность D , равная сумме курсовой и баллистической, будет

$$D = \Lambda(t) + \delta = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\Omega^2}{g} - \frac{1}{R} \right) \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi} \quad (182)$$

значит, если

$$\Omega^2 - \frac{g}{R} = 0$$

то будет

$$D = 0$$

причем

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{S\omega_1}{B} = \frac{S\omega}{B} \cos \varphi \\ T_0 &= \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{S\omega \cos \varphi}} \end{aligned} \quad (183)$$

Положим, что компас отрегулирован для широты φ_0 , наблюдения же производится в широте φ_1 ; тогда курсовая погрешность будет

$$\delta = -\frac{c}{R\omega} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi_1}$$

баллистическая же сохранит первоначальное свое значение и будет по-прежнему

$$\Lambda(t) = \frac{\Omega^2}{\omega} \cdot \frac{c}{g} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi_0}$$

следовательно, компенсация нарушится и останется погрешность

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\Omega^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_1} \right) c \cos \gamma \quad (184)$$

Таблица 2

Наибольшие значения остаточной курсовой погрешности

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$V = 40$ узлов		$V = 30$ узлов		$V = 20$ узлов	
										$V = 10$ узлов	
α_1	$\cos \varphi_1$	$\frac{57^{\circ} 3}{900} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_1}$	$\frac{1}{2} - \cos \varphi_1$	$\delta = V \cdot (3) = 2 \cdot (5) \cdot (4)$	$\delta = V \cdot (3)$	$\delta_2 = 2 \cdot (7) \cdot (4) = V \cdot (3) \cdot (4)$	$\delta = V \cdot (3)$	$\delta_2 = 2 \cdot (9) \cdot (4)$	$\delta = V \cdot (3)$	$\delta_2 = 2 \cdot (11) \cdot (4)$	
40°	0.766	0.0832	-0.266	(—)	+1.76	(—)	+1.32	(—)	+0.88	(—)	+0.44
45	0.707	0.0901	-0.207	3.60	+1.49	2.70	+1.12	1.80	+0.75	0.90	+0.37
50	0.643	0.101	-0.143	3.97	+1.14	2.97	+0.86	1.98	+0.57	0.99	+0.29
55	0.5736	0.111	-0.0736	4.44	+0.66	3.33	+0.50	2.22	+0.33	1.11	+0.17
60	0.5000	0.127	0.0000	5.08	0.00	3.81	0.00	2.54	0.00	1.27	0.00
65	0.4226	0.151	+0.0774	6.02	-0.95	4.52	-0.71	3.01	-0.48	1.51	-0.24
70	0.342	0.186	+0.158	7.44	-2.37	5.58	-1.78	3.72	-1.19	1.86	-0.59
75	0.259	0.246	+0.241	9.84	-4.75	7.38	-3.06	4.92	-2.38	2.46	-1.23
80	0.174	0.366	0.326	14.64	-9.50	11.00	-7.20	7.31	-4.71	3.65	-2.32

Очевидно, что будет тождественно

$$-\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_1} = -\frac{1}{R \cos \varphi_0} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\cos \varphi_0} \right)$$

следовательно,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{\Omega^2}{g} - \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{\cos \varphi_0} \right) \right] c \cos \gamma$$

Но по предположению

$$\frac{\Omega^2}{g} - \frac{1}{R} = 0$$

значит, останется

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi_1} \quad (185)$$

Но для места наблюдения будет

$$\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{c \cos \gamma}{\cos \varphi_1} = -\delta$$

следовательно, некомпенсированная погрешность будет

$$\varepsilon_2 = -\delta \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \delta \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} \quad (186)$$

Положим, что компас регулирован для широты $\varphi_0 = 60^\circ$, так что $\cos \varphi_0 = \frac{1}{2}$; тогда будет

$$\varepsilon_2 = 2\delta \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi_1 \right) \quad (187)$$

или в градусной мере

$$\varepsilon_2^\circ = 2 \cdot \frac{57.3}{900} V \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi_1} \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi_1 \right) \quad (187_1)$$

где V есть скорость хода корабля в узлах.

Пользуясь этими формулами, легко составить следующую таблицу (табл. 2) наибольших значений величин δ и ε_2 в зависимости от скорости хода и широты места наблюдения, предполагая, что компас регулирован для широты $\varphi_0 = 60^\circ$.

Все эти выводы относятся к тому случаю, когда на циркуляции успокоитель выключен, т. е.

$$F=0$$

когда же успокоитель не выключается, то к величине ϵ_2 прибавляется член (173)

$$\frac{1}{20} \Omega^2 \frac{V}{g} \sin \gamma = \zeta$$

как о том сказано в заключении I.

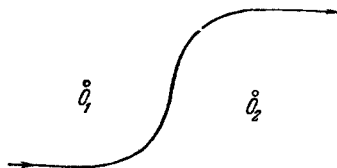
Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

в. В компасах марки „Курс“ при изменении широты места наблюдения появляется значительная „остаточная“ погрешность, о величине которой можно судить по приведенной выше табл. 2.

Эта погрешность пропорциональна скорости хода и косинусу курса.

По окончании описания циркуляции это остаточная погрешность, присовокупляясь к начальному значению угла α , переходит из вынужденных в свободные затухающие колебания с того момента, как корабль ляжет на прямой курс или начнет описывать вторую половину „координата“.

В учении об эволюциях корабля „координатом“ называется описание двух непрерывно следующих одна за другой циркуляций, обращенных в противоположные стороны, например таких, как показано на фиг. 3.



Фиг. 3.

§ 9. В этом и в последующих параграфах я имею в виду дать изложение того влияния, которое оказывает неполная компенсация курсовой и баллистической девиации на последующие колебания гиросферы.

В § 4 составлены выражения (107), представляющие конечные уравнения свободных колебаний гиросферы, и определены ве-

денные интегрированием постоянные так, что при $t=0$ имеют место равенства

$$(u)_{t=0} = u_0; \quad (v)_{t=0} = v_0; \quad (w)_{t=0} = w_0 \quad (188)$$

т. е. начальные условия удовлетворены.

В § 2 составлены выражения

$$\Lambda(t), \quad B(t), \quad \Theta(t) \quad (189)$$

т. е. выражения *вынужденных* колебаний под видом определенных интегралов, взятых между пределами 0 и t и заключающих под своим знаком возмущающие функции

$$\varphi_1(\xi), \quad \varphi_2(\xi), \quad \varphi_3(\xi)$$

где ξ есть та переменная, по которой интегрирование производится; при таком представлении условия

$$\Lambda(0) = B(0) = \Theta(0) = 0 \quad (190)$$

будут выполнены. Уравнения

$$\begin{aligned} \alpha &= u + \Lambda(t) \\ \beta &= \beta_r + v + B(t) \\ \vartheta &= \vartheta_r + w + \Theta(t) \end{aligned} \quad (191)$$

в которых u , v , w определяются равенствами (107) и β_r и ϑ_r — равенствами (6), суть конечные уравнения возмущенного движения гиросферы в общем случае, когда успокоитель включен и фактор перетекания $F \neq 0$.

Затем в § 8, п. 3° дано полное решение для того случая, когда $F=0$.

Кроме того, в § 7 показано, каким образом при движении корабля по круговой циркуляции вынужденные колебания

$$\Lambda(t), \quad B(t), \quad \Theta(t)$$

находятся под видом

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt \\ B(t) &= X_2 \cos pt + Y_2 \sin pt \\ \Theta(t) &= X_3 \cos pt + Y_3 \sin pt \end{aligned} \quad (192)$$

если применять методу неопределенных коэффициентов [см. уравнения (157)—(162)].

Но при применении этой методы *не соблюдены условия* (190), ибо

$$\Lambda(0) \neq 0; \quad B(0) \neq 0; \quad \Theta(0) \neq 0$$

и, значит, нельзя совместно писать

$$\begin{aligned} \alpha &= u + \Lambda(t) \\ \beta &= \beta_r + v + B(t) \\ \vartheta &= \vartheta_r + w + \Theta(t) \end{aligned} \quad (193)$$

и пользоваться формулами (107), которые выведены в предположении, что условия (190) соблюдены; поэтому надо показать, как должны быть изменены величины $\Lambda(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$, найденные по методу неопределенных коэффициентов, чтобы условия (190) соблюдались и чтобы формулы (107) сохранились.

§ 10. Обозначим новые частные решения через

$$\Lambda_1(t); \quad B_1(t); \quad \Theta_1(t) \quad (194)$$

для которых по предположению

$$\Lambda_1(0) = B_1(0) = \Theta_1(0) = 0 \quad (195)$$

Так как эти новые решения и прежние

$$\Lambda(0), \quad B(t) \text{ и } \Theta(t)$$

удовлетворяют уравнениям (4), освобожденным от члена ω_2 , то имеют место тождества:

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) + \frac{S}{B} B(t) + \frac{C}{B} \Theta(t) &= \frac{S}{B} \cdot \frac{ap^2}{g} \cos pt \\ -\omega_1 \Lambda(t) + B'(t) &= -\frac{ap}{R} \sin pt \\ FB(t) + F\Theta(t) + \Theta'(t) &= F \frac{ap^2}{g} \cos pt \end{aligned} \quad (196)$$

и

$$\begin{aligned} A_1'(t) + \frac{S}{B} B_1(t) + \frac{C}{B} \Theta_1(t) &= \frac{S}{B} \cdot \frac{ap^2}{g} \cos pt \\ -\omega_1 A_1(t) + B_1'(t) &= -\frac{ap}{R} \sin pt \end{aligned} \quad (197)$$

$$FB_1(t) + F\Theta_1(t) + \Theta_1'(t) = F \frac{ap^2}{g} \cos pt$$

и будет тождественно

$$\begin{aligned} [A_1(t) - A(t)]' + \frac{S}{B} [B_1(t) - B(t)] + \frac{C}{B} [\Theta_1(t) - \Theta(t)] &= 0 \\ -\omega_1 [A_1(t) - A(t)] + [B_1(t) - B(t)]' &= 0 \\ F[B_1(t) - B(t)] + F[\Theta_1(t) - \Theta(t)] + [\Theta_1(t) - \Theta(t)]' &= 0 \end{aligned} \quad (198)$$

Эти тождества показывают, что функции

$$[A_1(t) - A(t)]; [B_1(t) - B(t)]; [Q_1(t) - Q(t)] \quad (199)$$

суть решения однородной системы

$$\begin{aligned} u' + \frac{S}{B} u + \frac{C}{B} w &= 0 \\ -\omega_1 u + v' &= 0 \\ Fv + Fw + w' &= 0 \end{aligned} \quad (200)$$

для которой было найдено общее решение

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{-\mu t} + e^{-nt} (D \cos qt + E \sin qt) \\ v &= -\frac{\omega_1}{\mu} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{n^2 + q^2} [(nD + qE) \cos qt - (qD - nE) \sin qt] \\ w + v &= \frac{\omega_1}{2n} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{(F - n)^2 + q^2} [(nD + qE - FD) \cos qt - \\ &\quad - (qD - nE + FE) \sin qt] \end{aligned} \quad (201)$$

причем C_1 , D , E — произвольные постоянные. Придавая этим постоянным различные частные значения, можно составить сколько угодно частных решений однородной системы (200).

Положим, что составлена система частных решений

$$u = u_1; \quad v = v_1; \quad w = w_1 \quad (202)$$

линейно не зависимых между собою, т. е. таких, что между ними нет линейного соотношения вида

$$au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \quad (203)$$

причем a , b , c — постоянные; тогда всякое решение однородной системы выразится как линейная функция от u_1 , v_1 , w_1 , так что в нашем случае будет вообще

$$\begin{aligned} A_1(t) - A(t) &= H_1 u_1 + K_1 v_1 + L_1 w_1 \\ B_1(t) - B(t) &= H_2 u_1 + K_2 v_1 + L_2 w_1 \\ \Theta_1(t) - \Theta(t) &= H_3 u_1 + K_3 v_1 + L_3 w_1 \end{aligned} \quad (204)$$

следовательно, надо: 1) выбрать частные решения u_1 , v_1 , w_1 ; 2) определить числа H_1 ; K_1 ; L_1 , ..., L_3 , так, чтобы было:

$$\begin{aligned} A_1(0) - A(0) + (H_1 u_1 + K_1 v_1 + L_1 w_1)_{t=0} &= 0 \\ B_1(0) - B(0) + (H_2 u_1 + K_2 v_1 + L_2 w_1)_{t=0} &= 0 \\ \Theta_1(0) - \Theta(0) + (H_3 u_1 + K_3 v_1 + L_3 w_1)_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (205)$$

3) при выборе функций u_1 , v_1 , w_1 и чисел H_1 , K_1 , ..., L_3 распорядиться так, чтобы выкладки были по возможности проще; тогда формулы останутся без перемены и общее решение неоднородной системы будет

$$\alpha = u + A_1(t); \quad \beta = \beta_r + v + B_1(t); \quad \vartheta = \vartheta_r + w + \Theta_1(t) \quad (206)$$

§ 11. Поясним сперва изложенную методу на простейшем примере, когда

$$F=0; \quad \Omega^2 - \frac{g}{R} = f \neq 0$$

В этом случае однородная система есть

$$\begin{aligned} u' + \frac{S}{B} v + \frac{C}{B} w &= 0 \\ v' - \omega_1 u &= 0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \quad (207)$$

общее ее решение

$$\begin{aligned} u &= C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t \\ v &= \frac{\omega_1}{\Omega} (C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t) - (1 - \kappa) C_3 \\ w &= C_3 \end{aligned} \quad (208)$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, которым можно для составления u_1, v_1, w_1 придавать любые значения — такие, чтобы u_1, v_1, w_1 были линейно независимы между собою.

Чтобы дальнейшие выкладки были проще, возьмем

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 1; \quad C_3 = \vartheta_0 \quad (209)$$

тогда будет

$$u_1 = \sin \Omega t; \quad v_1 = -\frac{\omega_1}{\Omega} \cos \Omega t - (1 - \kappa) \vartheta_0; \quad w_1 = \vartheta_0 \quad (210)$$

Частные решения неоднородной системы суть

$$A(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin pt; \quad B(t) = \frac{af}{g} \cos pt; \quad \Theta(t) = \vartheta_0 \quad (211)$$

Отсюда видно, что

$$A(0) = 0 \quad (212)$$

следовательно, решение $A(t)$ преобразования не требует, но

$$B(0) = \frac{af}{g}; \quad \Theta(0) = \vartheta_0 \quad (213)$$

Таким образом, из системы (205) остаются только второе и третье уравнения. Второе уравнение будет

$$\frac{af}{g} + H_2 \vartheta_0 + K_2 \left[-\frac{\omega_1}{\Omega} - (1 - \kappa) \vartheta_0 \right] + L_2 \vartheta_0 = 0 \quad (214)$$

Отсюда видно, что можно удовлетворить этому уравнению, взяв

$$\begin{aligned} H_2 &\text{— произвольное} \\ K_2 &= 0 \\ L_2 &= -\frac{af}{g} \cdot \frac{1}{\vartheta_0} \end{aligned} \quad (215)$$

Третье уравнение будет

$$\vartheta_0 + H_3 \dot{\vartheta}_0 + K_3 \left[-\frac{\omega_1}{\Omega} - (1 - \kappa) \vartheta_0 \right] + L_3 \ddot{\vartheta}_0 = 0 \quad (216)$$

Очевидно, это уравнение будет удовлетворено, если взять

$$\begin{aligned} H_3 &= \text{произвольное} \\ K_3 &= 0 \\ L_3 &= -1 \end{aligned} \quad (217)$$

Очевидно, проще всего взять произвольные

$$H_1 = 0; \quad H_2 = 0; \quad H_3 = 0 \quad (218)$$

Затем имеем:

$$\begin{aligned} K_1 &= 0; \quad K_2 = 0; \quad K_3 = 0 \\ L_1 &= 0; \quad L_2 = -\frac{af}{g} \cdot \frac{1}{\vartheta_0}; \quad L_3 = -1 \end{aligned} \quad (219)$$

На основании этих значений, выражений

$$u_1 = \sin \Omega t; \quad v_1 = -\frac{\omega_1}{\Omega} \cos \Omega t - (1 - \kappa) \vartheta_0; \quad w_1 = \vartheta_0 \quad (220)$$

и частных решений

$$A(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin pt; \quad B(t) = \frac{af}{g} \cos pt; \quad \Theta(t) = \vartheta_0 \quad (220_1)$$

имеем, по формулам (204):

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin pt \\ B_1(t) &= B(t) - \frac{af}{g} = -\frac{af}{g} (1 - \cos pt) \\ \Theta_1(t) &= \Theta(t) - \vartheta_0 = \vartheta_0 - \vartheta_0 = 0. \end{aligned} \quad (221)$$

Следовательно, окончательно будет

$$\alpha = u + A_1(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t + \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin pt$$

$$\beta = \beta_r + v + B_1(t) = \beta_r + \frac{\omega_1}{\Omega} (C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t) -$$

$$-(1 - \kappa) \vartheta_0 - \frac{af}{g} (1 - \cos pt) \quad (222)$$

$$\vartheta = w + \Theta_1(t) = \vartheta_0$$

причем

$$\beta_r = \frac{\omega_2 B}{S - C}; \quad \vartheta_r = \vartheta_0 \quad (223)$$

По формулам § 1 при $F \neq 0$ должно быть

$$\vartheta_r = -\frac{\omega_2 B}{S - C} \quad (224)$$

и легко найти, что при $F = 0$ будет

$$\vartheta_r = \vartheta_0 \quad (225)$$

Если время t считать не с момента положения руля (т. е. начала циркуляции), а с заданного момента t_0 по хронометру, то во всех формулах надо вместо буквы t писать $t - t_0$.

Смысл членов формул (222) следующий:

1) β_r и ϑ_r суть положения равновесия гиросферы;

$$2) \quad C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t$$

$$\frac{\omega_1}{\Omega} (C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t) - (1 - \kappa) \vartheta_0$$

суть свободные колебания гиросферы, зависящие от начальных значений u_0, v_0, w_0 ;

$$3) \quad \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \sin pt; \quad -\frac{af}{g} (1 - \cos pt)$$

есть баллистическая девиация, т. е. вынужденные колебания гиросферы, от начальных значений u_0, v_0, w_0 не зависящие.

Все эти выводы относятся к тому случаю, когда

$$F = 0 \text{ и } \Omega^2 - \frac{R}{g} = f \neq 0$$

если же $\Omega^2 - \frac{g}{R} = 0$, то во всех формулах надо положить

$$f = 0$$

§ 12. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда

$$F \neq 0 \text{ и } \Omega - \frac{g}{R} = f \neq 0$$

В этом случае свободные колебания определяются уравнениями (201), положение динамического равновесия — равенствами (223) и (224), вынужденные колебания — равенствами

$$A(t) = X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt$$

$$B(t) = X_2 \cos pt + Y_2 \sin pt$$

$$\Theta(t) = X_3 \cos pt + Y_3 \sin pt$$

причем $X_1, X_2, \dots, Y_3$ выражаются формулами (151), (152), (160) и (161).

Уравнения, которыми определяются свободные колебания, суть (201)

$$u = C_1 e^{-\mu t} + e^{-nt} (D \cos qt + E \sin qt)$$

$$v = -\frac{\omega_1}{\mu} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{n^2 + q^2} [(nD + qE) \cos qt - (qD - nE) \sin qt]$$

$$w + v = \frac{\omega_1}{2n} C_1 e^{-\mu t} - \frac{\omega_1 e^{-nt}}{(F - n)^2 + q^2} [(nD + qE - FD) \cos qt - (qD - nE + FE) \sin qt]$$

Чтобы получить возможно простые выражения для u_1, v_1, w_1 , берем

$$C_1 = 1; \quad D = 0; \quad E = -1$$

тогда будет

$$u_1 = e^{-\mu t} - e^{-nt} \sin qt$$

$$v_1 = -\frac{\omega_1}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{\omega_1 e^{-nt}}{n^2 + q^2} [q \cos qt + n \sin qt] \quad (226)$$

$$w_1 + v_1 = \frac{\omega_1}{2n} e^{-\mu t} + \frac{\omega_1 e^{-nt}}{(n - F)^2 + q^2} [q \cos qt + (n - F) \sin qt]$$

Затем имеем:

$$A(0) = X_1; \quad B(0) = X_2; \quad \Theta(0) = X_3$$

$$u_1(0) = 1;$$

$$v_1(0) = -\frac{\omega_1}{\mu} + \frac{\omega_1 q}{n^2 + q^2}$$

$$w_1(0) + v_1(0) = \frac{\omega_1}{2n} + \frac{\omega_1 q}{(n-F)^2 + q^2}$$

На основании этих значений первое из уравнений (205) будет

$$X_1 + H_1 + K_1 \left(-\frac{\omega_1}{\mu} + \frac{\omega_1 q}{n^2 + q^2} \right) + L_1 \left(\frac{\omega_1}{2n} + \frac{\omega_1 q}{(n-F)^2 + q^2} \right) = 0$$

Так как неизвестные H_1 , K_1 , L_1 должны удовлетворять только этому одному уравнению, то можно взять

$$K_1 = 0; \quad L_1 = 0$$

тогда будет

$$H_1 = -X_1$$

Совершенно так же получим

$$H_2 = -X_2; \quad H_3 = -X_3$$

Следовательно, будет

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(t) - X_1 u_1 = X_1 \cos pt + Y_1 \sin pt - (e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_1 \\ B_1(t) &= B(t) - X_2 u_1 = X_2 \cos pt + Y_2 \sin pt - (e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_2 \\ \Theta_1(t) &= \Theta(t) - X_3 u_1 = X_3 \cos pt + Y_3 \sin pt - (e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_3 \end{aligned} \quad (227)$$

Из этих формул очевидно, что будет, как и требуется:

$$A_1(0) = 0; \quad B_1(0) = 0; \quad \Theta_1(0) = 0$$

значит, уравнения (107), представляющие свободные колебания гиросферы, удовлетворяющие начальным

$$(u)_{t=0} = u_0; \quad (v)_{t=0} = v_0; \quad (w)_{t=0} = w_0$$

будут по-прежнему иметь место, и, значит, при маневрировании корабля придется вычислить лишь новые значения постоянных X_1 , Y_1 ; X_2 , Y_2 ; X_3 , Y_3 по формулам (160), (161), (151), (152) и новые значения коэффициентов формул (107) соответственно значениям u_0 , v_0 , w_0 при начале маневра, т. е. с того момента, когда руль вновь поставлен „прямо“ или переложен на требуемый угол.

Отсюда с ясностью видно, что для того, чтобы формулы (107), в которых значения постоянных произвольных определены по начальным значениям (u , v , w), имели место, нельзя для баллистической девиации ограничиться одним только выражением $A(t)$, а надо составлять все три выражения: $A(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$, дополнить их „сопутствующими“ свободными колебаниями, т. е. брать $A_1(t)$; $B_1(t)$; $\Theta_1(t)$; без этой поправки простое определение баллистической девиации по методу неопределенных коэффициентов и сохранение формул (107) без изменения, как это сделано в статье Геккелера, *неправильны* и вносят в азимутальные колебания α погрешность, которая погашается асимптотически и выражения которой видны из уравнений (226).

Эта погрешность курсовой девиацией *не компенсируется*. Обозначим для удобства дальнейшего изложения указанные поправки так:

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= -(e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_1 \\ \eta_2(t) &= -(e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_2 \\ \eta_3(t) &= -(e^{-\mu t} + e^{-nt} \sin qt) X_3\end{aligned}\quad (228)$$

Если время считать не с начала маневра, а с заданного момента t_0 по хронометру, то во всех формулах надо букву t заменить через $t - t_0$; и, если первая циркуляция кончается в момент $t = t_1$, т. е. в этот момент руль ставится „прямо“ или переключивается соответственно новому маневру, то все остающиеся некомпенсированными *первым* членом курсовой девиации части баллистической девиации, сохранившиеся к моменту $t = t_1$ незатухшими, алгебраически складываются, — они представят новые начальные значения для циркуляции или прямого курса после момента $t = t_1$, и с этого момента надо во всех формулах писать $t - t_1$, вместо $t - t_0$.

Таким образом, гироскоп при маневрировании корабля проявляет при неполной компенсации своего рода „наследственность“: с одной стороны, начальные значения погашаются показательными множителями $e^{-\mu t}$ и e^{-nt} или $e^{-\mu(t-t_0)}$ и $e^{-n(t-t_0)}$; с другой стороны, они пополняются за счет некомпенсированных частей баллистической и курсовой девиации, имеющих в моменты $t = t_1$, $t = t_2$,

$t = t_3, \dots$ перекладки руля при маневрах, в предположении, что корабль сохраняет скорость хода неизменной (при изменении скорости хода и радиуса циркуляции это явление сохраняется, но в более сложном виде).

§ 13. Поясним сказанное в § 12 аналитически. В § 8 показано, что к первому члену курсовой девиации *гиросферы*, а не курсографа

$$\delta = -\frac{1}{R\omega} \cdot \frac{V \cos \gamma}{\cos \varphi}$$

надо присовокупить поправки

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R\omega} V \sec \varphi \right)^2 \sin 2\gamma \quad (173_2)$$

$$\varepsilon_2(t) = \delta \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} \quad (186)$$

Таким образом, опуская аргумент t , алгебраически будем иметь:

$$\delta = \delta_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

В §§ 8—12 показано, что баллистическая девиация выражается формулой

$$A_1(t) = A(t) + \zeta$$

причем

$$A(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_1} \cdot \frac{ap}{g} \cos \gamma$$

$$\zeta = \frac{1}{20} \Omega^2 \frac{V}{g} \sin \gamma$$

В § 12 показано, что при несоблюдении условий

$$A(0) = B(0) = \Theta(0) = 0$$

к выражениям баллистической девиации (если ее выражение находится по методу неопределенных коэффициентов) надо присовокупить поправки (228); тогда движение гиросферы и жидкости в успокоителе будет определяться уравнениями (87), которые в развитой форме будут:

$$\alpha = u + A(t) + \delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \eta_1 + \zeta$$

$$\beta = \beta_r + v + B(t) + \eta_2 \quad (229)$$

$$\vartheta = \vartheta_r + w + \Theta(t) + \eta_3$$

В первой из этих формул сумма

$$\Lambda(t) + \delta = 0$$

ибо эти два члена взаимно компенсируются; все прочие члены остаются, и выше указано, в какой последовательности изменяются аргументы в этих членах, опущенные для простоты письма.

Если эти аргументы восстановить и считать время t с моментов перекладки руля, то формулы (229) примут для нижеуказанных промежутков времени следующий вид (причем не выписываются взаимно компенсирующие члены, сумма которых равна нулю, т. е.

$$\delta + \Lambda(t) = 0$$

Циркуляция № 1 ($t_0 \leq t \leq t_1$):

$$\alpha(t - t_0) = u(t - t_0) + \varepsilon_1(t - t_0) + \varepsilon_2(t - t_0) + \eta_1(t - t_0) + \zeta(t - t_0)$$

$$\beta(t - t_0) = \beta_r + v(t - t_0) + B(t - t_0) + \eta_2(t - t_0)$$

$$\vartheta(t - t_0) = \vartheta_r + w(t - t_0) + \Theta(t - t_0) + \eta_3(t - t_0)$$

Промежуточные маневры: $t_1 \leq t \leq t_2$.

Циркуляция № 2 ($t_2 \leq t \leq t_3$):

$$\alpha(t - t_2) = u(t - t_2) + \varepsilon_1(t - t_2) + \varepsilon_2(t - t_2) + \eta_1(t - t_2) + \zeta(t - t_2)$$

$$\beta(t - t_2) = \beta_r + v(t - t_2) + B(t - t_2) + \eta_2(t - t_2)$$

$$\vartheta(t - t_2) = \vartheta_r + w(t - t_2) + \Theta(t - t_2) + \eta_3(t - t_2)$$

и т. д.

Обратим внимание на то, что $\alpha(t - t_0)$, $u(t - t_0)$, ..., $\eta_3(t - t_0)$ суть знаки функциональной зависимости, а не произведения $\alpha(t - t_0)$, $u(t - t_0)$, ..., $\eta_3(t - t_0)$.

Уравнениями для первого промежутка можно пользоваться до момента $t = t_1$, до которого величины a — радиус циркуляции и $p = \frac{2\pi}{\tau}$ остаются постоянными, начальные значения u_0 , v_0 , w_0 относятся к моменту $t = t_0$ и свободные колебания выражаются формулами (107), в которых вместо аргумента t надо писать $t - t_0$.

Затем, после момента $t=t_1$, корабль совершает какие-то промежуточные маневры в течение промежутка времени от $t=t_1$ до $t=t_2$.

В момент $t=t_2$ корабль начинает вторую циркуляцию; причем начальные для нее значения будут определяться промежуточными маневрами и теми значениями

$$(u)_{t=t_1} = u_1; \quad (v)_{t=t_1} = v_1; \quad (w)_{t=t_1} = w_1$$

с которыми эти промежуточные маневры начались. К моменту $t=t_2$ начальные значения для второй циркуляции будут

$${}_2(u)_{t=t_2} = u_2; \quad (v)_{t=t_2} = v_2; \quad (w)_{t=t_2} = w_2$$

За промежуток времени от $t=t_2$ до $t=t_3$ надо пользоваться формулами (107), и в зависимости от величины промежутков $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ и т. д. свободные колебания могут и не погаситься полностью и к ним добавятся некомпенсированные части вынужденных колебаний. Кроме того, каждая циркуляция в зависимости от надобности может быть описываема со своим радиусом и своим периодом.

Функция $\zeta(t - t_0)$ — чисто периодическая с периодом τ ; остальные функции, входящие в состав свободных колебаний, содержат показательные множители $e^{-\mu(t-t_0)}$, $e^{-n(t-t_0)}$, $e^{-\mu(t-t_1)}$, $e^{-n(t-t_1)}$, $e^{-\mu(t-t_2)}$, $e^{-n(t-t_2)}$ и т. д.; поэтому, если промежутки времени $t_1 - t_0$, $t_2 - t_0$, $t_3 - t_0$, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, $t_3 - t_2$ и т. д. не настолько велики, что все эти показательные величины пренебрежимо малы, то через начальные значения u_1 , v_1 , w_1 , u_2 , v_2 , w_2 и т. д. для последовательных маневров и циркуляций свободные колебания не будут уничтожаться, а будут поддерживаться некомпенсированными частями баллистической и курсовой девиации, а также поправками γ_1 , γ_2 , γ_3 .

В этом и состоит то явление, которое мы называли „наследственностью“ или „накоплением погрешностей“, учет которого необходимо делать при изучении испытаний гирокомпасов.

Относительно поправок γ_1 , γ_2 , γ_3 необходимо заметить, что их надо вводить, если вынужденные колебания определяются по методе

неопределенных коэффициентов; если же $\Lambda(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$ представляются определенными интегралами, то вообще будет

$$\int_0^t W(\xi) d\xi = \int_0^{t_1} W_1(\xi) d\xi + \int_{t_1}^{t_2} W_2(\xi) d\xi + \dots + \int_{t_k}^t W_k(\xi) d\xi$$

и, хотя функция $W(\xi)$ может быть и разрывной, формулы (70) имеют место, и учет поправок произойдет сам собою.

Необходимость учета величин η_1 , η_2 , η_3 Геккелером из виду упущена, но в превосходном руководстве проф. Б. В. Булгакова „Прикладная гироскопия“ вынужденные колебания представлены определенными интегралами и сказанная поправка учитывается сама собою.

Необходимо еще обратить внимание, что мы ограничились лишь рассмотрением того случая, когда корабль сохраняет постоянную скорость хода, не имеет качки и маневрирование его состоит из круговых циркуляций и прямых курсов.

Рассмотрение влияния качки, учет изменений скорости, перемен хода с переднего на задний, маневрирование по курсовой локсодромии (логарифмическая спираль) при обстреливании береговой цели или в одиночном бою и т. п. потребовали бы еще более обширной статьи, нежели эта.

Такая статья готовится мною к представлению в Академию наук, чтобы вместе с этою составить дополнение к изданной Академией книге „Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений“.

Некоторая сложность и длиннота выкладок настоящей статьи является вполне естественной, если вспомнить, насколько просто изложение в „Небесной механике“ Кеплерова учения о движении планет и насколько сложно рассмотрение их возмущенного движения; а здесь мы именно рассматривали возмущенное движение гироскопа, чтобы выяснить эти возмущения или погрешности его.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫМ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЧАСТОТЫ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Колебательное движение приобретает все большее и большее значение в технических вопросах, так что в Германии есть специальность *Schwingungs-Ingenieure*.

Главнейшие из этих вопросов следующие:

а) упругие колебания вала двигателей Дизеля или вообще поршневых двигателей, в особенности, когда такой двигатель сцеплен с генератором тока;

б) неустановившиеся электрические колебания в сложной цепи при замыкании или размыкании;

в) колебания в связанных системах при радиотелеграфировании;

г) колебания разного рода упругих систем строительной механики;

д) наконец, статические расчеты перекрестных связей, подобных системе стрингеров и шпангоутов судового днища.

Все эти вопросы сводятся к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для первых четырех случаев порядок этих уравнений второй, для последнего четвертый.

Так как во всех случаях (а, б, в, г) надо считаться с явлениями „резонанса“, то необходимо рассчитывать периоды свободных колебаний системы, что приводит к решению так называемого *векового уравнения*.

Название это ему придано потому, что в небесной механике такое уравнение служит для определения „вековых“ неравенств в движении планет.

„Вековыми“ эти неравенства названы вследствие того, что периоды их весьма велики, а именно от 24 000 до 2 000 000 лет.

Вековое уравнение в технических вопросах бывает двоякого рода:

а) для систем, в которых нет сопротивлений, погашающих колебания;

б) для систем с погашением.

Уравнение для систем без сопротивления ничем не отличается по виду от векового уравнения небесной механики. Уравнение для систем с погашением значительно сложнее по своему составу.

В этой статье имеется в виду изложить практические методы численного решения своих типов этих уравнений.

§ 2. Простейший тип векового уравнения получается для таких механических систем, дифференциальные уравнения движения которых для малых колебаний составляются по схеме Лагранжа, исходя из выражения живой силы и элементарной работы.

Пусть первоначально введенные лагранжевские координатные параметры, определяющие конфигурацию и положение системы, суть

$$s_1, s_2, \dots, s_k \quad (1)$$

тогда при рассмотрении „малых колебаний“ живая сила системы выражается квадратичною формою

$$2T = \sum M_{ik} \dot{s}_i \dot{s}_k \quad (2)$$

причем коэффициенты M_{ik} суть заданные постоянные.

Элементарная работа выражается в общем случае так:

$$\delta U = S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + \dots + S_k \delta s_k \quad (3)$$

причем величины

$$S_1, S_2, \dots, S_k$$

суть линейные функции параметров (1).

$$Q_3 = a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + \dots + a_{3k}q_k \quad (9)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Q_k = a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + a_{k3}q_3 + \dots + a_{kk}q_k$$

Заметим здесь же, что в том случае, когда интеграл живых сил имеет место, выражение (8) будет представлять *полный дифференциал* и между коэффициентами a_{ik} будут иметь место соотношения

$$a_{ih} = a_{hi} \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \dots, k-1, k \\ i = 1, 2, \dots, k-1, k \end{matrix} \right) \quad (10)$$

пока же мы этого предполагать не будем.

На основании выражений (7)–(9) уравнения движения нашей системы будут

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + \dots + a_{1k}q_k \\ \ddot{q}_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + \dots + a_{2k}q_k \\ \ddot{q}_3 &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + \dots + a_{3k}q_k \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{q}_k &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + a_{k3}q_3 + \dots + a_{kk}q_k \end{aligned} \quad (11)$$

Для такой системы при обычном теперь изложении ищут частное решение вида

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t}; \quad q_2 = C_2 e^{\lambda t}; \quad q_3 = C_3 e^{\lambda t}; \dots; \quad q_k = C_k e^{\lambda t} \quad (12)$$

причем $C_1, C_2, \dots, C_k$ и λ пока неизвестные постоянные. Подставив выражения (12) в систему уравнений (11) и сократив на $e^{\lambda t}$, получаем для определения этих неизвестных уравнения

$$\begin{aligned} C_1 (a_{11} - \lambda^2) + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + \dots + C_k a_{1k} &= 0 \\ C_1 a_{21} + C_2 (a_{22} - \lambda^2) + C_3 a_{23} + \dots + C_k a_{2k} &= 0 \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 (a_{33} - \lambda^2) + \dots + C_k a_{3k} &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ C_1 a_{k1} + C_2 a_{k2} + C_3 a_{k3} + \dots + C_k (a_{kk} - \lambda^2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы было

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^2) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda^2) & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda^2) & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & (a_{kk} - \lambda^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

Это и есть так называемое вековое уравнение, служащее для определения величины λ . В общем случае все его корни будут неравными, число их будет $2k$. Каждому корню, например $\lambda = \lambda_1$, будет соответствовать своя система значений постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$, которая найдется из пропорции

$$\frac{C_1}{\Delta_1(\lambda_1)} = \frac{C_2}{\Delta_2(\lambda_1)} = \frac{C_3}{\Delta_3(\lambda_1)} = \dots = \frac{C_k}{\Delta_k(\lambda_1)} = A_1 \quad (15)$$

где A_1 есть произвольная постоянная, величины же $\Delta_1(\lambda_1), \Delta_2(\lambda_1), \dots, \Delta_k(\lambda_1)$ суть миноры определителя $\Delta(\lambda)$, соответствующие элементам первой строки, когда в них положено $\lambda = \lambda_1$. Таким образом получится $2k$ систем решений (12), содержащих $2k$ произвольных постоянных

$$A_1, A_2, \dots, A_{2k} \quad (16)$$

Общий интеграл системы получится, если взять сумму найденных решений, так, например, будет

$$q_1 = A_1 \Delta_1(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + A_2 \Delta_1(\lambda_2) e^{\lambda_2 t} + \dots + A_{2k} \Delta_1(\lambda_{2k}) e^{\lambda_{2k} t} \quad (17)$$

Мы не будем разбирать здесь случая равных корней векового уравнения и определения в этом случае решений, так как в технической практике он редко встречается, отсылая к курсам анализа или механики, где подробно разбирается вопрос о малых колебаниях, но почти никогда не излагаются практические приемы численного вычисления корней векового уравнения, в чем состоит цель этой статьи.

Как видно, уравнение (14), даже сохраняя двучленные множители, если просто развить его первую часть, будет содержать

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

членов, т. е. для $k=2, 3, 4, \dots, 8$ это число будет соответственно

$$2, 6, 24, 120, 720, 5760$$

а если раскрыть все скобки, то числа эти возрастут еще во много раз.

Ясно, что если легко составить это уравнение для $k=2$ и $k=3$, то для $k=4$ выкладка становится весьма громоздкой, а для значений k , больших 5 и совсем непосредственно не выполнимой, поэтому надо прибегать к таким методам составления этого уравнения, где к полному непосредственному развитию определителя (14) прибегать не приходится.

Цель этой статьи, как уже сказано, состоит в изложении простых методов составления векового уравнения в развитой форме, после чего решение его, т. е. численное вычисление корней, затруднений не представляет.

Однако прежде чем излагать эти способы, полезно вернуться несколько назад и рассмотреть, каким образом поступали первые творцы этих методов Лагранж и Лаплас, а затем такой великий астроном, как Леверрье, и такой великий математик, как Якоби, при этом обнаружится совершенно непонятное обстоятельство: Лаплас, Леверрье, Якоби развивали сложные и неудобные методы составления векового уравнения, оставляя в стороне методу, очевидную и в их время уже хорошо известную, но которая излагалась не для практического составления векового уравнения, а для общего теоретического доказательства, что всякая система обыкновенных совокупных уравнений может быть приведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, порядок коего равен порядку системы.

§ 3. Лагранж в „*Mécanique Analytique*“, в главе „*Sur les oscillations très petites d'un système quelconque de corps*“, поступает для интегрирования системы (11) так: взяв вспомогательную неизвестную ξ , он полагает

$$q_1 = \xi; \quad q_2 = C_2 \xi; \dots; q_k = C_k \xi \quad (A)$$

причем $C_2, \dots, C_k$ некоторые постоянные; если выражения (А) подставить в уравнения (11), то эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= (a_{11} + a_{12}C_2 + \dots + a_{1k}C_k)\xi \\ C_2\ddot{\xi} &= (a_{12} + a_{22}C_2 + \dots + a_{2k}C_k)\xi \\ &\dots \dots \dots \\ C_k\ddot{\xi} &= (a_{k1} + a_{k2}C_2 + \dots + a_{kk}C_k)\xi\end{aligned}\quad (B)$$

Если постоянные $C_2, \dots, C_k$ подчинить условиям

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{a_{11} + a_{12}C_2 + \dots + a_{1k}C_k}{1} = \frac{a_{12} + a_{22}C_2 + \dots + a_{2k}C_k}{C_2} = \\ &= \dots = \frac{a_{k1} + a_{k2}C_2 + \dots + a_{kk}C_k}{C_k}\end{aligned}\quad (C)$$

то уравнения (B) сведутся к одному

$$\ddot{\xi} - \lambda^2\xi = 0 \quad (I)$$

решение которого сейчас же находится, после чего найдутся и соответствующие значения неизвестных $q_1, q_2, \dots, q_k$.

Таким образом, все сводится к нахождению величины λ^2 и затем величин $C_2, \dots, C_k$. Относительно этого Лагранж ограничивается следующим кратким указанием:

„Число этих уравнений, как видно, равно числу неизвестных $C_2, \dots, C_k, \lambda^2$, следовательно, ими эти неизвестные вполне определяются, поэтому, удерживая в первой части член λ^2 и умножив его соответственно на знаменатели вторых членов, получим линейные уравнения с неизвестными $C_2, \dots, C_k$, их можно будет исключить известными способами и нетрудно видеть из общих формул исключения, что для определения λ^2 получится уравнение, степень которого относительно этой неизвестной будет равна числу предложенных уравнений, так что для λ^2 получится таковое же число различных значений, каждое из которых по подстановке в уравнения (C) доставит соответствующие значения величин $C_2, C_3, \dots, C_k$ “.

Затем Лагранж показывает, каким образом определить постоянные произвольные, вводимые интегрированием уравнений (11), которых также будет k , а значит, постоянных произвольных $2k$, так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

тогда уравнения (D) суть не что иное, как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_k} = 0$$

и, значит, если рассматривать φ как функцию переменных независимых

$$N_1, N_2, \dots, N_k$$

то эти уравнения выражают, что φ должно быть максимумом, но так как по теореме об однородных функциях будет

$$N_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + N_2 \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} + \dots + N_k \frac{\partial \varphi}{\partial N_k} = 2\varphi$$

то этот максимум есть $\varphi = 0$.

„Но максимум функции φ можно находить и следующим образом: взяв частную производную этой функции по N_1 и уравнивая эту производную нулю, получим линейное уравнение между переменными $N_1, N_2, \dots, N_k$, из которого N_1 выразится также линейным образом через остальные переменные

$$N_2, N_3, \dots, N_k$$

Подставив это выражение вместо N_1 в выражение функции φ , получим новую функцию φ_1 от переменных $N_2, N_3, \dots, N_k$, также однородную и второй степени. Берем частную производную φ_1 по переменной N_2 и, уравнивая ее нулю, находим N_2 в виде линейной функции остальных переменных и, подставив в выражение φ_1 , получим функцию φ_2 переменных $N_3, N_4, \dots, N_k$ однородную и второй степени. Продолжая поступать таким образом, придем к функции φ_{k-1} , которая будет вида

$$\varphi_{k-1} = K(g) N_k^2$$

причем $K(g)$ будет известная целая функция степени k от неизвестной g .

„Уравнение

$$\frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial N_k} = 0$$

будет

$$K(g) N_k = 0,$$

а так как мы ищем решения системы (D), отличные от нуля, то должно быть

$$K(g) = 0 \quad (E)$$

величина же N_k остается произвольной.

„Уравнение (E) доставит k значений для величины g , которые обозначим через

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

для каждого из них получим из уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial N_{i+1}} = 0$$

выражения вида

$$N_{11} = A_{11} N'_k; N_{21} = A_{21} N'_k; \dots; N_{k-1} = A_{k-1} N'_k$$

причем N'_k есть произвольная постоянная; таким образом, для корня

$$g = g_1$$

получим частное решение нашей системы вида

$$q_1 = A_{11} N'_k \sin(g_1 t + \beta')$$

$$q_2 = A_{21} N'_k \sin(g_1 t + \beta')$$

$$\dots$$

$$q_k = N'_k \sin(g_1 t + \beta')$$

причем β' есть также произвольная постоянная. Взяв сумму решений соответствующих всем k корням, получим общий интеграл системы в виде

$$q_1 = A_{11} N'_k \sin(g_1 t + \beta') + A_{12} N''_k \sin(g_2 t + \beta'') + \dots$$

$$\dots + N^{(k)}_k \sin(g_k t + \beta^{(k)})$$

$$q_2 = A_{21} N'_k \sin(g_2 t + \beta') + A_{22} N''_k \sin(g_2 t + \beta'') + \dots$$

$$\dots + N^{(k)}_k \sin(g_k t + \beta^{(k)})$$

$$\dots$$

$$g_k = A_{k1} N'_k \sin(g_1 t + \beta') + A_{k2} N''_k \sin(g_2 t + \beta'') + \dots$$

$$\dots + N^{(k)}_k \sin(g_k t + \beta^{(k)})$$

(F)

причем

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{k, k-1}$$

будут некоторые вполне определенные числа, величины же

$$N'_k, N''_k, \dots, N^{(k)}_k \\ \beta', \beta'', \dots, \beta^{(k)}$$

произвольные постоянные“.

Отсюда видно, что Лаплас гораздо подробнее, нежели Лагранж, указал, каким образом составлять уравнение (E)

$$K(g) = 0$$

в вычислении корней которого и заключается вся сущность дела.

Действия, которые надо совершать для составления уравнения (E) следуя Лапласу, как видно, весьма просты, но если начать их развивать на самом деле, то сейчас же убедимся, насколько сложны и утомительны становятся выкладки даже при k , равном 4 или 5, к тому же Лаплас не счел нужным указать, что уравнение:

$$K(g) = 0$$

будет степени k лишь после устранения из него лишних множителей, введенных при процессе последовательного составления функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, причем эти множители надо помечать.

Покажем это на простейшем примере. Пусть, например, будет $2\varphi = (1 - g) N_1^2 + (2 - g) N_2^2 + (3 - g) N_3^2 - 2N_1N_2 - 4N_1N_3 - 6N_2N_3$ тогда имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} = (1 - g) N_1 - N_2 - 2N_3 = 0$$

откуда

$$N_1 = \frac{N_2 + 2N_3}{1 - g}$$

По подстановке и упрощении получаем:

$$2(1 - g) \varphi_1 = (g^2 - 3g + 1) N_2^2 + (g^2 - 4g - 1) N_3^2 + (6g - 10) N_2N_3$$

значит,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_2} = (g^2 - 3g + 1) N_2 + (3g - 5) N_3 = 0$$

откуда

$$N_2 = -\frac{3g-5}{g^2-3g+1} N_3$$

По подстановке получаем после упрощения

$$\begin{aligned} 2(1-g)(g^2-3g+1)\varphi_2 &= [(g^2-4g-1)(g^2-3g+1)-(3g-5)^2] N_3^2 \\ &= [g^4-7g^3+3g^2+29g-26] N_3^2 \end{aligned}$$

и сейчас же убеждаемся, что множитель $(1-g)$ в обоих частях этого равенства общий, устранив его, получаем:

$$K(g) = g^3 - 6g^2 - 3g + 26 = 0$$

Это и есть искомое уравнение третьей степени, коим определяются значения g для системы, соответствующей вышеприведенной функции φ .

Эти посторонние множители, степень которых с каждым преобразованием повышается, значительно усложняют составление векового уравнения по методу Лапласа, но зато доставляют превосходный контроль вычислению.

§ 36. Последний том „Небесной механики“ Лапласа вышел в 1825 г., а в 1827 г. Лаплас скончался, Непосредственным его преемником был Леверрье, который с конца 1830-х годов начал серию своих „Астрономических исследований“, продолжавшихся по самый день его смерти, в течение 40 лет. В этих исследованиях он не только в общем виде развивает теорию движения небесных тел нашей системы, но сопоставляет ее с наблюдениями, т. е. развивает *численно*, присоединив к известным до него семи большим планетам и открытую им вычислениями восьмую — Нептун.

Исследования Леверрье, помимо того, что им помещено в других изданиях, занимают семь больших томов in 4° в летописях Парижской обсерватории; как астроном-теоретик и вместе с тем вычислитель он считался едва ли имеющим себе равного.

Метода Лапласа, видимо, не удовлетворяла Леверрье, так как в своей статье „Sur les variations séculaires des éléments des orbites“, помещенной в прибавлении к „Connaissance des Temps“ за

1843 г., следовательно напечатанной в 1839 или 1840 г., Леверрье излагает свою методу составления векового уравнения. Эта метода включена затем и в его „Recherches Astronomiques“ (гл. IX), помещенных в „Annales de l'Observatoire impérial de Paris“, t. II, 1856 г.

Главное неудобство вида (14) векового уравнения для численного его решения происходит вследствие того, что члены вида $a_{ii} - \lambda^2$ стоят в диагонали определителя. Это заставило знаменитого математика Якоби поместить в т. XXX журнала „Crelle“ составленную им в 1845 г. обширную статью под заглавием: „Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Seculärstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen“. Эта статья вошла в т. VII собрания сочинений Якоби.

Собрание сочинений Якоби относительно доступно — его можно найти во многих фундаментальных библиотеках, тем не менее оно редко попадает в руки техников, поэтому мы приведем упрощенное изложение методы Якоби, устранив из нее все то, что специально относится к астрономии.

„Annales de l'Observatoire de Paris“, особенно первые их тома, гораздо менее доступны, и едва ли их найдется десяток комплектов во всем Союзе, к тому же изложение Леверрье, еще более чем у Якоби, занято астрономическими подробностями, относящимися к разбираемой им специально задаче небесной механики, поэтому мы приведем также изложение методы Леверрье в упрощенном виде, устранив все специально астрономическое.

Показав эти методы, я показываю в этой статье естественный и весьма простой способ составления векового уравнения в виде такого определителя, в котором все двучлены вида $a_{ii} - \lambda^2$, когда сопротивления нет, и все трехчлены вида $a_{ii} + h_{ii} - \lambda^2$, когда сопротивление есть, располагаются только в одном первом столбце этого определителя, все же остальные элементы, его известные постоянные, — развитие такого определителя никаких трудностей не представляет. Упрощение, таким образом получаемое, становится особенно наглядным по сравнению с методами Лапласа, Леверрье и Якоби.

§ 4. Начнем с метода Леверрье. Положим для краткости письма

$$\lambda^2 = \alpha \quad (18)$$

тогда уравнение (14) будет

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \alpha) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & (a_{22} - \alpha) & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \alpha) & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & (a_{kk} - \alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Очевидно, что это уравнение будет степени k относительно α , причем эта степень получится от произведения *диагональных* членов

$$(a_{11} - \alpha)(a_{22} - \alpha)(a_{33} - \alpha) \dots (a_{kk} - \alpha) \quad (20)$$

ибо это есть единственный член, который в развитом определителе содержит все биномы. Более того, от этого же произведения происходит и член, содержащий α^{k-1} в развитом определителе. В самом деле, вообразим, что мы сперва развили наш определитель по элементам первого столбца, то сразу видно, что член α^{k-1} получится только из того же произведения (20), ибо все остальные миноры содержат не более $k-2$ двучленных множителей, что становится очевидным, если вычеркнуть в определителе $\Delta(\alpha)$ первый столбец и любую строку, начиная со второй.

Итак, в развернутом уравнении

$$\Delta(\alpha) = 0$$

первые два члена происходят от разложения произведения (20)

$$(a_{11} - \alpha)(a_{22} - \alpha)(a_{33} - \alpha) \dots (a_{kk} - \alpha)$$

так что по умножении на $(-1)^k$ эти два члена будут

$$\alpha^k - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{kk})\alpha^{k-1} \quad (21)$$

Отсюда видно, что сумма корней уравнения (19) будет

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{kk} \quad (22)$$

сумма квадратов элементов вне диагонали уменьшается при каждом преобразовании и может быть сделана меньше любой наперед назначенной величины, а значит, и каждый из этих элементов в отдельности может быть сделан произвольно малым, сумма же квадратов постоянных членов в диагональных биномах с каждым преобразованием возрастает; таким образом, определитель $\Delta(\lambda)$ может быть приведен сколь угодно близко к виду (43), а форма $2(U_0 + U)$ к виду (41).

В самом деле, положим для определенности рассуждения, что в форме $2(U_0 + U)$ наибольший по численной величине коэффициент при произведении двух переменных есть a_{12} , выделим тогда в этой форме трехчлен, содержащий только эти две переменные; это будет

$$a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2 \quad (47)$$

Вместо переменных q_1 и q_2 введем вспомогательные переменные r_1 и r_2 простейшей ортогональной подстановкой

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1 \cos \varphi - r_2 \sin \varphi \\ q_2 &= r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (48)$$

остальные же величины q оставим без изменения.

Ясно, что в форме $2S$ сумма

$$q_1^2 + q_2^2$$

заменится суммой

$$r_1^2 + r_2^2$$

и выражение $2S$ после преобразования будет

$$2S = r_1^2 + r_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + \dots + q_k^2 \quad (49)$$

каков бы угол φ ни был.

Выберем этот угол так, чтобы после преобразования в выражении $2(U_0 + U)$ не было члена с $r_1 r_2$.

Очевидно, будет

$$\begin{aligned} a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2 &= (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) r_1^2 + \\ &+ (a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi) r_2^2 + \\ &+ 2[-a_{11} \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{22} \sin \varphi \cos \varphi] r_1 r_2 \end{aligned}$$

и, чтобы член с $r_1 r_2$ пропал, надо определить угол φ так, чтобы величина, стоящая в [], была равна нулю, т. е. чтобы было

$$\frac{1}{2} (a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (50)$$

Значит,

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}; \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}$$

Затем будет

$$a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

$$a_{11} \sin^2 \varphi - a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \cos^2 \varphi = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

Обозначая эти величины соответственно через b_{11} и b_{22} , видим, что трехчлен

$$a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2 = b_{11}r_1^2 + b_{22}r_2^2$$

и в составе формы $2(U_0 - U)$ заменится этим двучленом.

Заметим, что

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22}$$

Составим теперь выражения коэффициентов

$$2a_{13} \text{ и } 2a_{23}$$

как типичных для изменяющихся при преобразовании и остающихся после его выполнения.

Имеем:

$$2a_{13}q_1q_3 = 2a_{13}(r_1 \cos \varphi - r_2 \sin \varphi)q_3 = 2a_{13} \cos \varphi \cdot r_1q_3 - 2a_{13} \sin \varphi \cdot r_2q_3$$

$$2a_{23}q_2q_3 = 2a_{23}(r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi)q_3 = 2a_{23} \sin \varphi \cdot r_1q_3 + 2a_{23} \cos \varphi \cdot r_2q_3$$

Значит, будет

$$2a_{13}q_1q_3 + 2a_{23}q_2q_3 = 2b_{13}r_1q_3 + 2b_{23}r_2q_3$$

квадратов коэффициентов будет еще уменьшена, и продолжаем таким образом пока не дойдем до формы вида

$$-2(U_0 + U) = n_{11}u_1^2 + n_{22}u_2^2 + \dots + n_{kk}u_k^2 + \sum n_{ik}u_i u_k \quad (56)$$

причем все коэффициенты n_{ik} будут настолько малы по сравнению с коэффициентами

$$n_{11}, n_{22}, \dots, n_{kk}$$

что суммою

$$\sum n_{ik}u_i u_k$$

можно пренебречь при той точности, с которою вычисление производится, и отбросить эту сумму.

Полагая

$$n_{11} = g_1^2; n_{22} = g_2^2; \dots; n_{kk} = g_k^2$$

ибо все эти величины положительные при устойчивом движении, мы будем иметь:

$$2T = \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dots + \dot{u}_k^2$$

$$2(U_0 + U) = -[g_1^2 u_1^2 + g_2^2 u_2^2 + g_3^2 u_3^2 + \dots + g_k^2 u_k^2] \quad (57)$$

Переменные

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$$

и будут „нормальные“ координаты, и поставленная задача будет решена, причем ни составлять, ни решать уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0$$

не потребовалось.

§ 6. Сравним теперь методы наших двух знаменитых авторов.

Метода Якоби приложима лишь к интегрированию такой системы уравнений, для которой имеет место интеграл живых сил, метода Леверрье приложима к любой системе.

В методе Якоби нельзя наперед в точности указать, сколько раз придется делать преобразование, пока можно будет в выражении потенциальной функции отбросить все члены с произведениями переменных; в методе Леверрье можно с точностью вперед ука-

зять, какая требуется работа для составления уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, а если применять методу Грешфе, то и для его решения.

Чтобы получить более определенное сравнение, разовьем методу Леверрье для того случая, когда интеграл живых сил имеет место, и притом не в том виде, как это сделано им самим, а подобно тому, как нами развита метода Якоби, т. е. путем преобразования квадратичных форм

$$2T \text{ и } 2(U_0 + U)$$

§ 7. Когда интеграл живых сил имеет место, то, как указано, формы $2T$ и $2(U_0 + U)$ будут представляться уравнениями (37) и (39) и уравнения движения системы будут

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \ddot{q}_2 &= \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ &\dots \\ \ddot{q}_k &= \frac{\partial U}{\partial q_k}\end{aligned}\tag{58}$$

По теореме об однородных функциях будет

$$2U = q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} + \dots + q_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\tag{59}$$

Когда мы составляем уравнения (23) и по ним (26), то если в выражении (59) заменить множители

$$q_1, q_2, \dots, q_k$$

соответственно через

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

получится форма

$$\begin{aligned}2U_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_k} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)^2 = \sum b_{ik} q_i q_k\end{aligned}\tag{60}$$

Форма эта будет такова, что

$$\begin{aligned} q_1^{\text{IV}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_1} \\ q_2^{\text{IV}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_2} \\ &\dots \\ q_k^{\text{IV}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (61)$$

Чтобы перейти к уравнениям, первые части конх соответственно

$$q_1^{\text{VI}}, q_2^{\text{VI}}, \dots, q_k^{\text{VI}}$$

стоит только составить форму

$$\begin{aligned} 2U_2 &= \frac{\partial U_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial U_1}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_k} = \\ &= \sum c_{ik} q_i q_k, \end{aligned} \quad (62)$$

то будет

$$\begin{aligned} q_1^{\text{VI}} &= \frac{\partial U_2}{\partial q_1} \\ q_2^{\text{VI}} &= \frac{\partial U_2}{\partial q_2} \\ &\dots \\ q_k^{\text{VI}} &= \frac{\partial U_2}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (63)$$

Таким образом, преобразования Леверрье будут состоять в составлении последовательных форм

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{k-1}$$

причем форма U_1 составляется по формуле (60), остальные по формуле

$$2U_{i+1} = \frac{\partial U_i}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U_i}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial U_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (64)$$

Пусть, например, $k=6$, посмотрим, сколько надо сделать умножений, чтобы по методу Леверрье составить s_2, s_3, s_4, s_5 и s_6 , т. е. формы

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$$

Ясно, что каждая производная $\frac{\partial U_i}{\partial q_n}$ представляет линейный шести-член относительно переменных $q_1, q_2, \dots, q_6$, следовательно, для перехода от одной формы к следующей надо сделать $36 \cdot 6 = 216$ умножений, а значит, всего надо $216 \cdot 5 = 1080$ умножений, но число это уменьшается в отношении $21:36$, вследствие равенства многих коэффициентов между собою, так что различных умножений будет всего 630.

После этого останется вычислить по формулам Ньютона (36) коэффициенты

$$B_1, B_2, \dots, B_6$$

уравнения

$$\alpha^6 + B_1 \alpha^5 + B_2 \alpha^4 + B_3 \alpha^3 + B_4 \alpha^2 + B_5 \alpha + B_6 = 0 \quad (65)$$

и затем все шесть корней этого уравнения, что требует сравнительно небольшой работы.

Посмотрим теперь, сколько работы в худшем случае потребует метода Якоби.

Для этой методы самый невыгодный случай тот, когда все коэффициенты a_{ik} близки между собою, тогда при $k=6$ при каждом преобразовании сумма квадратов коэффициентов вне диагонали будет уменьшаться на $\frac{1}{15}$ ее величины, отсюда видно, что эта сумма составит меньше $\frac{1}{1000}$ своего первоначального значения (что во всех технических вопросах может считаться вполне достаточным) лишь после

$$\frac{3}{|\lg 0.85|} = 43$$

преобразований.

При каждом преобразовании надо перевычислять $2 + 8 = 10$ коэффициентов, причем для каждого надо два умножения; присоединяя к этому вычисление углов φ , видим, что требуется кругло 900 умножений, после чего работу можно считать законченной.

Отсюда видно, что в самом невыгодном случае метода Якоби может потребовать работы почти на 50% больше нежели метода Леверрье, причем необходимо еще заметить, что вычисления по

методе Леверрье гораздо симметричнее, умножения приходится делать все время на *те же* самые числа, и схема вычисления может быть расположена подобно столь хорошо выработанной и для астрономов столь привычной схеме, служащей для составления нормальных уравнений в методе наименьших квадратов.

Что же касается остающегося затем решения уравнения (65), то для привычного вычислителя оно требует примерно $1\frac{1}{2}$ часа времени. Все эти обстоятельства, вероятно, и заставили Леверрье сохранить в 1856 г. свою методу, хотя метода Якоби и была опубликована в 1845 г. и, конечно, была хорошо известна Леверрье.

В тех случаях, когда при преобразованиях Якоби один из коэффициентов вне диагонали оказывается значительно больше остальных, число преобразований соответственно сокращается.

§ 8. Прежде чем перейти к системам с сопротивлением, напомним ту общую методу интегрирования систем линейных уравнений, которая излагается в любом курсе анализа, начиная с курса Лакруа, вышедшего 120 лет тому назад, причем будем придерживаться того своеобразного изложения, которым пользовался на своих лекциях А. Н. Коркин.

Положим

$$x = q_1 \quad (*)$$

где x есть вспомогательная переменная (можно полагать в общем случае и

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \dots + fq_k$$

при $a, b, c, \dots, f$ — любых заданных постоянных).

Продифференцируем равенство (*) дважды по времени t , и в полученном равенстве

$$x'' = q_1''$$

заменяем q_1'' его величиною

$$q_1'' = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k$$

из предложенной системы (11), так что будет

$$x'' = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k$$

Продолжим, однако, это обычное изложение несколько далее и, пользуясь определителями, выполним или, точнее говоря, обозначим результат исключения из системы (66) переменных

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$$

очевидно, что мы получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2k$:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ -x^{IV} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ -x^{VI} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^{(2k)} & f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} = 0 \quad (67)$$

Ищем его решение вида

$$x = C_1 e^{\lambda t}$$

причем C_1 — произвольная постоянная, получаем для определения λ уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda^2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ -\lambda^4 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ -\lambda^6 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^{2k} & f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} = 0 \quad (68)$$

придав затем первый столбец ко второму, приводим это уравнение к виду

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^2) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ (b_{21} - \lambda^4) & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ (c_{31} - \lambda^6) & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k1} - \lambda^{2k}) & f_{k2} & f_{k3} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

Это и есть вековое или характеристическое уравнение для нашей системы (11), написанное в том виде, в котором оно полу-

чится, если применить общую методу интегрирования, излагаемую во всех курсах анализа, и довести ее до конца.

Пусть будет

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} \quad (69')$$

обозначим через

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_k \quad (69'')$$

миноры определителя Δ_0 , относящиеся к первому столбцу, так что

$$\Delta_0 = a_{11}\Delta_1 + b_{21}\Delta_2 + c_{31}\Delta_3 + \dots + f_{k1}\Delta_k$$

тогда уравнение (69) напишется, положив $\lambda^2 = \alpha$, так:

$$\Delta_k \alpha^k + \Delta_{k-1} \alpha^{k-1} + \dots + \Delta_1 \alpha - \Delta_0 = 0$$

или, разделяя на Δ_k и полагая

$$\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = B_1; \frac{\Delta_{k-2}}{\Delta_k} = B_2; \dots; \frac{\Delta_1}{\Delta_k} = B_{k-1}; -\frac{\Delta_0}{\Delta_k} = B_k \quad (70)$$

придаем ему вид

$$\alpha^k + B_1 \alpha^{k-1} + B_2 \alpha^{k-2} + \dots + B_{k-1} \alpha + B_k = 0 \quad (71)$$

после чего и решаем его по обычным способам.

Как видно, определители миноры (69'') *все численные* порядка $(k-1)$, их вычисление совершается весьма просто, эта простота получилась потому, что неизвестная α и ее степени находятся в *одном первом столбце*, а не в диагональных элементах определителя, при каковом их расположении, развитие такого определителя, как (19), при сколь-нибудь значительном k практически непосредственно не выполнимо и требует тех особенных приемов, которые и были даны Лапласом, Лаверрье и Якоби.

Вид (19) векового уравнения удобен для теоретического исследования его общих свойств, но не для практического вычисления его корней.

1) прежде всего привести введением добавочных неизвестных все уравнения системы к первому порядку, для этого положить

$$q'_1 = q_{k+1}; q'_2 = q_{k+2}; \dots; q'_k = q_{2k}$$

тогда предложенная система примет вид

$$\begin{aligned} q'_1 &= 0 + 0 + \dots + 0 + q_{k+1} + 0 + \dots + 0 \\ q'_2 &= 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + q_{k+2} + \dots + 0 \\ &\dots \dots \dots \\ q'_k &= 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + \dots + q_{2k} \\ q'_{k+1} &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k + qh_{11}q_{k+1} + h_{12}q_{k+2} + \dots + h_{1k}q_{2k} \quad (73) \\ q'_{k+2} &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2k}q_k + h_{21}q_{k+1} + h_{22}q_{k+2} + \dots + h_{2k}q_{2k} \\ q'_{k+3} &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + \dots + a_{3k}q_k + h_{31}q_{k+1} + h_{32}q_{k+2} + \dots + h_{3k}q_{2k} \\ &\dots \dots \dots \\ q'_{2k} &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \dots + a_{kk}q_k + h_{k1}q_{k+1} + h_{k2}q_{k+2} + \dots + h_{kk}q_{2k} \end{aligned}$$

К этой системе применимы как метода Леверрье, так и общая. Первой мы развигать не будем, а ограничимся лишь второй, ибо она требует работы в $2k$ раз меньше.

Итак, полагаем

$$x = q_1$$

и будем последовательно дифференцировать это равенство $2k$ раз, заменяя после всякого дифференцирования производные переменных $q_1, q_2, \dots, q_{2k}$ их выражениями (73), тогда предложенная система заменится следующей ей эквивалентной:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 0 + 0 + \dots + 0 + q_{k+1} + 0 + \dots + 0 \\ x'' &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k + h_{11}q_{k+1} + h_{12}q_{k+2} + \dots + h_{1k}q_{2k} \quad (74) \\ x''' &= b_1q_1 + b_2q_2 + \dots + b_kq_k + b_{k+1}q_{k+1} + h_{22}q_{k+2} + \dots + b_{2k}q_{2k} \\ &\dots \dots \dots \\ x^{(2k)} &= f_1q_1 + f_2q_2 + \dots + f_kq_k + f_{k+1}q_{k+1} + \dots + f_{2k}q_{2k} \end{aligned}$$

при понятном обозначении и понятном последовательном составлении коэффициентов, которые, очевидно, все будут постоянные.

Исключая из этой системы все величины

$$q_1, q_2, \dots, q_{2k}$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x' & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x'' & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ -x''' & b_1 & b_2 & \dots & b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{2k} \\ -x^{IV} & c_1 & c_2 & \dots & c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^{(2k)} & f_1 & f_2 & \dots & f_k & f_{k+1} & f_{k+2} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \quad (75)$$

Ищем решение вида $x = Ce^{\lambda t}$; тогда для определения λ получим уравнение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda^2 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ -\lambda^3 & b_1 & b_2 & \dots & b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{2k} \\ -\lambda^4 & c_1 & c_2 & \dots & c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^{(2k)} & f_1 & f_2 & \dots & f_k & f_{k+1} & f_{k+2} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \quad (76)$$

Приложив первый столбец ко второму, получаем:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (a_{11} - \lambda^2) & a_{12} & a_{13} & \dots & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ (b_1 - \lambda^3) & b_2 & b_3 & \dots & b_k & b_{k+1} & \dots & b_{2k} \\ (c_1 - \lambda^4) & c_2 & c_3 & \dots & c_k & c_{k+1} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 - \lambda^{2k}) & f_2 & f_3 & \dots & f_k & f_{k+1} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение может быть написано и в другом виде, который получится, если умножить столбец k на λ , придав к нему первый, вычеркнув верхнюю строку и первый столбец, а столбец k перенеся на первое место; тогда будет

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + h_{11}\lambda - \lambda^2) & a_{12} & a_{13} \dots a_{1,k-1} & h_{12} \dots h_{1k} \\ (b_1 + b_k\lambda - \lambda^3) & b_2 & b_3 \dots b_{k-1} & b_{k+1} \dots b_{2k} \\ (c_1 + c_k\lambda - \lambda^4) & c_2 & c_3 \dots c_{k-1} & c_{k+1} \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 + f_k\lambda - \lambda^{2k}) & f_2 & f_3 \dots f_{k-1} & f_{k+1} \dots f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \quad (77)$$

Определитель этот будет порядка $(2k-1)$, развитие его по элементам первого столбца затруднений не представляет, и, обозначая соответствующие элементам первого столбца миноры через

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2k-1} \quad (77')$$

приведем вековое уравнение в этом случае сперва к виду

$$(a_{11} + h_{11}\lambda - \lambda^2)\Delta_1 + (b_1 + b_k\lambda - \lambda^3)\Delta_2 + \dots + (f_1 + f_k\lambda - \lambda^{2k})\Delta_{2k-1} = 0$$

а затем к окончательному виду

$$\lambda^{2k} + B_1\lambda^{2k-1} + B_2\lambda^{2k-2} + \dots + B_{2k-1}\lambda + B_{2k} = 0$$

причем нам потребуется лишь вычислять *численные* определители (77'), каждый из которых будет порядка $2k-2$.

§ 10. Чтобы пояснить нашу методу примером, возьмем этот пример из „Recherches Astronomiques“ Лаверрье (Annales de l'Observ. de Paris, t. II, p. 128), а именно систему в наших обозначениях:

$$q_1'' = -5.509882q_1 + 1.870086q_2 + 0.422908q_3 + 0.008814q_4$$

$$q_2'' = 0.287865q_1 - 11.811654q_2 + 5.711900q_3 + 0.058717q_4$$

$$q_3'' = 0.049099q_1 + 4.308033q_2 - 12.970687q_3 + 0.229326q_4$$

$$q_4'' = 0.006235q_1 + 0.269851q_2 + 1.397369q_3 - 17.596207q_4$$

Округляя коэффициенты на пять знаков и приискав соответствующие им пятизначные логарифмы, пишем эту систему с логарифмическими коэффициентами, после чего вычисляем по приведенным схемам числа

$$b_{2i}, c_{3i}, d_{4i} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

и по ним коэффициенты

$$B_1, B_2, B_3, B_4$$

векового уравнения, вычисление корней которого как не представляющее никаких трудностей и не требующее пояснений опускаем.

Вычисление это приведено со всею подробностью в том именно виде, как оно на самом деле произведено, чтобы дать полный пример и образец подобной работы.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВЕКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Схемы для вычисления

Заданная система

q_i	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
q_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
q_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
q_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Схемы вычисления b_{2i}

i	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_{2i}
1	$a_{11} \ a_{11}$	$a_{12} \ a_{21}$	$a_{13} \ a_{31}$	$a_{14} \ a_{41}$	b_{21}
2	$a_{11} \ a_{12}$	$a_{12} \ a_{22}$	$a_{13} \ a_{32}$	$a_{14} \ a_{42}$	b_{22}
3	$a_{11} \ a_{13}$	$a_{12} \ a_{23}$	$a_{13} \ a_{33}$	$a_{14} \ a_{43}$	b_{23}
4	$a_{11} \ a_{14}$	$a_{12} \ a_{24}$	$a_{13} \ a_{34}$	$a_{14} \ a_{44}$	b_{24}

Схемы вычисления c_{3i}

i	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	c_{3i}
1	$b_{21} a_{11}$	$b_{22} a_{21}$	$b_{23} a_{31}$	$b_{24} a_{41}$	c_{31}
2	$b_{21} a_{12}$	$b_{22} a_{22}$	$b_{23} a_{32}$	$b_{24} a_{42}$	c_{32}
3	$b_{21} a_{13}$	$b_{22} a_{23}$	$b_{23} a_{33}$	$b_{24} a_{43}$	c_{33}
4	$b_{21} a_{14}$	$b_{22} a_{24}$	$b_{23} a_{34}$	$b_{24} a_{44}$	c_{34}

Заданная система (коэффициент—логарифм)

q_i''	q_1	q_2	q_3	q_4
"				
q_1''	0.74114 _n	0.27186	1.62625	3.94517
q_2''	1.45919	1.07231 _n	0.75678	2.76876
q_3''	2.69107	0.63428	1.11296 _n	1.36045
q_4''	3.79484	1.43112	0.14531	1.24542 _n

Вычисление b_{2i}

i					b_{2i}	$\lg b_{2i}$
1	1.48228 +30.358	1.73105 0.53833	2.31732 0.020764	5.74001 0.00006	30.8985	1.48994
2	1.01300 _n -10.304	1.34417 _n -22.089	0.26053 1.8219	3.37269 0.00238	-30.569	1.48528 _n
3	0.36739 _n -2.3303	1.10264 10.6817	0.73921 _n -5.4854	2.09048 0.012316	2.8783	0.45914
4	-2.68631 -0.048563	1.04062 0.109805	2.98670 0.096984	1.19059 -0.15509	0.003139	3.49679

Вычисление c_{3i}

i					c_{3i}	$\lg c_{3i}$
1	2.23108 _n —170.25	0.94447 _n —8.7998	1.15021 0.1413	5.29163 0.0000	—178.91	2.25264 _n
2	1.76180 57.783	2.55759 361.07	1.09342 12.400	4.92791 0.0008	431.25	2.63473
3	1.11619 13.0675	2.24206 _n —174.61	1.57210 _n —37.334	3.64210 0.004	—198.87	2.29857 _n
4	1.43511 0.27234	0.25404 _n —1.7949	1.81959 0.66007	2.74221 _n —0.055235	—0.9177	1.96270 _n

Вычисление d_{4i}

i					d_{4i}	$\lg d_{4i}$
1	2.99383 985.90	2.09392 124.14	0.98964 _n —9.764	3.75754 _n —0.006	1100.27	3.04150
2	2.52450 _n —334.58	3.70704 _n —5093.8	2.93285 _n —856.74	1.39382 _n —0.25	—6285.37	3.79883 _n
3	1.87889 _n —75.664	3.39151 2463.3	3.41153 2579.5	0.10801 _n —1.28	4965.86	3.69599
4	0.19781 _n —1.5769	1.40349 25.322	1.65902 _n —45.606	1.20812 —16.148	—5.713	0.75686 _n

Определитель $\Delta(0)$

$\Delta(0) =$	0.74114 _n	0.27186	1.62625	3.94517
	1.48994	1.48528 _n	0.45914	3.49679
	2.25264 _n	2.63473	2.29857 _n	1.96270 _n
	3.04150	3.79833 _n	3.69599	0.75686 _n

Вычисление миноров $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, относящихся к элементам первого столбца $\Delta(0)$

1.48528 _n	2.63473	3.79833 _n	3.79833 _n	1.48528 _n	2.63473
2.29857 _n	3.69599	0.45914	2.29857 _n	3.69599	0.45914
0.75686 _n	3.49679	1.96270 _n	—3.49679	1.96270 _n	0.75686 _n
4.54071 _n	3.82751	4.22017	3.59369	5.14397	3.85083 _n
—34730	6722.2	16602.5	3923.6	139305	—7093.0

$$\Delta_1 = -147541$$

0.27186	2.63473	3.79838 _n	3.79833 _n	0.27186	2.63473
2.29857 _n	3.69599	1.62625	2.29857 _n	3.69599	1.62625
0.75686 _n	3.94517	1.96270 _n	3.94517	1.96270 _n	0.75686 _n
3.32729	4.27589	3.38733	4.04207	3.93055 _n	3.01784 _n
2124.7	18875	2439.7	11017.2	-8522.2	-1041.9

$$\Delta_2 = -21986$$

0.27186	1.48528 _n	3.79833 _n	0.79833 _n	0.27186	1.48528 _n
0.45914	3.69599	1.62625	0.45914	3.69599	1.62625
0.75686 _n	3.94517	3.49679	3.94517	3.49679	0.75686 _n
1.48786 _n	3.12644 _n	0.92137 _n	2.20264 _n	1.46464	1.86839
-30.751	-1377.95	-8.34	-159.455	29.150	73.857

$$\Delta_3 = -1320.59$$

0.27186	1.48528 _n	2.63473	2.63473	0.27186	1.48528 _n
0.45914	2.29857 _n	1.62625	0.45914	2.29857 _n	1.62625
1.96270 _n	3.94517	3.49679	3.94517	3.49679	1.96270 _n
0.69370 _n	1.72902	1.75777	1.03904	0.06722 _n	1.07423
-4.9397	53.582	0.5725	10.9405	-1.1674	11.8640

$$\Delta_4 = -27.578$$

Примечание. Миноры вычислены по этому более длинному приему, чтобы избежать малых разностей больших чисел и происходящей от этого утраты точности.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ B_i

i	$\lg \Delta_i$	$\lg B_i$	B_i	$\lg \Delta_{i+1}$	
0	5.53085 _n	4.09029	12311		
1	5.16891 _n	3.72835	5350.0	5.91005	812930
2	4.34215 _n	2.90159	797.24	5.83209 _n	-679350
3	3.12077 _n	1.68021	47.886	5.37341	236270
4	1.44056 _n			4.48206 _n	-30343
				$-\Delta_0 =$	339507

Контроль						
$\Delta(0) =$	2.79597 _n	2.32669	1.68108	3.94517	lg a _{ii}	—a _{ii}
	—625.13	212.17	47.982		0.74114 _n	5.5099
	0.69043	2.30355 _n	1.98802		1.07231 _n	11.8115
	4.9026	—201.165	97.279	2.76876	1.11296 _n	12.9705
	1.33062	1.27383	1.75251 _n		1.24542 _n	17.5965
	0.21410	18.786	—56.560	1.36045		
	4.54942 _n	2.18570 _n	2.89989 _n	1.24542 _n	B ₁ =	47.8884
	—0.00035434	—0.015336	—0.079413	3.31980 _n		
—625.13	212.185	48.061				
2.79597 _n	2.32671	1.68179			lg 5888258 = 6.76999 _n	
4.9030	—201.150	97.358			3.31980 _n	
0.69046	—2.30352 _n	1.98837			4.08979	
0.21445	18.801	—56.481			B ₄ = Δ(0) = 12297	
1.33133	1.27418	1.75190 _n				
2.79597 _n	0.69046	1.33133	1.33133	2.79597 _n	0.69046	
2.30352 _n	1.27418	2.32671	2.30352 _n	1.27418 _n	2.32671	
1.75190 _n	1.68179	1.98837	1.68179	1.98837	1.75190 _n	
6.85139 _n	3.64643	3.64641	3.31664 _n	6.05852 _n	4.76907 _n	
—7102200	4430.3	4430.1	—2073.2	—1144250	—58759	
—5888258						

-5888258

Контрольное вычисление обнаруживает вполне удовлетворительное при вычислении по пятизначным логарифмам согласие, а именно:

$$B_1 = 47.886 \quad \text{и} \quad 47.8884$$

$$B_4 = 12311 \quad \text{и} \quad 12297$$

Так как контрольные числа получены по непосредственному вычислению, то им надо отдать предпочтение, таким образом при наших обозначениях вековое уравнение для написанной системы есть

$$\alpha^4 + 47.8884\alpha^3 + 797.24\alpha^2 + 5350.0\alpha + 12297 = 0 \quad (*)$$

По вычислениям Леверрье, произведенным по семизначным, а может быть и десятизначным логарифмам, это уравнение есть

$$\alpha^4 + 47.888430\alpha^3 + 797.2789\alpha^2 + 5349.457\alpha + 12296.555 = 0$$

Все корни этого уравнения вещественные и отрицательные. Вычисление по логарифмической линейке покажет, что один корень лежит между -5 и -6 , второй между -7 и -8 . Вычисление этих корней совершить весьма просто, после чего остальные два найдутся решением квадратного уравнения. Корни нашего уравнения будут отличаться лишь в 5-м знаке от корней, вычисленных Леверрье, которые суть

$$\alpha_1 = -5.29870; \quad \alpha_3 = -17.15266$$

$$\alpha_2 = -7.57404; \quad \alpha_4 = -17.86303$$

§ 11. В предыдущем примере все миноры вычислены независимо и отдельно, ибо они третьего порядка, а вычисление такого определителя производится весьма просто, но если бы число k было не 4, а, скажем, 8, то такое раздельное вычисление потребовало бы много излишней работы, которой можно избежать, поступая следующим образом.

Обозначим двучлены или трехчлены первого столбца через

$$A, B, C, D, \dots, F$$

и поставим этот столбец на последнее место, так что наш определитель будет вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & A \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & B \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & F \end{vmatrix}$$

разделяем каждую строку соответственно на первый член ее и затем вычитаем первую строку из всех остальных, тогда, от-

бросив первый столбец и верхнюю строку, приводим наш определитель к виду

$$\Delta = a_1 b_1 \dots f_1 \begin{vmatrix} b'_2 & b'_3 & \dots & b'_{k-1} & (b_1^{-1} B - a_1^{-1} A) \\ c'_2 & c'_3 & \dots & c'_{k-1} & (c_1^{-1} C - a_1^{-1} A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_2 & f'_3 & \dots & f'_{k-1} & (f_1^{-1} F - a_1^{-1} A) \end{vmatrix}$$

С этим определителем поступаем так же и по упрощении получим определитель порядка $k-2$ такого вида:

$$\Delta = a_1 b_1 \dots f_1 b'_2 c'_2 \dots f'_2 \begin{vmatrix} c''_3 & c''_4 & \dots & c''_{k-1} & (\gamma C + \beta B + \alpha A) \\ d''_3 & d''_4 & \dots & d''_{k-1} & (\delta D + \beta B + \alpha A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_3 & f''_4 & \dots & f''_k & (\eta F + \beta B + \alpha A) \end{vmatrix}$$

и продолжаем таким образом, пока не дойдем до определителя четвертого порядка, миноры которого будут третьего порядка и вычисляются непосредственно, как показано выше, после чего определитель Δ развивается по элементам своего последнего столбца и представляется в виде

$$\Delta = nA + mB + pC + \dots + rF$$

Очевидно, что $n, m, p, \dots, r$ и будут искомые миноры, относящиеся к числам первого столбца первоначально предложенного определителя, а так как достаточно знать лишь числа, им пропорциональные, то нет надобности производить умножение на величину

$$a_1 b_1 \dots f_1 b'_2 c'_2 \dots f'_2 \dots$$

Особенно просто это вычисление производить пользуясь логарифмической линейкой, что для технических вопросов вполне достаточно, так же просто выполняется оно и по логарифмам, на подробностях чего останавливаться не будем.

§ 12. В предыдущих параграфах мы рассмотрели тот случай, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего данной системе, не равны между собой.

Первоначально я имел в виду ограничиться этим общим случаем, как наиболее часто встречающимся в технических вопросах, но акад. Л. И. Мандельштам, ознакомясь с этой статьей в рукописи, любезно обратил мое внимание на то, что случай равных корней представляет такие особенности, что с первого взгляда может показаться, что изложенная метода к этому случаю не применима, поэтому для практиков представляющееся затруднение желательно разъяснить.

Здесь приходится особенно вспомнить слова Ньютона „при изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила“, а также Эйлера, который, излагая какой-либо вопрос, всегда начинал с разбора простейших частных случаев, на которых наглядно выясняется сущность дела. Лагранж как раз в данном случае, следуя своему обычаю рассматривать всякий вопрос в самом общем виде, впал в свою знаменитую ошибку, вовлек в нее Лапласа, и эта ошибка удержалась в науке в течение 70 лет, пока почти одновременно ее не разъяснили К. Вейерштрасс в 1858 г. и наш акад. О. И. Сомов (в 1859 г.).

Начнем с того примера, который мне сообщил акад. Л. И. Мандельштам:

$$\begin{aligned} q_1'' &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ q_2'' &= q_1 + 2q_2 + q_3 \\ q_3'' &= q_1 + q_2 + 2q_3 \end{aligned} \quad (78)$$

Характеристическое уравнение для этой системы, написанное в виде обычного определителя, есть

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda^2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (79)$$

Очевидно, оно имеет корень

$$\lambda_1^2 = 1$$

а так как при этом значении не только

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (80)$$

но и все миноры первого порядка этого определителя равны нулю, то корень $\lambda^2 = 1$ есть двойной. Второй корень, как легко проверить, есть $\lambda_2^2 = 4$, таким образом

$$\Delta(\lambda^2) = (\lambda^2 - 1)^2 (\lambda^2 - 4)$$

Обращаясь к системе (78) и применяя методу § 8, получим последовательно:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x'' &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ x^{IV} &= 6q_1 + 5q_2 + 5q_3 \\ x^{VI} &= 22q_1 + 21q_2 + 21q_3 \end{aligned} \quad (81)$$

По исключению, следуя буквально правилу § 8, переменных q_1, q_2, q_3 , мы написали бы уравнение

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ -x'' & 2 & 1 & 1 \\ -x^{IV} & 6 & 5 & 5 \\ -x^{VI} & 22 & 21 & 21 \end{vmatrix} = 0 \quad (82)$$

соответствующее ему характеристическое

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 2 & 1 & 1 \\ -\lambda^4 & 6 & 5 & 5 \\ -\lambda^6 & 22 & 21 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda^2 & 1 & 1 \\ 6-\lambda^4 & 5 & 5 \\ 22-\lambda^6 & 21 & 21 \end{vmatrix} = 0 \quad (83)$$

Развивая этот определитель по элементам первого столбца, получим:

$$(2-\lambda^2) \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 21 & 21 \end{vmatrix} - (6-\lambda^4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & 21 \end{vmatrix} + (22-\lambda^6) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad (84)$$

Очевидно, что все написанные миноры равны нулю, и вместо уравнения мы получим тождество

$$0=0$$

Очевидно также, что если бы мы стали развивать уравнение (82), то получили бы то же самое тождество.

В чем же дело и в чем причина этого кажущегося противоречия?

Дело в том, что когда мы составляем систему (81), чтобы затем исключить переменные q_1 , q_2 , q_3 в этом частном случае (который имеет место всегда, если в системе третьего порядка два корня между собою равны) нет надобности составлять *четвертое* уравнение, а достаточно только *первых трех* уравнений, ибо переменные q_2 и q_3 входят лишь в виде суммы $q_2 + q_3$ и исключаются *обе сразу*, а не каждая порознь, в самом деле, положив на время в уравнении (81)

$$q_2 + q_3 = \xi$$

мы напомним систему (81) так:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 2q_1 + \xi \\ x^{IV} &= 6q_1 + 5\xi \end{aligned} \quad (85)$$

и результат исключения будет

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -x'' & 2 & 1 \\ -x^{IV} & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

или в развитом виде

$$x^{IV} - 5x'' + 4x = 0 \quad (86)$$

и характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 2 & 1 \\ -\lambda^4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & 1 \\ \lambda^4 - 6 & 5 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \quad (87)$$

Откуда корни

$$\lambda_1^2 = 1; \quad \lambda_2^2 = 4$$

соответственно чему

$$q_1 = A_1 e^t + B_1 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \quad (88)$$

причем A_1, B_1, C_1 и D_1 — произвольные постоянные.

Совершенно так же, если бы, положив

$$y = q_2$$

мы исключили бы затем переменные q_1 и q_3 , то получили бы уравнение:

$$y^{IV} - 5y'' + 4 = 0$$

и из него имели бы общее решение

$$q_2 = A_2 e^t + B_2 e^{-t} + C_2 e^{2t} + D_2 e^{-2t} \quad (89)$$

а если бы, положив

$$q_3 = z$$

исключили q_1 и q_2 , то имели бы

$$q_3 = A_3 e^t + B e^{-t} + C_3 e^{2t} + D_3 e^{-2t} \quad (90)$$

Но постоянные произвольные $A_1, B_1, \dots, D_3$ не суть независимые между собою, а связаны теми соотношениями, которые следуют из уравнений системы.

Так, возьмем частное решение

$$q_1 = A_1 e^t; \quad q_2 = A_2 e^t; \quad q_3 = A_3 e^t$$

подставляя, получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_1 + A_2 + A_3 \\ A_2 &= A_1 + 2A_2 + A_3 \\ A_3 &= A_1 + A_2 + 2A_3 \end{aligned} \quad (91)$$

Очевидно, эти три уравнения заменяются одним

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ A_3 &= -(A_1 + A_2) \end{aligned} \quad (92)$$

откуда

Совершенно так же, рассматривая частное решение

$$q_1 = B_1 e^{-t}; \quad q_2 = B_2 e^{-t}; \quad q_3 = B_3 e^{-t}$$

соответствующее второй паре равных корней, получим:

$$B_3 = -(B_1 + B_2) \quad (93)$$

Наконец, для частного решения

$$q_1 = C_1 e^{2t}; \quad q_2 = C_2 e^{2t}; \quad q_3 = C_3 e^{2t}$$

получим:

$$\begin{aligned} 4C_1 &= 2C_1 + C_2 + C_3 \\ 4C_2 &= C_1 + 2C_2 + C_3 \\ 4C_3 &= C_1 + C_2 + 2C_3 \end{aligned} \quad (94)$$

или

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Очевидно, что сумма первых частей этих уравнений тождественно равна нулю, значит одно из этих уравнений (скажем, третье) есть следствие первых двух и, отбросив его, мы получим:

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (96)$$

принимая C_1 произвольным, имеем:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \\ C_3 &= C_1 \end{aligned} \quad (97)$$

Совершенно так же будет

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 \\ D_3 &= D_1 \end{aligned} \quad (98)$$

Таким образом, общий интеграл системы будет

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^t + B_1 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_2 &= A_2 e^t + B_2 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_3 &= -(A_1 + A_2) e^t - (B_1 + B_2) e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \end{aligned} \quad (99)$$

причем $A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, D_1$ — произвольные постоянные.

Возьмем еще пример:

$$\ddot{q}_1 = 5q_1 + 30q_2 - 48q_3$$

$$\ddot{q}_2 = 3q_1 + 14q_2 - 24q_3$$

$$\ddot{q}_3 = 3q_1 + 15q_2 - 25q_3$$

Отсюда следует

$$q_1^{\text{IV}} = -29q_1 - 150q_2 + 240q_3$$

Таким образом, имеем:

$$x = q_1$$

$$\ddot{x} = 5q_1 + 30q_2 - 48q_3$$

$$x^{\text{IV}} = -29q_1 - 5(30q_2 - 48q_3)$$

Ясно, что переменные q_2 и q_3 исключаются одновременно, и мы получим:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -\ddot{x} & 5 & 1 \\ -x^{\text{IV}} & -29 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad (100)$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 5 & 1 \\ -\lambda^4 & -29 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda^2 & 1 \\ -29 - \lambda^4 & -5 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

Взяв определитель

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda^2 & 30 & -48 \\ 3 & 14 - \lambda^2 & -24 \\ 3 & 15 & -25 - \lambda^2 \end{vmatrix} \quad (101)$$

положив в нем $\lambda^2 = -1$, имеем:

$$\Delta(-1) = \begin{vmatrix} 6 & 30 & -48 \\ 3 & 15 & -24 \\ 3 & 15 & -24 \end{vmatrix} = -6 \cdot 15 \cdot 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и так как все три строки одинаковы, то и все миноры равны нулю, т. е. $\lambda^2 = -1$ есть двойной корень $\Delta(\lambda^2) = 0$, зная это, доканчиваем интегрирование как обыкновенно.

Возьмем в заключение систему

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4 \\ \ddot{q}_2 &= 10q_1 + 15q_2 + 90q_3 - 154\ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_3 &= 5q_1 + 9q_2 + 42q_3 - 77q_4 \\ \ddot{q}_4 &= 5q_1 + 9q_2 + 45q_3 - 80q_4\end{aligned}\quad (102)$$

и положив

$$x = q_1$$

составляем по схеме § 10 коэффициенты b_{2i} получаем таблицу. Значит, будет

$$\begin{aligned}x &= q_1 \\ \ddot{x} &= 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4 \\ x^{IV} &= -66q_1 - 135q_2 - 675q_3 + 1155q_4\end{aligned}$$

i	$a_{11} = 12$	$a_{12} = 27$	$a_{13} = 135$	$a_{14} = -231$	b_{2i}
1	144	270	675	-1155	-66
2	324	405	1215	-2079	-135
3	1620	2430	5670	-10395	-675
4	-2772	-4158	-10395	+18480	+1155

Очевидно, что, положив

$$27q_1 + 135q_2 - 231q_4 = \xi$$

напишем эту систему так:

$$\begin{aligned}x &= q_1 \\ \ddot{x} &= 12q_1 + \xi \\ x^{IV} &= -66q_1 - 5\xi\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -\ddot{x} & 12 & 1 \\ -x^{IV} & -66 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad (103)$$

Значит, характеристическое уравнение будет:

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 12 & 1 \\ -\lambda^4 & -66 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 - \lambda^2 & 1 \\ -66 - \lambda^4 & -5 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 6 = 0$$

т. е.

$$(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 3) = 0$$

Обращаясь к основному определителю для нашей системы, находим, что при $\lambda^2 = -3$ все миноры равны нулю, так что этот корень тройной, корень же $\lambda^2 = -2$ есть простой, после чего интегрирование заканчивается как обыкновенно.

Эти примеры с ясностью показывают, что если по вычислению по изложенным правилам окажется, что уравнение:

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ b_{21} - \lambda^4 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ c_{31} - \lambda^6 & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k1} - \lambda^{2k}) & f_{k2} & f_{k3} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} = 0 \quad (104)$$

обращается в тождество

$$0 = 0$$

т. е. все миноры соответствующие первому столбцу, равны нулю, то это будет указывать, что исключение неизвестных

$$q_1, q_2, \dots, q_k \quad (105)$$

может быть выполнено не из полного числа $(2k + 1)$ уравнений (66), а из меньшего их числа, тогда вычеркиваем в этой системе:

уравнения последовательно, начиная с нижнего, и определяем то наименьшее их число, при котором все переменные (105) исключаются; пишем соответствующее обыкновенное уравнение с неизвестной x , и для него характеристическое, — степень его будет ниже $2k$, находим его корни и, обратившись к основному определителю (104), находим кратность корней, после чего и заканчиваем интегрирование как обыкновенно.

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Введение и постановка вопроса

Колебания, которые может совершать упругий стержень около своего положения равновесия, подразделяются на 2 класса: колебания *свободные* и *вынужденные*.

Под *свободными* колебаниями понимают те, которые обусловлены только начальными отклонениями стержня от его равновесного состояния и не зависят от действия внешних сил. *Вынужденными* называются такие колебания, которые возникают при длительном действии внешних сил, но не зависят от начального состояния стержня. Свободные колебания призматических стержней весьма подробно исследованы после Эйлера, в „Механике“ Пуассона и в „Теории звука“ Рэлея.

Вынужденные колебания представляют, с точки зрения практического применения в железнодорожном строительстве, в кораблестроении и при строительстве мостов, столь же большой интерес, как и свободные колебания в акустике, в особенности в том случае, когда рассматриваются стержни переменного сечения. Однако в учебниках нельзя найти исследования вынужденных колебаний даже для простейшего случая призматических стержней.

Темой данной статьи является разработка общего метода для определения вынужденных колебаний призматического упругого стержня, подверженного действию переменной силы. Можно тотчас же убедиться в том, что предлагаемый метод является общим

в том смысле, что он применим к аналогичным проблемам математической физики, например к исследованию колебания струн, теплопроводности стержня и т. п.

В этой работе на первое место я ставил, как всегда, практическое применение, а не чисто математическую сторону вопроса, так как сама статья возникла из предварительного изучения, предпринятого для практического исследования вибраций корабля.

§ 2

Пусть AB —призматический, т. е. первоначально прямой, стержень постоянного поперечного сечения и ось x располагается по средней линии стержня так, что концу A отвечает значение абсциссы $x=0$ и концу B $x=l$.

Предположим, что этот стержень получает начальное (отвечающее моменту времени $t=0$) отклонение от состояния равновесия и находится под действием переменной силы; следует определить его колебания. Предположим далее, что направление силы везде параллельно оси z и что имеют место плоские поперечные колебания, происходящие в плоскости zx .

Сила, действующая на стержень в каждой его точке, относится к единице длины стержня и представляется функцией

$$Z=F(x, t)$$

где $F(x, t)$ —заданная функция абсциссы x и времени t .

Хорошо известно, что рассматриваемая проблема математически выражается следующим образом: необходимо определить z как функцию независимых переменных x и t таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:

1. Она должна служить решением дифференциального уравнения в частных производных (уравнения движения)¹

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qS} F(x, t) \quad (1)$$

¹ P o i s s o n. Mécanique, §§ 519—529. — Lord R a y l e i g h. Theory of Sound (2nd ed.), Chap. VIII.

Здесь q обозначает плотность материала стержня; S — площадь его поперечного сечения; $b^2 = \frac{EI}{qS}$ — постоянная; E — модуль нормальной упругости; I — момент инерции площади S относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний.

2. Она должна удовлетворять начальным условиям, определяемым начальными возмущениями. Эти условия формулируются следующим образом: если t равно нулю, то z должно равняться заданной функции $\varphi(x)$ и частная производная $\frac{\partial z}{\partial t}$ должна быть равна другой данной функции $\psi(x)$. Эти функции заданы лишь в промежутке от $x=0$ до $x=l$ и (за исключением указанного еще ниже ограничения) в остальном являются произвольными.

3. Она должна отвечать граничным условиям или, иначе, условиям закрепления. Последние относятся к концам $A(x=0)$ и $B(x=l)$ стержня и формулируются следующим образом:

а) для свободного конца соответствующие (абсциссе $x=0$ или $x=l$) значения производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ должны быть равны нулю;

в) для шарнирно опертого конца соответствующие значения функции z и ее производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ должны быть равны нулю;

с) для защемленного (жестко заделанного) конца соответствующие значения z и $\frac{\partial z}{\partial x}$ должны равняться нулю. Эти условия должны выполняться для всех значений t . Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, рассмотренные в п. 2° и характеризующие собой начальное возмущение, должны также удовлетворять указанным выше граничным условиям.

§ 3. Общий подход к решению задачи

Общий метод решения рассматриваемой проблемы состоит в следующем.

Положим

$$z = z_1 + z_2 \quad (2)$$

и определим z_1 и z_2 с помощью уравнений

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} = 0 \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial t^4} = \frac{1}{qS} F(x, t) \quad (4)$$

Кроме того, назовем граничные и начальные условия для z_1 и z_2 так, чтобы функция z_1 представляла свободные, а z_2 — вынужденные колебания. Это достигается тем, что z_2 и z_1 подчиняются следующим условиям: 1) отдельно взятая функция z_2 должна удовлетворять тем же граничным условиям, что и функция z ; что касается начальных условий, то их для z_2 берут такими: когда $t=0$, z_2 и $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ также должны стать равными нулю. Благодаря этому функция z_2 полностью определяется. 2) отдельно взятая функция z_1 должна удовлетворять граничным и начальным условиям, заданным для суммы $z = z_1 + z_2$.

Если функции z_1 и z_2 определяются указанным образом, то тотчас же видно, что их сумма $z = z_1 + z_2$ удовлетворяет уравнению движения (1), а также начальным и граничным условиям; таким образом, функция $z_1 + z_2$ является решением нашей проблемы. При этом указанное решение составляется таким образом, что z_1 определяется только начальным возмущением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и не зависит от действующей силы $F(x, t)$; напротив, z_2 зависит лишь от этой силы и не связано с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т. е. не зависит от начального возмущения. Одним словом, z_1 будет представлять собой свободные, а z_2 — вынужденные колебания.

§ 4. Способ определения свободных колебаний посредством нормальных функций

Вначале определяются свободные колебания, что выполняется следующим хорошо известным образом.

Отыскивают наиболее общую форму выражения

$$z_1 = \sum XT \quad (5)$$

где X обозначает функцию одной только переменной x и T — функцию одного лишь t , так, чтобы эта форма удовлетворяла уравнению (3) и граничным условиям. Тогда X и T определяются уравнениями

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - m^4 X = 0$$

и

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + b^2 m^4 T = 0 \quad (6)$$

где m может иметь любое постоянное значение.

Для X получаем:

$$X = C_1 \operatorname{ch} mx + C_2 \operatorname{sh} mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные и $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}$ обозначают в принятом виде гиперболические функции. Соответствующее выражение функции T будет

$$T = D \cos m^2 bt + E \sin m^2 bt$$

Поэтому выражение (5) принимает следующую форму:

$$z_1 = \sum D X \cos m^2 bt + \sum E X \sin m^2 bt \quad (8)$$

где суммы простираются на любые возможные значения m .

Чтобы удовлетворить граничным условиям, определяют постоянные C таким образом, чтобы каждая из функций X , отдельно взятая, удовлетворяла бы указанным условиям; последнее, как известно, для каждой комбинации этих условий ведет к соответствующему трансцендентному уравнению

$$\Phi(m) = 0 \quad (9)$$

Пуассоном¹ было доказано, что эти уравнения обладают бесконечным числом корней, которые все без исключения действительны и отличны друг от друга. Эти корни обозначаются через $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$

Каждому корню соответствует функция X , которая содержит только одну произвольную постоянную в качестве множителя.

¹ Poisson. Mécanique, § 524.

Функцию X , отвечающую корню m_k , в дальнейшем будем обозначать через $C_k X_k$.

Если положить $C_k D = A_k$ и $C_k E = B_k$, то получим для z_1 выражение

$$z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 b t + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 b t \quad (10)$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные; m_k , как уже было сказано, — корни трансцендентного уравнения (9) и X_k — определенные функции x и m_k . Эти функции X_k должны быть названы здесь в соответствии с принятым у английских авторов *нормальными функциями, отвечающими граничным условиям*.

§ 5

Главное свойство этих нормальных функций выражается следующим уравнением:

$$\int_0^l X_i X_k dx = 0$$

если k не равно i .

Это соотношение вытекает непосредственно из уравнений (6) и граничных условий, которым удовлетворяют нормальные функции.

Указанное свойство доставляет согласно Фурье средство для расчета коэффициентов N_k при разложении заданной функции $f(x)$ в ряд по нормальным функциям:

$$f(x) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_k X_k + \dots \quad (11)$$

в том случае, если доказано или принято, что такое разложение возможно. Обе части уравнения (11) должны быть умножены на $X_k dx$ и проинтегрированы в пределах $x=0$ и $x=l$, после чего получим значение

$$N_k = \frac{\int_0^l f(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \quad (12)$$

Знаменатель, последней формулы может быть всегда вычислен посредством уравнений (6) и без применения интегрирования.

В 8-й части труда лорда Рэля „Теория звука“ можно найти небольшую таблицу, в которой содержатся значения этого знаменателя для всех шести комбинаций граничных условий.

§ 6. Вынужденное колебание; общее решение проблемы

Дальнейший шаг в нашем методе состоит в определении z_2 . Это достигается следующим способом.

1°. Переменную силу $F(x, t)$, действующую на стержень (или, выражаясь технически, — соответствующее моменту t распределение переменной нагрузки), следует разложить в ряд по нормальным функциям X_k , отвечающим граничным условиям.

Положим таким образом

$$F(x, t) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_k X_k + \dots \quad (13)$$

откуда следует

$$N_k = \frac{\int_0^l F(x, t) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \quad (14)$$

последнее выражение представляет собой определенную функцию переменной t .¹

¹ Рассуждая строго математически, заключаем, что такое разложение возможно лишь, когда функция $F(x, t)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и нормальные функции X . Однако для практических технических приложений это не обязательно.

В этих целях рассмотрим разложение функции $f(x)$, которая при $x=0$ и $x=\pi$ не равна 0, в синусоидальный ряд. Хорошо известно, что в этом случае с ростом числа членов ряда кривая, представляющая сумму этих членов, в точках $x=0$ и $x=\pi$ все больше приближается к прямым, перпендикулярным к оси абсцисс, так что эти нормали связывают указанные точки оси абсцисс с точками $(0, f(0))$ и $(\pi, f(\pi))$. В нашем случае, где $F(x, t)$ является нагрузкой на стержень, непосредственно видно, что функция $F(x, t)$ и ее разложение в ряд (с вертикальными ординатами в конечных точках) являются равнознач-

2°. Положим далее

$$z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k \quad (15)$$

где T_k обозначает функцию переменной t , которую еще следует определить.

3°. После подстановки выражений (13) и (15) в уравнение (4) видно, что T_k можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + m_k^4 b^2 T_k = \frac{1}{qS} N_k \quad (16)$$

Последнее дает

$$T_k = G_k \cos m_k^2 b t + H_k \sin m_k^2 b t + S_k$$

где

$$S_k = \frac{1}{qS} \cdot \frac{1}{m_k^2 b} \left[\sin m_k^2 b t \int_0^t N_k \cos m_k^2 b t dt - \cos m_k^2 b t \int_0^t N_k \sin m_k^2 b t dt \right]$$

а G_k и H_k — произвольные постоянные. Эти постоянные определяются таким образом, что при $t=0$ T_k и $\frac{dT_k}{dt}$ также обращаются в нуль. Эти условия следуют непосредственно из того, что сказано в § 3 о начальных условиях, которым должна удовлетворять функция z_2 .

Таким образом получают

$$G_k = 0 \text{ и } H_k = 0$$

и находят

$$T_k = \frac{1}{qS m_k^2 b} \left[\sin m_k^2 b t \int_0^t N_k \cos m_k^2 b t dt - \cos m_k^2 b t \int_0^t N_k \sin m_k^2 b t dt \right] \quad (17)$$

4°. Остается еще определить z_1 так, чтобы сумма $z = z_1 + z_2$ удовлетворяла начальным условиям, но так как при $t=0$ z_2 и $\frac{\partial z_2}{\partial t}$

щими в отношении их влияния на стержень. Об этом более подробно можно прочитать у Бэрли (Byerly. Elementary Treatise on Fourier's Series etc. Boston, 1893, pp. 64—65) или у Фрике (R. Fricke. Analytisch-funktionen-theoretische Vorlesungen. Leipzig, 1900, S. 14).

оба равны нулю, то эти начальные условия, как уже отмечалось в § 3, являются следующими:

$$\begin{aligned} \text{когда } t \rightarrow 0, z_1 & \text{ должно равняться } \varphi(x) \\ \text{когда } t=0, \frac{\partial z_1}{\partial t} & \text{ должно равняться } \psi(x) \end{aligned} \quad (18)$$

Последние условия достаточны, чтобы однозначно определить входящие в выражение (10) произвольные постоянные A_k и B_k ($k=1, 2, \dots$), так как из них следуют два уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k &= \varphi(x) \\ \sum_{k=1}^{k=\infty} b m_k^2 B_k X_k &= \psi(x) \end{aligned} \quad (19)$$

из которых получаем

$$A_k = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \quad (20)$$

и

$$B_k = \frac{1}{b m_k^2} \cdot \frac{\int_0^l \psi(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx}$$

Если все эти отдельные результаты и соотношения собрать вместе, то станет ясно, что наша задача формально разрешается с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 \\ z_1 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 b t + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 b t \\ z_2 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k \end{aligned} \quad (21)$$

где T_k определяется формулой (17), A_k и B_k — формулами (20), а m_k — трансцендентным уравнением (9).

Когда решение представлено в указанной форме, то непосредственно можно увидеть, что если $F(x, t)$ будет положено равным нулю, то z_2 исчезает, а z_1 остается без изменения; наоборот, если принять $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равными нулю, то исчезает z_1 , а z_2 остается неизменным. Это показывает, что z_1 действительно представляет свободные, а z_2 — вынужденные колебания стержня.

Изложенное выше решение получено чисто формальным путем. В каждом отдельном случае, когда функции конкретно заданы, а не только обозначены соответствующими символами, для получения строго математического результата необходимо доказать, что фигурирующие в решении бесконечные ряды допускают безоговорочно все математические операции (интегрирование и многократное дифференцирование по x и t).

Совсем по другому обстоит дело с практическими техническими приложениями. Здесь пользуются лишь довольно грубым приближением, для которого достаточны уже немногие первые члены рядов. *Необходимое число этих членов может быть определено путем непосредственного расчета.* Для этого следует заметить, что переменная нагрузка $F(x, t)$ практически задается только приближенно: таким образом нужно рассчитать значения этой функции, характеризующие ее график, и сравнить их с теми, которые получаются как суммы первых членов ряда (13); затем следует взять столько членов в этом ряду, чтобы соответствующие отклонения не превышали практически допустимых границ точности задания нагрузки.

Обыкновенно достаточны для этого первые 2—6, реже 10 членов соответствующих рядов. Таким образом, в дальнейшем будем молча принимать, что наши ряды заменены конечными суммами.

§ 7. Движение стержня под влиянием подвижного груза

Чтобы проиллюстрировать развитый выше метод на некоторых примерах, я исследую простейшие и наиболее интересные случаи.

Пример. *Прямой постоянного поперечного сечения (т. е. „призматический“) стержень свободно оперт на обоих своих*

концах и подвержен действию точечного груза, движущегося равномерно. Пусть скорость движения будет a , а груз представлен силой P . Требуется определить вынужденные колебания стержня.

Сначала выведем общие формулы для стержня, опертого на обоих концах, а затем применим их к рассматриваемому примеру.

Граничные условия в этом случае таковы: при $x=0$ должно быть $z=0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$; при $x=l$ должно быть $z=0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ для любого значения второй переменной t . Соответственно этим граничным условиям следует определить нормальные функции.

Так как $X = C_1 \operatorname{ch} mx + \operatorname{sh} mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx$, то граничные условия приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 - C_3 &= 0 \\ C_1 \operatorname{ch} ml + C_2 \operatorname{sh} ml + C_3 \cos ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_1 \operatorname{ch} ml + C_2 \operatorname{sh} ml - C_3 \cos ml - C_4 \sin ml &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

откуда вытекает $C_1=0$ и $C_3=0$; система (a) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} C_2 \operatorname{sh} ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_2 \operatorname{sh} ml - C_4 \sin ml &= 0 \end{aligned}$$

Определитель этой системы должен равняться нулю; вместе с тем он составляет $\Delta = \operatorname{sh} ml \sin ml$.

Чтобы избежать ненужных переходов от мнимых величин к вещественным, следует лишь заменить уравнение $\Delta=0$ вытекающим из него

$$\sin ml = 0 \quad (q')$$

тогда $C_2=0$, а C_4 остается произвольным.

Равенство (q') является трансцендентным уравнением, отвечающим граничным условиям и определяющим значения постоянных m . Отсюда следует

$$m_k = \frac{k\pi}{l} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Отрицательные значения целого числа k не следует рассматривать, так как соответствующие им члены объединены с теми, которые отвечают положительным значениям k .

Следовательно, нормальные функции будут

$$X_k = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Таким образом, формулы (19)–(21) определяют следующее общее решение проблемы колебаний стержня, опертого на обоих концах, для которого функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляют начальное возмущение, а $F(x, t)$ — действующую силу:

$$\begin{aligned} z = & \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \\ & + \frac{2l}{\pi^2 b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx - \\ & - \frac{1}{qS} \cdot \frac{2l}{\pi^2 b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} \int_0^t dt \int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} dx + \\ & + \frac{1}{qS} \cdot \frac{2l}{\pi^2 b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} \int_0^t dt \int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} dx \quad (22) \end{aligned}$$

Чтобы применить это общее решение к нашему примеру, следует точечную силу P рассматривать как предельный случай силы, равномерно распределенной на коротком участке длиной λ , содержащем точку приложения груза P , и характеризующейся интенсивностью нагрузки $p = \frac{P}{\lambda}$.

Вслед за таким представлением необходимо определить функцию $F(x, t)$ таким образом:

$$F(x, t) = 0 \quad \text{в интервале от } x=0 \text{ до } x=a$$

$$F(x, t) = p = \frac{P}{\lambda} \text{ в интервале }^1 \text{ от } x = at - \frac{\lambda}{2} \text{ до } x = at + \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x, t) = 0 \quad \text{в интервале от } x = at + \frac{\lambda}{2} \text{ до } x = l$$

Подобное определение функции $F(x, t)$ позволяет легко выполнить соответствующие квадратуры и получить:

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} p \int_{at - \frac{\lambda}{2}}^{at + \frac{\lambda}{2}} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2p}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi \left(at - \frac{\lambda}{2}\right)}{l} - \cos \frac{k\pi \left(at + \frac{\lambda}{2}\right)}{l} \right] = \\ &= \frac{4p}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}$$

Тогда формула (22) после подстановки $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$ приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} z = z_2 &= \frac{4}{\pi^3} \cdot \frac{pl^4}{qS} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2}\right) - \\ &- \frac{4pl^4}{\pi^3qS} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k^2\pi^2bt}{l^2} - \\ &- \frac{4}{\pi^4} \cdot \frac{pl^5}{qS} \cdot \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \cos \frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \end{aligned} \quad (23)$$

Можно еще более легким путем получить последнюю формулу, если использовать непосредственно уравнения (16) и (17). Действительно, в нашем случае уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + \frac{\pi^4 k^4}{l^4} b^2 T_k = \frac{1}{qS} \cdot \frac{4p}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2}\right) \quad (24)$$

¹ Вместо величин $at - \frac{\lambda}{2}$ и $at + \frac{\lambda}{2}$ можно принять $at - \epsilon$ и $at + (\lambda - \epsilon)$, где ϵ только должно иметь положительное значение, меньшее λ . Результат остается независимым от ϵ .

откуда без труда получаем частный интеграл S_k :

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{qS} \cdot \frac{4p}{k\pi} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l}}{\frac{\pi^4 k^4}{l^4} b^2 - \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2}} \sin \frac{k\pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{qS} \cdot \frac{4pl^4}{\pi^3 k^3} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

и если в общем интеграле произвольные постоянные G_k и H_k определять таким образом, чтобы при t , равном нулю, T_k и $\frac{dT_k}{dt}$ также будут равны нулю, то получим:

$$G_k = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{pl^4}{qS} \cdot \frac{1}{k^3} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2}$$

и

$$H_k = -\frac{4}{\pi^3} \cdot \frac{pl^5 a}{qSb} \cdot \frac{1}{k^4} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \cos \frac{k\pi}{2l}}{k^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2}$$

после чего формулы (15) и (17) приводят к указанному выше виду функции z_2 .

Следовательно, формула (23) дает решение задачи о вынужденных колебаниях стержня под влиянием нагрузки, равномерно распределенной на коротком участке длиной λ , и перемещающейся вдоль стержня со скоростью a .

Формула (23) предполагает, что ни одно из выражений, стоящих в знаменателе, не может быть равно нулю:¹

$$k^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2 \neq 0$$

Если существует такое целое число $k = k_1$, что

$$k_1^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2 = 0 \quad (26)$$

¹ Появление этих бесконечных коэффициентов вызвано, как известно, тем, что наша задача поставлена без учета трения. Это было сделано краткости ради и при введении членов, учитывающих трение, можно разрешить проблему без дальнейших трудностей тем же методом.

то необходимо члены, отвечающие значению $k = k_1$, заменить следующими:

$$-\frac{1}{qS} \cdot \frac{2pl \sin \frac{k_1 \pi \lambda}{l}}{k_1^2 \pi^2 a} t \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \cos \frac{k_1 \pi}{l} \left(at + \frac{\lambda}{2} \right) + \\ + \frac{1}{qS} \cdot \frac{2pl^2}{k_1^3 \pi^3 a^2} \sin \frac{k_1 \pi \lambda}{2l} \cos \frac{k_1 \pi \lambda}{2l} \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_1 \pi at}{l}$$

как это и следует из (24), и все суммы распространить от $k=1$ до $k=\infty$, исключив $k=k_1$.

Формула (26) говорит об известном синхронизме между периодом свободного колебания стержня и интервалом времени, в течение которого груз пробегает всю длину стержня. Число простых колебаний, отвечающее величине $k=k_1$, будет

$$n_1 = \frac{\pi^2 k_1^2 b}{\pi l^2} = \frac{\pi k_1^2 b}{l^2}$$

и соответствующий полупериод колебания составит

$$\tau_1 = \frac{l^2}{\pi k_1 b}$$

Время, которое требуется нагрузке, чтобы пройти длину l , равняется

$$T = \frac{l}{a}$$

Таким образом видно, что соотношение (26) равнозначно следующему:

$$T = k_1 \tau_1 \quad (27)$$

Последнему можно придать и другую наглядную форму: если через τ обозначить половину периода основного тона ($k=1$) стержня, то получим:

$$\tau_1 = \frac{\tau}{k_1^2}$$

и формула (27) принимает следующий вид:

$$T = \frac{\tau}{k_1} \quad (27')$$

или

$$a = \frac{k_1 l}{\tau} \quad (27'')$$

Для большинства случаев, встречающихся в технике, значение (27'') скорости a , при котором указанный выше резонанс может иметь место, весьма велико и на практике не встречается.

§ 8

Теперь перейдем к рассмотрению точечной нагрузки. Для этого следует лишь в формулу (23) подставить значение

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

и перейти к пределу $\lambda = 0$.

Тогда получаем:

$$\lim p \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \lim \frac{P}{\lambda} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \frac{P}{2l} k\pi,$$

и формула (23) представится в виде

$$\begin{aligned} z_2 = & \frac{2Pl^3}{\pi^2 qS} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2 (\pi^2 b^2 k^2 - a^2 l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} - \\ & - \frac{2Pl^4 a}{\pi^3 qSb} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3 (k^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2 \pi^2 bt}{l^2} \end{aligned} \quad (28)$$

где в случае указанного выше резонанса оба члена, отвечающие значению $k = k_1$, необходимо заменить следующим выражением:

$$-\frac{1}{qS} \cdot \frac{Pl}{k_1 \pi a} t \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \cos \frac{k_1 \pi at}{l} + \frac{1}{qS} \cdot \frac{Pl}{k_1 \pi^2 a^2} \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_1 \pi at}{l}$$

а соответствующие суммы распространить от $k=1$ до $k=\infty$ за исключением $k = k_1$.

§ 9. Обсуждение полученных результатов

Два замечания тотчас же напрашиваются у практика:

1°. Если нагрузка P движется вдоль стержня весьма *медленно*, то она, очевидно, будет действовать *статически*, и в каждый

момент формула (28) должна представлять форму стержня, соответствующую статической нагрузке. Это должно быть проверено.

2°. При разработке проблемы учитывалось лишь влияние веса стержня, а не инерционность ее.

При инерционном действии давление, которое производит груз на стержень, зависит от ускорения его точки приложения. Это влияние должно быть исследовано.

§ 10

Чтобы ответить на первый поставленный вопрос, исследуем предварительно соответствующий пример.

Предположим, что в момент времени t груз P дошел до середины стержня, так что $\frac{at}{l} = \frac{1}{2}$.

Рассчитаем теперь прогиб стержня в точке приложения силы P .

Известно, что этот статический прогиб равен $\frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$, и следует теперь проверить, определит ли формула (28) ту же величину прогиба. Чтобы применить формулу (28), нужно положить в ней величину a бесконечно малой и принять

$$\frac{at}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}$$

Тогда формула (28) дает

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^2 qS} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4 \pi^2 b^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

или

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4}$$

так как $b^2 = \frac{EI}{qS}$ и все те члены, для которых k является четным числом, исчезают вследствие того, что при этом $\sin \frac{k\pi}{2}$ будет равен нулю.

Известно, однако, что сумма

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Поэтому в действительности, как это и должно было быть, получаем:

$$z_2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

Тот же метод следует применять теперь к *общему случаю*.

Таким образом примем, что в рассматриваемый момент времени t груз находится в точке C , соответствующей абсциссе $x=c$; тогда $at=c$. Уравнения упругой линии в этом случае будут, как известно, следующими:¹

$$\zeta_1 = \frac{P}{EI} \cdot \frac{c(l-c)}{cl} \left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c} \right]$$

для участка от $x=0$ до $x=c$ и

$$\zeta_2 = \frac{P}{EI} \cdot \frac{c(l-c)}{cl} \left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{(l-c)} \right]$$

для участка от $x=c$ до $x=l$.

Если в формуле (28) величину a рассматривать как бесконечно малую, а at положить равным c , то получим:

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{qSb^2\pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (29)$$

Необходимо показать, что для интервала от $x=0$ до $x=c$ z_2 равно ζ_1 , а для интервала от $x=c$ до $x=l$ z_2 равно ζ_2 .

Для этого следует рассмотреть функцию $F(x)$, которая определяется следующим образом:

$$F(x) = \zeta_1 \text{ в интервале от } x=0 \text{ до } x=c$$

$$F(x) = \zeta_2 \text{ в интервале от } x=c \text{ до } x=l$$

¹ Jahrbuch der Hütte. Biegungselastizität. Fall 3.

и разложить ее в гармонический ряд; последний должен быть таким же, как в формуле (29).

Если положить

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

то найдем:

$$N_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Но согласно определению функции $F(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} N_k &= \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_0^c \zeta_1 \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \int_c^l \zeta_2 \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{Pc(l-c)}{EIcl} \cdot \left\{ \int_0^c \left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c} \right] \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_c^l \left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{l-c} \right] \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right\} \end{aligned}$$

и после проведения вычислений получаем:

$$N_k = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{l^3}{k^4\pi^4} \sin \frac{k\pi c}{l}$$

Следовательно, функция $F(x)$ будет представлена так:

$$F(x) = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{l^3}{\pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (29')$$

что при сравнении с формулой (29) показывает

$$z_2 = F(x)$$

так как

$$EI = b^2 q S$$

Последняя проверка для математика излишня, но технику она говорит значительно больше, чем строгое абстрактное исследование.

§ 11

Теперь поясним *второе замечание*.

Если бы нагрузка $F(x, t)$ непосредственно лежала на стержне, а материал стержня был бы настолько тверд, что он не испытывал бы каких-либо местных вдавливающих от действия груза, то уравнение движения приняло бы, согласно принципу Д'Аламбера, вместо (1) следующую форму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qS} F(x, t) \left[1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \quad (30)$$

где, как прежде, $F(x, t)$ — нагрузка, приходящаяся на единицу длины, и g — ускорение силы тяжести, а ось z принята вертикальной. Наличие члена

$$\frac{1}{qS} F(x, t) \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

вызывает при интегрировании нашего уравнения весьма большие трудности; однако в строительной практике этот член оказывает незаметное влияние.

Рассмотрим сначала пример, а именно *железнодорожные рельсы*.

Здесь нагрузкой служит давление колеса на рельс. Это давление можно считать распределенным как-то на весьма коротком участке длиной λ , в окрестности точки, где колесо соприкасается с рельсом.

Указанное давление составляет максимум 7000 кг, а остальные постоянные суть $I = 1037 \text{ см}^4$, $E = 2.250\,000 \text{ кг/см}^2$.

Вес рельса обычного профиля равен 33.4 кг на погонный метр; следовательно,

$$qS = \frac{33.4}{100} \cdot \frac{1}{981} = 0.00034$$

В качестве длины l можно принять расстояние между соседними шпалами — около 90 см. Таким образом, если принять за единицу

веса килограмм, а за единицу длины — сантиметр, то получим следующие численные величины:

$$b_2 = \frac{EI}{qS} = \frac{2.250000 \cdot 1037}{0.00034} = 6.86 \cdot 10^{12}$$

$$\frac{2PI^3}{qSb^2\pi^4} = \frac{2 \cdot 7000 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{1037 \cdot 2250000\pi^4} = 0.045$$

Таким образом, формула (28) показывает, что амплитуда колебаний в этом случае достигнет величины 0.5 мм.

Если скорость поезда была бы 108 км в час, то тогда

$$a = \frac{108 \cdot 1000 \cdot 100}{3600} = 3000 \frac{\text{см}}{\text{сек.}}$$

$$\frac{\pi a}{l} = \frac{3.14 \cdot 3000}{90} = 104$$

Ускорение $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ получит приблизительно значение $0.045 \cdot (104)^2 = 490$ и $\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ будет равно $\frac{1}{2}$, что показывает, что пренебрежение этим членом приведет к заметной ошибке.

Это и случилось бы, если бы вес вагона или локомотива передавался на колесо жестко. На практике так никогда не бывает: давление передается на осевые буксы через рессоры. Последние сконструированы таким образом, что при максимальной нагрузке в 7 т они поддаются приблизительно на 50 мм. Если учесть это обстоятельство, то придем к совсем другому заключению.

Основания рессор связаны с осевыми буксами так жестко, что они повторяют то же движение в вертикальной плоскости, что и точки соприкосновения колес с рельсами; сам же вагон связан с концами рессор, и его центр тяжести будет колебаться лишь настолько, насколько колеблются эти концы.

Если обозначить через P нагрузку, приходящуюся на каждую рессору, а через f статический прогиб рессоры, вызванный этой нагрузкой, то непосредственно получим, что период свободных колебаний груза P на рессоре составит

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

Если основания рессоры подвержены вынужденным колебаниям, то последние вызовут сопутствующие им вынужденные колебания груза P . Амплитуда этого сопутствующего колебания находится, как известно, в определенном отношении к амплитуде колебания основания рессор, а именно, мы имеем следующий результат: если вынужденные колебания основания рессоры состоят из суммы членов вида $h \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$, то колебания груза определяются суммой членов типа

$$h \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$$

Таким образом, амплитуды соответствующих отдельных колебаний находятся друг к другу в отношении

$$\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} = \frac{\frac{\tau^2}{T^2}}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}$$

В нашем случае имеем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{5}{981}} = 0.45 \text{ сек.}$$

Период τ тех членов сумм, входящих в формулы (28), которые содержат сомножитель

$$\sin \frac{k\pi at}{l}$$

будет

$$\tau = \frac{2l}{ak}$$

а для тех членов, которые характеризуются множителями

$$\sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}$$

имеем:

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{k^2\pi b}$$

Периоды τ и τ_1 приобретают свое наибольшее значение при $k=1$, а именно:

$$\tau = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 90}{3000} = 0.06 \text{ сек.}$$

и

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{\pi b} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 90}{\pi \sqrt{6.86} \cdot 10^8} = 0.0022 \text{ сек.}$$

Таким образом, видно, что в первом случае

$$\frac{\tau^2}{T^2} = \left(\frac{0.06}{0.45}\right)^2 = 0.018$$

а во втором

$$\frac{\tau_1^2}{T^2} = \left(\frac{0.0022}{0.45}\right)^2 = 0.000025$$

Эти результаты показывают, что только $\frac{1}{50}$ ускорения оснований рессор переносится на груз, т. е. что давление, которое оказывает колесо на рельс, отличается от веса не более, чем на 1%, т. е. что оно колеблется в пределах от $0.99 P$ до $1.01 P$.

К совершенно аналогичным результатам приходят при исследовании также остальных встречающихся на практике случаев, что может быть выполнено достаточно общим способом, при котором прогиб стержня и допустимое напряжение используются вместо других постоянных, характеризующих стержень. Можно удостовериться, что член

$$\frac{1}{gS} F(x, t) \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (31)$$

всегда соответствует практически незаметному изменению нагрузки $F(x, t)$; следовательно, эта нагрузка может рассматриваться как действующая сила. Если по каким-либо причинам хотят исследовать влияние этих изменений, то нужно лишь рассматривать приведенные выше результаты как первое приближение, а член (31) как возмущающую функцию и применить метод последовательного приближения вполне аналогично тому, как это делается в теоретической астрономии.

Прежде чем перейти ко второму примеру, рассмотрим еще более подробно влияние скорости груза для случая железнодорожных рельсов. Так как $b^2 = 6.86 \cdot 10^{12}$, то

$$b = 2.62 \cdot 10^6; \quad \frac{a}{b} = \frac{3000}{2.62 \cdot 10^6} = \frac{1}{870}$$

$$\frac{a^2 l^2}{\pi^2 b^2} = \frac{3000 \cdot 3000 \cdot 90 \cdot 90}{\pi^2 6.86 \cdot 10^{12}} = \frac{1}{940}$$

и

$$\frac{al}{\pi b} = \frac{1}{31}$$

Если написать формулу (28) в следующем виде

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{qSb^2\pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}\right)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} - \frac{2Pl^3}{qSb^2\pi^4} \cdot \frac{al}{\pi b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^5 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}\right)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} \quad (28')$$

то увидим, что сомножитель $1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}$ отличается от единицы меньше чем на $\frac{1}{940}$; следовательно, его можно заменить единицей, тем более, что величина b^2 известна не точнее, чем до $\frac{1}{1000}$ своего значения, так как изнашивание на $\frac{1}{20}$ мм верхней плоскости рельса изменяет момент инерции поперечного сечения больше чем на $\frac{1}{1000}$ его величины.

Второй член в формуле (28') составляет меньше чем $\frac{1}{30}$ первого и практически может не учитываться.

Если учесть, что $\frac{2}{\pi^4} = \frac{1}{48.7}$ и $b^2 qS = EI$, то можно написать приближенную формулу

$$z_2 = \frac{1}{48.7} \cdot \frac{Pl^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} \quad (32)$$

Если сравнить ее с формулой (29'), то увидим, что даже при наибольшей обычно скорости поезда, груз, действующий на рельсы, можно рассматривать как статический. Более подробное рассмотрение этого вопроса — дело чисто практического интереса и не относится к цели этой работы.

§ 12

Пример. Стержень, свободно опертый на обоих концах, подвержен действию периодической силы, приложенной в точке $x=c$.

Эта сила направлена параллельно оси z , и ее интенсивность выражается формулой $F=P \cdot \sin nt$.

Требуется определить вынужденные колебания стержня. Чтобы в этом случае можно было бы применить общую формулу (22), необходимо снова рассматривать сосредоточенную силу как предельный случай нагрузки, равномерно распределенной на бесконечно малом участке длиной λ .

Следовательно, сначала полагают

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

и представляют функцию $F(x, t)$, изображающую интенсивность нагрузки, определенной следующим образом:

$$F(x, t) = 0 \text{ в интервале от } x=0 \text{ до } x=c - \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x, t) = p \sin nt \text{ в интервале от } x=c - \frac{\lambda}{2} \text{ до } x=c + \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x, t) = 0 \text{ в интервале от } x=c + \frac{\lambda}{2} \text{ до } x=l$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= p \int_{c-\frac{\lambda}{2}}^{c+\frac{\lambda}{2}} \sin nt \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2pl}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N_k = \frac{P}{k\pi} \sin \frac{k\pi l}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt$$

после чего формула (22) или, проще, уравнения (15) и (16) дают следующий результат:

$$\begin{aligned} z_2 = & \frac{1}{qS} \cdot \frac{pl^4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4b^2 - n^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin nt - \\ & - \frac{1}{qS} \cdot \frac{pl^6n}{\pi^3b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4b^2 - n^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \end{aligned} \quad (33)$$

где принято, что нет такого целого числа k , которое обращало бы какой-либо из знаменателей в нуль.

Если же такое значение $k = k_1$ и существует, так что

$$k_1^4\pi^4b^2 - n^2l^4 = 0 \quad (34)$$

или

$$\frac{k_1^2\pi^2b}{l^2} = n,$$

то необходимо сумму обоих членов, отвечающих значению $k = k_1$, заменить следующими:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{qS} \cdot \frac{pl}{k_1\pi} \cdot \frac{\sin \frac{k_1\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k_1\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{2n} t \cos nt \sin \frac{k_1\pi x}{l} + \\ & + \frac{1}{qS} \cdot \frac{p}{k_1\pi} \frac{\sin \frac{k_1\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k_1\pi}{l} \left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{2n^2} \sin nt \sin \frac{k_1\pi x}{l} \end{aligned} \quad (35)$$

и исключить $k = k_1$ из числа значений k , на которые распространяются суммы, входящие в формулу (33).

Соотношение (34) свидетельствует о синхронизме периода изменения силы с периодом одного из свободных колебаний, которое может совершать стержень, или, иначе говоря, с одним из тонов, которые отвечают стержню.

Формула (35) свидетельствует об известном явлении резонанса, которое имеет место при указанном синхронизме. Перейдем теперь к предельному случаю $\lambda=0$.

Непосредственно получаем:

$$z_2 = \frac{1}{qS} \cdot \frac{Pl^3}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{k\pi c}{l}}{k^4 \pi^4 b^2 - n^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin nt - \\ - \frac{1}{qS} \cdot \frac{Pl^5}{2\pi^2} \cdot \frac{n}{b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi c}{l}}{k^4 \pi^4 b^2 - n^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2 \pi^2 b}{l^3} t \quad (36)$$

Только в случае синхронизма следует заменить сумму двух членов, соответствующих коэффициенту $k=k_1$, следующей:

$$- \frac{1}{pS} \cdot \frac{P}{4l} \cdot \frac{1}{n} t \sin \frac{k_1 \pi c}{l} \cos nt \sin \frac{k_1 \pi x}{l} + \\ + \frac{1}{qS} \cdot \frac{P}{4l} \cdot \frac{1}{n^2} \sin \frac{k_1 \pi c}{l} \sin nt \sin \frac{k_1 \pi x}{l}$$

Здесь также ясно виден эффект резонанса, однако при этом замечаем, что члены, отвечающие значению $k=k_1$, выпадают, если сила приложена в соответствующей узловой точке, и тогда

$$\frac{k_1 c}{l} = \text{целому числу}$$

и

$$\sin \frac{k_1 \pi c}{l} = 0$$

Эти примеры показывают, как можно применить развитый метод; свободно опертый стержень рассматривался здесь только для простоты расчетов.

Другие случаи также не вызывают трудностей. Практические приложения исследования действия подвижной силы в железнодорожном строительстве и при изучении вибрации кораблей не относятся к предмету и цели этой статьи и будут опубликованы в „Сборнике Института путей сообщения“.

Морская Академия в Санкт-Петербурге,
Зима 1904/1905 г.



НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КРЕШЕРАХ И ИНДИКАТОРАХ

Года три тому назад мне пришлось принять участие в выработке приборов, предназначенных для определения давления, которое имеет место при минном взрыве в различных расстояниях от центра его.

С этой целью в научно-технической лаборатории Морского ведомства производились некоторые предварительные испытания обычно применяемых для таких определений крешеров и индикаторов давления. Во многих случаях эти испытания приводили к противоречивым результатам, требовавшим объяснения, ввиду чего мною тогда же были произведены некоторые теоретические исследования, исходной точкой которых служила известная работа Sarrau и Vieille в „Mémorial des Poudres et Salpêtres“, t. I.

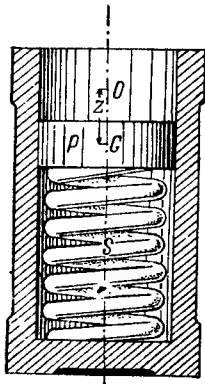
В настоящее время намечается продолжение подобных же опытов, вследствие чего я решил привести свои прежние соображения в систему и, проделав наново относящиеся сюда выкладки, напечатать эту работу.

§ 1. Мы начнем наше рассмотрение с идеально простых случаев: 1) индикатора, у которого масса пружины весьма мала по сравнению с массой поршня, и 2) крешера, у которого масса сжимаемого столбика ничтожна.

Под словом *индикатор* мы будем разумеать такой прибор, служащий для записи давления, поршень которого опирается на *вполне упругую* пружину и по прекращении давления возвращается к первоначальному своему положению.

Под словом *крешер* мы будем разумеать такой прибор, служащий для определения наибольшей величины давления, на него действовавшего, поршень которого опирается на металлический столбик, обжимаемый за *предел упругости* и сохраняющий полученное наибольшее сжатие и по прекращении давления.

Пусть фиг. 1 представляет схему служащего для записи давления индикатора: P — поршень его, S — пружина. Пусть площадь поршня есть A ; давление, на него действующее, — p ; вес поршня — P .



Фиг. 1.

Давление p , действующее на поршень, обыкновенно весьма быстро изменяется с течением времени t , так что

$$p = f(t) \quad (1)$$

Назначение прибора и состоит в том, чтобы найти эту функцию $f(t)$, получив запись перемещения z поршня в функции времени t .

Примем ось поршня и цилиндра, в коем он движется, за ось z , обозначим через l начальную длину пружины, через l_1 — ее длину в момент t так что ее сжатие, представляющее вместе с тем и перемещение поршня, равно $l - l_1 = z$, тогда противодействие, встречаемое поршнем от пружины, выразится формулой:

$$R = k \frac{l - l_1}{e} = k \frac{z}{l} \quad (2)$$

и, следовательно, уравнение движения поршня, или, точнее говоря, центра тяжести его G будет

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = Af(t) - \frac{kz}{l} \quad (3)$$

Начальные же условия таковы:
при $t=0$ должно быть

$$z = 0 \text{ и } \frac{dz}{dt} = 0 \quad (4)$$

Написав уравнение (3) в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z = \frac{Ag}{P} f(t) \quad (3')$$

где

$$n^2 = \frac{kg}{lP} \quad (3'')$$

имеем его общий интеграл:

$$z = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{Ag}{Pn} \left\{ \sin nt \int_a^t f(\xi) \cos n\xi d\xi - \cos nt \int_a^t f(\xi) \sin n\xi d\xi \right\}$$

причем C_1 и C_2 — произвольные постоянные, a — какое угодно заданное число.

Если взять $a=0$, то при начальных условиях (4) будет

$$C_1 = C_2 = 0$$

и общий интеграл уравнения (3) принимает простейшую форму:

$$z = \frac{Ag}{Pn} \left\{ \sin nt \int_0^t f(\xi) \cos n\xi d\xi - \cos nt \int_0^t f(\xi) \sin n\xi d\xi \right\} \quad (5)$$

или что то же

$$z = \frac{Al}{k} n \int_0^t f(\xi) \sin (nt - n\xi) d\xi \quad (5')$$

Заметив, что при $t=0$ и $f(t)=0$, так как лишь с этого момента начинает действовать постепенно возрастающее давление, мы из формулы (5') имеем:

$$z = \frac{Ag}{Pn} \left\{ \left[\frac{1}{n} f(\xi) \cos (nt - n\xi) \right]_0^t - \frac{1}{n} \int_0^t f'(\xi) \cos (nt - n\xi) d\xi \right\}$$

или

$$z = \frac{Al}{k} f(t) - \frac{Al}{k} \int_0^t f'(\xi) \cos (nt - n\xi) d\xi \quad (6)$$

В силу формулы (2) величина $\frac{Al}{k}f(t)$ представляет как раз то сжатие, которое должна бы иметь пружина, или то смещение поршня, которое должно бы иметь место в момент t , если бы давление действовало „статически“.

Величина

$$\epsilon = -\frac{Al}{k} \int_0^t f'(\xi) \cos n(t-\xi) d\xi \quad (7)$$

представляет „погрешность“ показаний прибора, происходящую от изменения давления и зависящую, как видно, от быстроты этого изменения.

§ 2. При действии минного взрыва общий ход изменения давления, т. е. вид функции $f(t)$, может быть представлен графически такой кривой, как на фиг. 2, т. е. давление сперва весьма быстро возрастает и, достигнув в момент T_1 наибольшей величины, затем сравнительно медленно убывает, обращаясь практически в нуль к некоторому моменту T_2 ; при этом промежуток времени T_1 значительно меньше T_2 .

Подобный же ход имеет явление и при взрыве небольшого количества вещества в пробной бомбочке, только здесь отношение промежутков T_2 и T_1 еще больше, так что кривая имеет приблизительно такой вид, как на фиг. 3, так что давление в продолжение промежутка времени от T_1 до T_3 — причем T_3 велико по сравнению с T_1 — остается практически постоянным.

Прежде чем рассматривать формулы (5') и (7) для общего вида функции $f(t)$, сделаем частный пример, взяв функцию, ход которой подходит к вышеуказанному, и притом такую, для которой нужные нам выражения вычислялись бы просто. Разбор такого частного примера даст указания и для общего случая.

Подходящий вид функции $f(t)$ следующий:

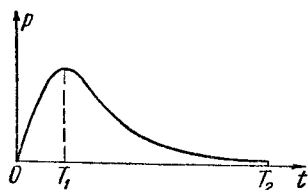
$$f(t) = a \sin \frac{\pi t}{2T_1} \quad (8)$$

для промежутка от $t=0$ до $t=T_1$ и

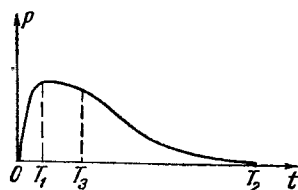
$$f(t) = e^{-h \frac{t-T_1}{T_2}} \left\{ 1 + \frac{h(t-T_1)}{T_2} \right\} \quad (9)$$

для промежутка, когда $t > T_1$, при этом h — настолько большая величина, что с принятой для расчетов степенью точности $(1+h)e^{-h}$ могло бы быть пренебрегаемо.

При вычислении входящего в формулу (5') интеграла надо обратить внимание на значение t и, пока t не превосходит величины T_1 , брать вместо $f(t)$ его значение (8), а затем значение (9).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Итак, имеем:

$$\int_0^t f(\xi) \sin(nt - n\xi) d\xi = a \int_0^t \sin n_1 \xi \cdot \sin(nt - n\xi) d\xi \quad \text{если } t \leq T_1$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\xi) \sin(nt - n\xi) d\xi &= a \int_0^{T_1} \sin n_1 \xi \cdot \sin(nt - n\xi) d\xi + \\ &+ a \int_{T_1}^t e^{-h \frac{\xi-T_1}{T_2}} \left(1 + h \frac{\xi-T_1}{T_2} \right) \sin(nt - n\xi) d\xi \end{aligned}$$

если $t > T_1$, причем для сокращения письма сделано $n_1 = \frac{\pi}{2T_1}$.

Таким образом, найдя интегралы

$$\int_0^t \sin n_1 \xi \sin(nt - n\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_0^t \cos [nt - (n + n_1)\xi] d\xi -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \cos [nt - (n - n_1) \xi] d\xi = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n + n_1} \sin (nt - (n + n_1) \xi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{n - n_1} \sin (nt - (n - n_1) \xi) \right]_0^t = \frac{n}{n^2 - n_1^2} \sin n_1 t - \frac{n_1}{n^2 - n_1^2} \sin nt$$

получаем соответствующее значение z для $t \leq T_1$:

$$z = \frac{Al}{k} a \left\{ \frac{n^2}{n^2 - n_1^2} \sin n_1 t - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \sin nt \right\} \quad (10)$$

Точно так же, найдя второй интеграл, получим выражение для z для значений времени, больших T_1 .

Но проще обратиться к самому уравнению (3') и, сделав в нем $t - T_1 = x$, написать его так:

$$z'' + n^2 z = a \frac{Ag}{P} e^{-bx} (1 + bx) \quad (11)$$

причем

$$b = \frac{h}{T_2}$$

начальные же условия следуют из уравнения (10), именно: при $t = T_1$ или $x = 0$ должно быть

$$z = \frac{Ala}{k} \left(\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \sin n T_1 \right)$$

$$z' = -\frac{Ala}{k} \cdot \frac{n^2 n_1}{n^2 - n_1^2} \cos n T_1$$

Из уравнения (11) следует

$$z = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + \frac{Al}{k} a \frac{n^2}{b^2 + n^2} e^{-bx} \left[\frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} + bx \right]$$

В силу начальных условий

$$C_1 = \frac{Ala}{k} \left[\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} - \frac{n^2}{b^2 + n^2} \cdot \frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \sin n T_1 \right]$$

$$C_2 = \frac{Ala}{k} \left[\frac{2b^3 n}{(b^2 + n^2)^2} - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \cos n T_1 \right]$$

Таким образом, для значений $t > T_1$ будет

$$\begin{aligned} z = & \frac{Ala}{k} \left[\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} - \frac{n^2}{b^2 + n^2} \cdot \frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} \right] \cos n(t - T_1) + \\ & + \frac{Ala}{k} \cdot \frac{2b^3n}{(b^2 + n^2)^2} \sin n(t - T_1) - \frac{Ala}{k} \cdot \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \sin nt + \\ & + \frac{Ala}{k} \cdot \frac{n^2}{b^2 + n^2} e^{-\mu(t-T_1)} \left[\frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} + c(t - T_1) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Сделаем в формулах (10) и (12)

$$n = \frac{2\pi}{\tau}; \quad n_1 = \frac{\pi}{2T_1} = \frac{2\pi}{\tau_1}$$

так что

$$T_1 = \frac{1}{4} \tau_1$$

и положим для простоты, что $h = 2\pi$, тогда $b = \frac{2\pi}{T_2}$ и будет

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{n^2 - n_1^2} &= \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2}; \quad \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} = \frac{\tau\tau_1}{\tau_1^2 - \tau^2}; \quad \frac{n^2}{b^2 + n^2} = \frac{T_2^2}{T_2^2 + \tau^2} \\ \frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} &= \frac{3\tau^2 + T_2^2}{T_2^2 + \tau^2} \quad \text{и} \quad \frac{2b^3n}{(b^2 + n^2)^2} = \frac{2T_2\tau^3}{(T_2^2 + \tau^2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Как видно, все эти величины зависят только от отношений

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \lambda \quad \text{и} \quad \frac{\tau}{T_2} = \mu$$

Вводя эти величины, мы напомним формулы (10) и (12) так, обозначив $\frac{Ala}{k}$ через c :

$$z = c \left(\frac{1}{1 - \lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \quad (10')$$

¹ Величина $e^{-2\pi} = \frac{1}{535}$, значит $e^{-h}(1+h)$ при $h = 2\pi$ составляет около $\frac{1}{70}$.

и

$$\begin{aligned}
 z = & c \frac{1}{1+\mu^2} e^{-\mu(t-T_1)} \left(\frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} + b(t-T_1) \right) - c \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \\
 & + c \frac{2\mu^3}{(1+\mu^2)^2} \sin \frac{2\pi(t-T_1)}{\tau} + \\
 & + c \left(\frac{1}{1-\lambda^2} - \frac{1}{1+\mu^2} \cdot \frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} \right) \cos \frac{2\pi(t-T_1)}{\tau} \quad (12')
 \end{aligned}$$

причем формулой (10) надо пользоваться, пока $t \leq T_1$, и формулой (12) для $t \geq T_1$.

Заметим, что при $\lambda=1$, т. е. когда $\tau=\tau_1=4T_1$, формула (10') принимает вид

$$z = \frac{1}{2} c \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{\pi c}{\tau} t \cos \frac{2\pi t}{\tau} \quad (10'')$$

и формула (12') — вид

$$\begin{aligned}
 z = & c \frac{1}{1+\mu^2} e^{-\mu(t-T_1)} \left\{ \frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} + b(t-T_1) \right\} - \frac{2\mu^3}{(1+\mu^2)^2} c \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \\
 & - \frac{1+3\mu^2}{(1+\mu^2)^2} c \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{\pi}{4} c \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{c}{2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (12'')
 \end{aligned}$$

§ 3. При $\lambda=0$ и $\mu=0$ предыдущие формулы принимают вид

$$\begin{aligned}
 z &= c \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} & \left(\text{для } t \leq \frac{1}{4} \tau_1 \right) \\
 z &= c e^{-\mu(t-T_1)} (1 + b(t-T_1)) & \text{для } t \geq \tau_1
 \end{aligned} \quad (13)$$

т. е. величина z будет пропорциональна давлению p , так что

$$z = \frac{Al}{k} f(t) \quad (14)$$

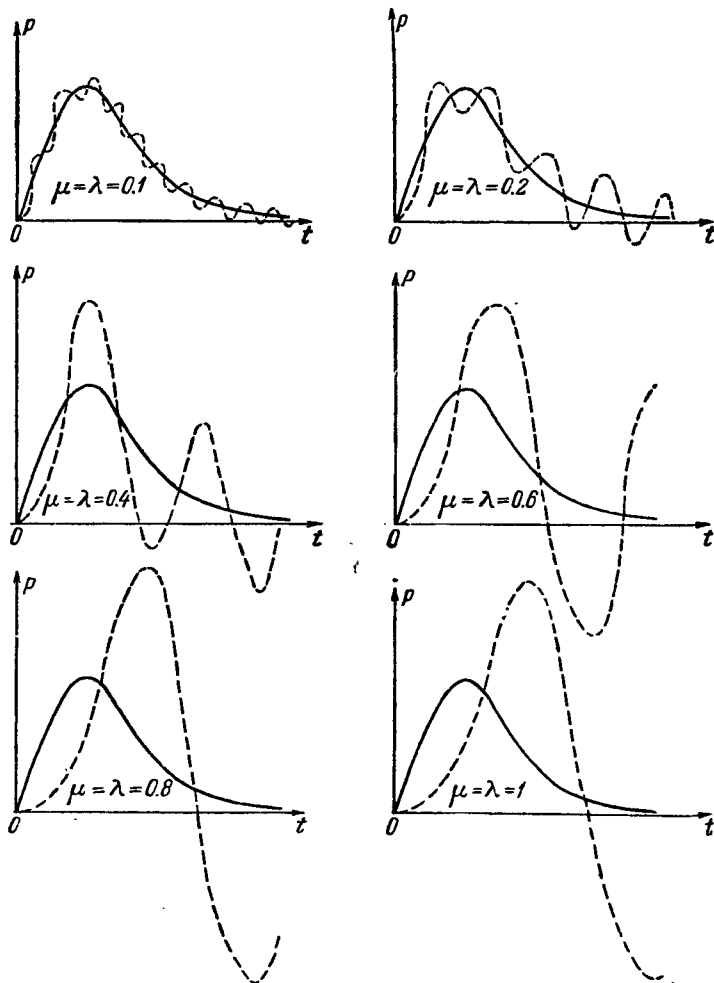
и, следовательно, индикатор дает истинную запись давления.

Чтобы представить наглядно влияние величин λ и μ на погрешность показаний индикатора, составлены прилагаемые чертежи (фиг. 4), в которых сделано

$$\lambda = \mu$$

и затем взято

$$\lambda = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10} \text{ и } 1$$



Фиг. 4.

Эти чертежи показывают, что уже при $\lambda = \frac{1}{10}$ погрешность достигает заметной величины, при значениях же λ , превышающих $\frac{2}{10}$, показания прибора совершенно не соответствуют ходу явления.

Отношение

$$\lambda = \frac{\tau}{\tau_1}$$

Здесь

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{IP}{kg}} \quad (15)$$

представляет период свободных колебаний поршня на своей пружине.

Формуле (15) можно придать другой вид: сделаем

$$L = \frac{IP}{k}$$

тогда L представляет величину сжатия, вызываемого в пружине нагрузкой, равной весу поршня; τ есть период такого маятника, длина коего L .

Величина τ_1 есть *учетверенная* продолжительность *нарастания* давления.

§ 4. После этого разбора частного примера видно, что пользование индикатором, для которого отношение λ более $\frac{1}{10}$, не может дать надежных результатов; остается рассмотреть в общем виде предел погрешности в показании прибора при произвольном виде функции $f(t)$, подверженном лишь некоторым ограничениям.

Сделаем относительно этой функции следующие предположения:

1) при $t=0$ $f(t)=0$;

2) от $t=0$ до $t=T_1=\frac{1}{4}\tau_1$ функция $f(t)$ возрастает, так что $f'(t)>0$ и при $t=T_1$ величина $f'(T_1)=0$;

3) при $t>T_1$ функция $f(t)$ убывающая и $f'(t)<0$. Причем $f(t)$ и $f'(t)$ при неопределенном возрастании t асимптотически приближаются к нулю.

Формула (7)

$$\varepsilon = -\frac{Al}{k} \int_0^t f'(\xi) \cos(nt - n\xi) d\xi$$

сводит определение пределов погрешности к вычислению интеграла

$$\int_0^t f'(\xi) \cos(nt - n\xi) d\xi = A_1 \cos nt + B_1 \sin nt$$

где

$$A_1 = \int_0^t f'(\xi) \cos n\xi d\xi; \quad B_1 = \int_0^t f'(\xi) \sin n\xi d\xi$$

Положим сперва, что $t \leq T_1$, так что $f'(\xi) > 0$, и найдем предел, которого не превзойдет величина $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$.

Начнем с величины A_1 . Так как t значительно больше τ , то положим, что

$$t = \frac{\tau}{4} + k \frac{\tau}{2} + t_1$$

причем $t_1 < \frac{\tau}{2}$ и k есть целое число. Тогда можем написать равенство

$$A = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_k + H$$

причем

$$I_0 = \int_0^{\frac{\tau}{4}} f'(\xi) \cos n\xi d\xi; \quad I_1 = \int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{4} + \frac{\tau}{2}} f'(\xi) \cos n\xi d\xi$$

и т. д.

$$H = \int_{\frac{\tau}{4} + k \frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{4} + k \frac{\tau}{2} + t_1} f'(\xi) \cos n\xi d\xi$$

В каждом из промежутков $\cos n\xi$ сохраняет свой знак, так же как и $f'(\xi)$; поэтому имеем равенство

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\frac{\tau}{4} + (i-1)\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{4} + i\frac{\tau}{2}} f'(\xi) \cos n\xi d\xi = (-1)^i \int_0^{\frac{\tau}{2}} f' \left(\frac{\tau}{4} + (i-1)\frac{\tau}{2} + x \right) \sin \frac{2\pi x}{\tau} dx = \\ &= (-1)^i f'(x_i) \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \frac{2\pi x}{\tau} dx = (-1)^i f'(x_i) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = (-1)^i \frac{2}{\pi} a_i \end{aligned}$$

причем x_i есть некоторое среднее значение между пределами интеграла, так что

$$\frac{\tau}{4} + (i-1)\frac{\tau}{2} < x_i < \frac{\tau}{4} + i\frac{\tau}{2}$$

Произведение

$$\frac{\tau}{2} f'(x_i) = a_i$$

представляет изменение давления за промежуток времени $\frac{\tau}{2}$.

Таким образом, мы имеем равенство

$$A = \frac{1}{\pi} a_0 - \frac{2}{\pi} a_1 + \frac{2}{\pi} a_2 - \dots \pm \frac{2}{\pi} a_k \mp \frac{2}{\pi} a_{k+i} \eta$$

причем $\eta < 1$.

Совершенно подобным же образом получим:

$$B = \frac{2}{\pi} a_0 - \frac{2}{\pi} a_1 + \frac{2}{\pi} a_2 - \dots \pm \frac{2}{\pi} a_k \mp \frac{2}{\pi} a_{k+1} \eta_1$$

Отсюда следует, что как A , так и B по абсолютной величине не превышают наибольшего из членов, входящих в выражение их, если только число таких наибольших членов один, что имеет место, когда кривая $f(t)$ на рассматриваемом протяжении имеет не более

одной точки перегиба, что мы и предположим. Так как наибольшее абсолютное значение ε есть $\sqrt{A^2 + B^2}$, то видно, что

$$|\varepsilon| \leq a \frac{2}{\pi} \sqrt{2} \frac{Al}{k} \quad (*)$$

где a есть наибольшее из чисел в ряде для B , иначе приближенно

$$|\varepsilon| < a \frac{Al}{k} \quad (**)$$

т. е. погрешность показания индикатора не превосходит величины наибольшего изменения давления за промежуток времени, равный полупериоду свободного колебания поршня индикатора на пружине его.

Совершенно так же увидим, что этот результат сохраняется и для нисходящей ветви кривой $f(t)$.

Полученный вывод с ясностью указывает, чем руководствоваться при проектировании индикатора для записи давления, и объясняет несогласия их показаний, когда прибор применен для записи такого давления, нарастание которого совершается слишком быстро для данного прибора.

§ 5. Формула (5) указывает на возможность получать показания прибора, пропорциональные импульсу давления, т. е. интегралу

$$\int_0^T f(\xi) d\xi$$

где T есть полная продолжительность действия давления.

В самом деле положим, что величина n весьма мала, иными словами, отношение $\frac{T}{\tau}$ весьма малое; тогда, заметив, что для значений $t > T$ $f(t) = 0$, имеем:

$$\int_0^t f(\xi) \cos n\xi d\xi = \int_0^T f(\xi) \cos n\xi d\xi = \cos nT_1 \int_0^T f(\xi) d\xi$$

и

$$\int_0^T f(\xi) \sin n\xi d\xi = \int_0^T f(\xi) \sin n\xi d\xi = \sin nT_1 \int_0^T f(\xi) d\xi$$

причем

$$0 < T_1 < T$$

Если величина $nT_1 = 2\pi \frac{T_1}{\tau}$ настолько мала, что $\cos nT_1$ можно считать равным 1 и $\sin nT_1$ ничтожно малым, то формула (5) примет вид

$$z = \frac{Ag}{Pn} \sin nt$$

где

$$I = \int_0^T f(\xi) d\xi$$

Значит, наибольшая величина z будет

$$Z_{\max} = \frac{Ag}{Pn} I$$

или иначе

$$Z_{\max} = \frac{Al}{k} n \quad I = \frac{Al}{k} \sqrt{\frac{kg}{lP}} I \quad (16)$$

Погрешность определения величины I будет зависеть от того, в какой мере мало значение $\sin nT_1$. Если $nT < \frac{1}{20}$, иначе отношение $\frac{T}{\tau}$ не больше $\frac{1}{120}$, то $\sin nT_1 < 0.05$ и, значит, величина импульса может быть получена с точностью до 5%.

§ 6. Выше рассмотрен индикатор, у которого пружина имеет массу, ничтожно малую по сравнению с массой поршня. Это предположение близко к истине для индикаторов, предназначенных для записи импульса, но для индикатора с весьма малым периодом колебаний надо иметь легкий поршень и жесткую пружину, и тогда наше допущение часто уже не имеет места. Отсюда является необходимость рассмотреть и этот случай.

В 18-й тетради „Журнала Политехнической школы“ („Journal de l'Ecole Polytechn.“, cahier 18) находится мемуар Пуассона, имеющий следующее общее заглавие: „Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes“. Последние пять параграфов этого мемуара (§§ 30—35) посвящены рассмотрению „движения тяжелого тела, подвешенного к концу растяжимой нити“.

Ясно, что наша задача находится в самой тесной связи с задачей Пуассона, отличаясь от нее лишь тем, что на подвешенное тело (поршень) действует внешняя переменная сила. В нашем изложении мы применим к решению этой задачи общий прием для решения подобного рода вопросов математической физики.

Примем точку закрепления или неподвижную опору пружины за начало координат и направим ось x по оси пружины.

Перемещение точки пружины, соответствующей абсциссе x , обозначим через u ; тогда перемещение точки, соответствующей абсциссе $x + dx$, будет $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$; относительное удлинение в рассматриваемом месте есть $\frac{\partial u}{\partial x}$ и натяжение $k \frac{\partial u}{\partial x}$.

Таким образом, на рассматриваемый элемент действуют силы

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } +k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right)$$

обозначая массу погонной единицы длины пружины через q , видим, что масса рассматриваемого элемента есть $q dx$. Ускорение его есть $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и, значит, уравнение движения

$$q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (17)$$

или, полагая

$$\frac{k}{q} = b^2 \quad (17')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (17'')$$

если только на пружину никаких внешних сил не действует.

Если же на пружину действует внешняя сила, величина которой, отнесенная к единице длины, есть $F(x, t)$, то предыдущее уравнение напишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{q} F(x, t) \quad (18)$$

К этому уравнению необходимо присоединить:

Во-первых, граничные условия, а именно:

1) конец пружины, соответствующий абсциссе $x=0$, остается неподвижным, значит должно быть

$$\text{при } x=0 \text{ и при всяком } t \text{ } u=0$$

2) конец, соответствующий абсциссе l , несет на себе добавочную массу $\frac{P}{g}$, с которой он связан неизменно, и движение которой должно быть такое же, как и этого конца.

Так как натяжение пружины во всякой точке есть $k \frac{\partial u}{\partial x}$, то, относя все внешние силы к силам, входящим в состав функции $F(x, t)$, видим, что при $x=l$ должно при всяком t иметь место уравнение

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (19)$$

или иначе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (19')$$

где

$$c^2 = \frac{kg}{P} \quad (20)$$

Во-вторых, начальные условия, т. е. те, которые относятся к моменту $t=0$ и которые выражаются уравнениями.

при $t=0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \quad (21)$$

Эти уравнения представляют начальное состояние пружины, т. е. начальное ее растяжение или сжатие и скорости, сообщенные различным точкам ее.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть заданы на протяжении от $x=0$ до $x=l$.

§ 7. Рассмотрим сперва простейший частный случай поставленной задачи; от этого частного случая уже нетрудно будет перейти к более общему, рассмотренному Пуассоном, а затем и к нашему.

Именно, предположим, что масса поршня ничтожно мала по сравнению с массой пружины; тогда вместо уравнения (19) у нас будет такое:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Таким образом, имеем следующую задачу:

Определить неизвестную функцию u так, чтобы она удовлетворяла:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{q} F(x, t)$$

2) граничным условиям

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } u=0 \\ \text{при } x=l \text{ должно быть } \frac{\partial u}{\partial x}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{при всяком} \\ \text{значении } t \end{array} \quad (19'')$$

3) начальным условиям (21)

при $t=0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

причем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные на протяжении от $x=0$ до $x=l$ функции. Задача эта представляет не что иное, как определение вынужденных колебаний струны; для решения ее применим тот общий прием, который развит в статье моей „Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben“, помещенной в 61-м томе „Mathematische Annalen“.

Делаем

$$u = u_1 + u_2 \quad (22)$$

и подчиним u_1 и u_2 таким граничным и начальным условиям, чтобы u_1 представляло *свободные колебания*, u_2 — *вынужденные*, разумея под свободными те, которые происходят без действия внешней силы, лишь в силу начального отклонения системы от состояния равновесия; вынужденными — те, которые вызываются действием внешней силы независимо от начального состояния системы.

Стоит только распорядиться так: u_1 должна удовлетворять:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (23)$$

2) граничным условиям

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } u_1=0 \\ \text{при } x=l \text{ должно быть } \frac{\partial u_1}{\partial x}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{при всяком} \\ \text{значении } t \end{array} \quad (24)$$

3) начальным условиям

при $t=0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \quad (25)$$

Величина u_2 должна удовлетворять:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{q} F(x, t) \quad (26)$$

2) граничным условиям

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } u_2=0 \\ \text{при } x=l \text{ должно быть } \frac{\partial u_2}{\partial x}=0 \end{array} \right\} \quad (27)$$

3) начальным условиям

при $t=0$ должно быть

$$u_2 = 0 \text{ и } \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \quad (28)$$

Очевидно, что при таком выборе величина $u = u_1 + u_2$ удовлетворяет всем требованиям задачи и вместе с тем u_1 представляет свободные и u_2 — вынужденные колебания.

Прежде всего найдем u_2 . Для этого будем искать эту величину под видом суммы

$$u_1 = \Sigma XT \quad (29)$$

в которой X есть функция только одной переменной x , T есть функция только переменной t ; каждый член этой суммы должен в отдельности удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0$$

т. е.

$$XT'' - b^2 TX'' = 0 \quad (30)$$

Это уравнение, очевидно, распадается на два:

$$X'' + m^2 X = 0 \quad (31)$$

$$T'' + b^2 m^2 T = 0 \quad (32)$$

где m^2 — какое угодно число, не содержащее ни t , ни x .

Из уравнения (31) следует

$$X = C \cos mx + D \sin mx$$

причем C и D — произвольные постоянные. Распорядимся постоянными C , D и m так, чтобы величина X удовлетворяла граничным условиям, тогда очевидно, что и u_1 будет им удовлетворять, сколько бы членов мы в сумме (29) ни брали. Итак, имеем:

$$\text{при } x=0 \text{ должно быть } X=0$$

$$\text{при } x=l \text{ должно быть } X'=0$$

отсюда следует

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ m D \cos ml &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Так как значения $m=0$, $D=0$ не удовлетворяют вопросу, то последнему уравнению удовлетворим, взяв m так, чтобы было

$$\cos ml = 0$$

откуда следует

$$ml = \frac{2n+1}{2} \pi (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (34)$$

или иначе

$$m = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{l} (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (35)$$

Эти значения мы будем для краткости обозначать так:

$$m_0, m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$$

и соответствующие им функции X так:

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots,$$

так что

$$X_n = D_n \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l} = D_n \sin m_n x \quad (36)$$

Каждой функции X_n соответствует и функция T_n , которую получим, внося в уравнение (32) соответствующее значение m . Таким образом, получим:

$$T_n = E_n \cos b m_n t + H_n \sin b m_n t \quad (37)$$

причем E_n и H_n — произвольные постоянные.

Так как произведения

$$E_n D_n \text{ и } H_n D_n$$

произвольных постоянных суть также произвольные постоянные, то мы можем, не теряя общности, писать

$$E_n D_n = A_n \text{ и } H_n D_n = B_n$$

и тогда u_1 примет вид

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi t}{l} + B_n \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi t}{l} \right) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad (38)$$

что равносильно тому, что в формуле (36) положить $D_n = 1$ и брать просто

$$X_n = \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad (39)$$

Величина u_1 , определяемая равенством (38), удовлетворяет уравнению (23) и граничным условиям; остается определить произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы u_1 удовлетворяла и начальным условиям, которые принимают вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad (40)$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} B_n \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad (41)$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n применяем обычный прием, который дает

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi$$

и

$$B_n = \frac{1}{b\pi} \cdot \frac{4}{2n+1} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi \quad (42)$$

Формулы (38) и (42) дают выражение u_1 .

Чтобы определить величину u_2 , поступаем подобным же образом и будем искать эту величину под видом суммы

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n S_n \quad (43)$$

причем X_n суть те самые функции, которые входят в состав u_1 и удовлетворяют граничным условиям; значит, и выражение (43) этим условиям удовлетворяет.

Подставляя это выражение в уравнение (26), получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n S_n'' - b^2 X_n'' S_n) = \frac{1}{q} F(x, t)$$

а так как функция X_n удовлетворяет уравнению

$$X_n'' + m_n^2 X_n = 0$$

то предыдущее равенство равносильно такому:

$$\sum_0^{\infty} X_n (S_n'' + b^2 m_n^2 S_n) = \frac{1}{q} F(x, t) \quad (44)$$

причем

$$m_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}$$

и

$$X_n = \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l}$$

Чтобы удовлетворить равенству (44), разложим функцию $\frac{1}{q} F(x, t)$ в ряд по функциям X_n , т. е. положим, что

$$\frac{1}{q} F(x, t) = \sum_0^n f_n(t) X_n \quad (45)$$

откуда следует

$$f_n(t) = \frac{2}{ql} \int_0^l F(\xi, t) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi \quad (46)$$

Значит, функция S_n будет определяться уравнением

$$S_n'' + b^2 m_n^2 S_n = f_n(t) \quad (47)$$

а так как при $t=0$ должно быть

$$u_2 = 0 \text{ и } \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

то и для всякого n должно быть при $t=0$

$$S_n = 0 \text{ и } S_n' = 0 \quad (48)$$

Сопоставляя уравнение (47) и условия (48) с уравнением (3') и условиями (4), видим, что

$$S_n = \frac{1}{bm_n} \int_0^l f_n(\alpha) \sin bm_n(t - \alpha) d\alpha \quad (49)$$

или, заменяя f_n его величиной, получим:

$$S_n = \frac{4}{b\pi q} \cdot \frac{1}{2n+1} \int_0^l d\alpha \int_0^l F(\xi, \alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t - \alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} d\xi \quad (50)$$

Эта формула в соединении с формулой (43) и решает вопрос об определении u_2 .

§ 8. Общие формулы предыдущего параграфа настолько сложны, что для применения их к интересующему нас вопросу об индикаторе с тяжелой пружиной и весьма легким поршнем надо эти формулы развить подробнее для того частного вида функции $F(x, t)$, с которым именно и приходится иметь дело.

В нашем случае давление действует на конец пружины, соответствующий абсциссе $x=l$, и является функцией только времени t , в остальных же точках на пружину никаких внешних сил не действует.

Таким образом, мы имеем здесь дело с сосредоточенной нагрузкой, и для разбора этого случая надо воспользоваться тем приемом, который указан в § 8 и в § 12 вышеупомянутой статьи моей.

Сосредоточенную нагрузку надо рассматривать как предельный случай нагрузки, распределенной на бесконечно малом протяжении при условии, что полная величина ее не изменяется с изменением промежутка, на котором она распределена.

Выкладку следует вести так, как будто бы нагрузка действовала на некотором конечном промежутке λ , в конечном расстоянии c от конца пружины, а затем в окончательном результате переходить к пределу $\lambda=0$ и $c=l$.

Итак, положим, что функция $F(x, t)$ такова:

$$\begin{aligned} F(x, t) &= 0 && \text{для промежутка от } x=0 \text{ до } x=c \\ F(x, t) &= \omega(x)f(t) && \text{для промежутка от } x=c \text{ до } x=c+\lambda \\ F(x, t) &= 0 && \text{для промежутка от } c+\lambda \text{ до } l \end{aligned}$$

причем

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(x) dx = A \text{ (см. § 1) и } \omega(x) > 0$$

т. е. что независимо от величины c и λ полная нагрузка равна $Af(t)$.

В этих предположениях относительно функции $F(x, t)$ и исчислим интеграл, входящий в формулу (50).

Выполним сперва интегрирование по букве ξ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^l F(\xi, a) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi &= f(a) \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi \\ &= \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi = \\ &= \left[\sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right]_c^{c+\lambda} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi \xi}{l} \int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right] d\xi = \\ &= A \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{(c+\lambda)}{l} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{l} \int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right] d\xi \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что последний из этих интегралов имеет своим пределом 0 вместе с λ . В самом деле всегда можно взять λ столь малым, чтобы $\cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} \xi$ не менял своего знака между пределами интегрирования; тогда, обозначая через η правильную дробь, имеем по теореме о средней:

$$\int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right] d\xi = \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi (c+\eta\lambda)}{l} \int_c^{c+\lambda} d\xi \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right]$$

так как $\omega(\xi)$ постоянно положительно, то

$$\int_c^{\xi} \omega(\xi) d\xi < \left(\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) d\xi = A \right)$$

т. е.

$$\int_c^{\xi} \omega(\xi) d\xi < A$$

следовательно, интеграл

$$\int_c^{c+\lambda} d\xi \left[\int_c^{\xi} \omega(\xi) d\xi \right] < A\lambda$$

а значит по абсолютной величине и интеграл

$$\int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \left[\int_c^{\xi} \omega(\xi) d\xi \right] d\xi < A\lambda$$

а так как A — величина конечная, то предел этого интеграла при $\lambda=0$ есть 0.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda=0} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi = \\ & = \lim_{\substack{c=l \\ \lambda=0}} \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi(c+\lambda)}{l} \cdot \lim_{\lambda=0} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) d\xi = A \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi c}{l} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{c=l \\ \lambda=0}} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} d\xi = A \sin \frac{2n+1}{2} \pi = (-1)^n A$$

Таким образом, имеем: в пределе, т. е. когда сосредоточенное давление, равное $Af(t)$, действует на конец пружины, то функция

$$S_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{4A}{b\pi q} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha \quad (51)$$

вместе с тем

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad (52)$$

Если начальные условия таковы, что

$$\varphi(x)=0 \text{ и } \psi(x)=0$$

то и

$$u_1 = 0$$

и, следовательно,

$$u = u_2$$

§ 9. Обыкновенно представляет интерес не перемещение произвольной точки пружины, соответствующей абсциссе x , а лишь свободного конца ее, соответствующего значению $x=l$.

Для этого случая формула (52) дает

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n = \frac{4A}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha \quad (53)$$

Прежде чем исследовать эту формулу, проверим ее справедливость для простейшего случая: положим, что

$$f(\alpha) = p_0$$

тогда

$$\int_0^l f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha = \frac{2p_0}{2n+1} \cdot \frac{l}{b\pi} \left[1 - \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi t}{l} \right]$$

если взять $t = \frac{2l}{b}$, то

$$1 - \cos \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi t}{l} = 1 - \cos (2n+1)\pi = 2$$

и u_2 получает наибольшее свое значение

$$u_2 = \frac{16Ap_0l}{b^2\pi^2q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (54)$$

Как известно, сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (55)$$

Замечая, кроме этого, что в силу обозначения

$$b^2 = \frac{k}{q}, \text{ т. е. } b^2 q = k \quad (56)$$

видим, что предыдущая величина u_2 равносильна такой:

$$u_2 = \frac{2A p_0 l}{k} \quad (54')$$

т. е., что наибольшее растяжение, которое получает пружина под действием внезапно приложенной силы, вдвое больше того „статического“ растяжения, которое этой силой сообщается.

Результат этот общеизвестен и может быть выведен из самых элементарных соображений; для нас же он был нужен, чтобы проверить, нет ли ошибки в выкладке.

§ 10. Перейдем теперь к исследованию формулы (53)

$$u_2 = \frac{4A}{b\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha$$

Как видно, каждый из входящих в состав этой формулы интегралов имеет совершенно такой же вид, как и в формуле (6), и, применяя к каждому из них то же преобразование, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha = \\ & = \frac{2l}{b\pi} \cdot \frac{1}{2n+1} f(t) - \frac{2l}{b\pi (2n+1)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (57)$$

подставляя в формулу (53) и воспользовавшись соотношениями (55) и (56), получаем:

$$u_2 = \frac{Al}{k} f(t) - \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{Al}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha \quad (58)$$

Первый член этой формулы

$$\frac{Al}{k} f(t)$$

представляет как раз ту величину, которую должен дать индикатор, если бы давление нарастало весьма медленно ($f'(t)=0$), иными словами, действовало „статически“, значит величина

$$\varepsilon = -\frac{8}{\pi^2} \frac{Al}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) d\alpha \quad (59)$$

представляет погрешность записи прибора вследствие изменчивости давления.

Как видно, каждый член этого выражения совершенно подобен выражению (7), отличаясь от него лишь постоянными множителями.

В § 4 произведено исследование этого выражения для важнейшего в практике случая.

Сделаем для сокращения письма

$$\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} = \nu_n$$

тогда, в силу сказанного в § 4, обозначая через $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ и т. д. величины $\frac{2\pi}{\nu_0}, \frac{2\pi}{\nu_1}, \frac{2\pi}{\nu_2}$ и т. д. и через $f'(t_i)$ — наибольшее значение $f'(t)$, имеем на основании формулы (*) § 4 следующий ряд неравенств, относящихся к абсолютным величинам количеств, в них входящих:

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(x) \cos v_0(t-x) dx &< \frac{2\sqrt{2}}{v_0} f'(t_i) \\ \int_0^t f'(x) \cos v_1(t-x) dx &< \frac{2\sqrt{2}}{v_1} f'(t_i) \\ . &. \\ \int_0^t f'(x) \cos v_n(t-x) dx &< \frac{2\sqrt{2}}{v_n} f'(t_i) \\ . &. \end{aligned} \tag{59'}$$

следовательно,

$$\sigma_0 = 4 \sqrt{\frac{Ql}{gk}} \quad (61)$$

причем k есть мера жесткости пружины и определяется формулой

$$k = \frac{Pl}{h} \quad (62)$$

где P — нагрузка и h — соответствующее ей растяжение или сжатие пружины.

Формулы (60'), (61) и (62) и дают полные указания на выбор элементов индикатора с весьма легким поршнем и весьма жесткой пружинкой, предназначенного для записи давления, наибольшая быстрота нарастания которого известна.

Заметим, что во всех случаях первый член входящей в состав формулы (59) суммы настолько преобладает над остальными, что практически можно ограничиваться им одним и писать формулу (59) так:

$$\varepsilon = 0.8 \frac{Al}{k} \int_0^1 f'(a) \cos \frac{b\pi}{2l}(t-a) da \quad (63)$$

и тогда все сказанное в §§ 2 и 3 относится и к рассматриваемому случаю, стоит только вместо периода τ брать период σ_0 .

Нетрудно также, исходя из формулы (53), получить результат, подобный формуле (16), для индикатора, дающего импульс давления, несмотря на то, что масса его поршня ничтожно мала по сравнению с массой пружины; стоит только заменить в формуле (16) букву n буквой ν_0 , и мы получим:

$$U_{\max} = \frac{Al}{k} \nu_0 I = \frac{Al}{k} \cdot \frac{b\pi}{2l} I$$

или иначе

$$U_{\max} = \frac{Al}{2} \pi \sqrt{\frac{gl}{kQ}} = \frac{Al}{2} \pi \sqrt{\frac{gh}{PQ}} \quad (64)$$

где по-прежнему обозначено: через Q — вес пружины и через h — растяжение или сжатие ее при статической нагрузке, равной P .

§ 11. Приложим теперь изложенный в предыдущих параграфах прием к рассмотрению и общего случая, т. е. когда отношение веса поршня к весу пружины таково, что его нельзя почитать ни за „малую“, ни за „большую“ величину при той степени точности, которую при обработке каких-либо опытов или наблюдений желательно достигнуть.

Итак, нам надо решить следующую задачу.

Определить функцию u так, чтобы она удовлетворяла:

1) уравнению (18)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{q} F(x, t)$$

2) граничным условиям

при $x=0$ должно быть $u=0$

при $x=l$ должно иметь место (19')

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

3) начальным условиям

при $t=0$ должно быть уравнение (21)

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

Следуя изложенной в § 7 методе, полагаем

$$u = u_1 + u_2$$

и подчиняем u_1 и u_2 следующим требованиям:

Для u_1

$$1) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad (65)$$

2) Граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad u_1 &= 0 \\ \text{при } x=l \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

3) Начальные условия

$$\text{при } x=0 \text{ должно быть } u_1 = \varphi(x) \text{ и } \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x) \quad (67)$$

Для u_2

$$1) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{q} F(x, t) \quad (68)$$

2) Граничные условия

$$\text{при } x=0 \quad u_2 = 0 \quad (69)$$

$$\text{при } x=l \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (70)$$

3) Начальные условия

$$\text{при } t=0 \text{ должно быть } u_2 = 0 \text{ и } \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \quad (71)$$

§ 12. Начинаем с определения u_1 . Полагаем по-прежнему

$$u_1 = \sum XT \quad (72)$$

тогда должно быть

$$X'' + m^2 X = 0 \quad (73)$$

$$T'' + b^2 m^2 T = 0 \quad (74)$$

где m — какое угодно число, не содержащее ни t , ни x . Отсюда следует

$$X = C \cos mx + D \sin mx$$

а так как при $x=0$ должно быть $X=0$, то $C=0$ и значит

$$X = \sin mx \quad (75)$$

так как мы видели, что, не теряя в общности, можно брать $D=1$.

Из уравнения (74) следует:

$$T = A \cos bmt + B \sin bmt$$

и, следовательно,

$$u_1 = \sum A \sin mx \cos bmt + \sum B \sin mx \sin bmt \quad (76)$$

Чтобы эта величина удовлетворяла второму из граничных условий, необходимо, чтобы при всяком t имело место равенство

$$\sum (b^2 m^2 \sin ml - mc^2 \cos ml)(A \cos bmt + B \sin bmt) = 0 \quad (77)$$

которое получается, если подставить в уравнение (72) вместо u_1 его выражение (76) и положить затем $x = l$.

Из равенства (77) следует, что каждый член суммы в отдельности должен равняться нулю, т. е. числа m должны удовлетворять уравнению

$$mb^2 \sin ml - c^2 \cos ml = 0 \quad (77')$$

или, полагая

$$ml = \mu \text{ и делая } \frac{c^2 l}{b^2} = \frac{glq}{P} = \frac{Q}{P} = \gamma$$

такому:

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \quad (78)$$

Обозначив корни этого уравнения через

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n, \dots$$

(вычисление этих корней будет показано ниже), мы для каждого корня получаем соответствующую функцию X и T , а именно:

$$X_n = \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (79)$$

и

$$T_n = A_n \cos \frac{\mu_n bt}{l} + B_n \sin \frac{\mu_n bt}{l} \quad (80)$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, надо определить постоянные произвольные A_n и B_n так, чтобы было

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum A_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \\ \psi(x) &= \sum \frac{b \mu_n}{l} B_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \end{aligned} \quad (81)$$

Но здесь для определения коэффициентов A_n и B_n примененный в § 7 прием — умножения на $\sin \frac{\mu_n x}{l}$ и интегрирования в пределах от 0 до l — не привел бы к цели, ибо интеграл

$$\int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_k x}{l} dx$$

не обращается в нуль, когда значки n и k не равны.

Но Пуассон в упомянутой выше статье показывает, что

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} \cos \frac{\mu_k x}{l} dx = 0 \quad (82)$$

когда n не равно k .

В самом деле

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} \cos \frac{\mu_k x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{\mu_n + \mu_k}{l} x + \cos \frac{\mu_n - \mu_k}{l} x \right) dx = \\ &= \frac{l}{2} \left[\frac{\sin(\mu_n + \mu_k)}{\mu_n + \mu_k} + \frac{\sin(\mu_n - \mu_k)}{\mu_n - \mu_k} \right] = \frac{l}{2} \frac{(\mu_n - \mu_k) \sin(\mu_n + \mu_k) + (\mu_n + \mu_k) \sin(\mu_n - \mu_k)}{\mu_n^2 - \mu_k^2} = \\ &= l \frac{\mu_n \sin \mu_n \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \mu_n}{\mu_n^2 - \mu_k^2} = \\ &= \frac{l}{\mu_n^2 - \mu_k^2} \cos \mu_n \cos \mu_k [\mu_n \operatorname{tg} \mu_n - \mu_k \operatorname{tg} \mu_k] = 0 \end{aligned}$$

ибо, в силу уравнения (78),

$$\mu_n \operatorname{tg} \mu_n = \mu_k \operatorname{tg} \mu_k = \gamma$$

Когда же $\mu_n = \mu_k$, то будет

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_n x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2\mu_n x}{l} \right) dx = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_n} \sin 2\mu_n \right) = \\ &= \frac{l}{4\mu_n} (2\mu_n + \sin 2\mu_n) \end{aligned} \quad (83)$$

Таким образом, нахождение коэффициентов в ряду

$$\omega(x) = \sum_1^{\infty} C_n \cos \frac{\mu_n x}{l}$$

производится по формуле

$$C_n = \frac{4}{l} \cdot \frac{\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \omega(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi \quad (84)$$

Чтобы к этому привести наш случай, стоит только положить

$$\omega(x) = \varphi'(x) = \sum C_n \cos \frac{\mu_n x}{l}$$

тогда

$$\varphi(x) = \sum A_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (84')$$

причем

$$A_n = \frac{C_n l}{\mu_n} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \varphi'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi \quad (85)$$

Точно также получим:

$$B_n = \frac{4l}{b} \cdot \frac{1}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l \psi'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi \quad (86)$$

Таким образом, имеем:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n \cos \frac{b\mu_n t}{l} + B_n \sin \frac{b\mu_n t}{l} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (87)$$

причем A_n и B_n определяются формулами (85) и (86); величины же

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$$

суть корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

§ 13. Покажем теперь, каким образом найти величину u_2 . Для этого:

1) полагаем, согласно сказанному в § 7,

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (88)$$

2) представляем функцию $\frac{1}{q} F(x, t)$ в виде ряда

$$\frac{1}{q} F(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n(t) \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (89)$$

тогда, как показано выше, будет

$$f_n(t) = \frac{4}{q} \cdot \frac{1}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \frac{\partial F(\xi, t)}{\partial \xi} \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi \quad (90)$$

3) функция S_n определяется уравнением

$$S_n'' + \frac{b^2 \mu_n^2}{l^2} S_n = f_n(t) \quad (91)$$

и условиями:

при $t=0$ должно быть $S_n=0$ и $S_n'=0$

так что

$$S_n = \frac{l}{b\mu_n} \int_0^l f_n(a) \sin \frac{b\mu_n}{l} (t - a) da \quad (92)$$

Формулы (88), (90), (92) и доставляют выражение u_2 , чем поставленная задача и решается вполне, так как

$$u = u_1 + u_2$$

когда же начальные условия таковы, что

$$\varphi(x) = 0 \text{ и } \psi(x) = 0$$

то $u_1=0$ и остается решение

$$u = u_2$$

§ 14. В предыдущем изложении внешняя нагрузка $F(x, t)$ предполагается распределенной по длине пружины или отдельных участ-

ков ее и отнесенной на погонную единицу длины пружины, для нашей же цели необходимо исследовать действие нагрузки, сосредоточенной на конце ($x=l$) пружины.

Очевидно, что, имея общие формулы (88), (90) и (92), надо поступить с ними совершенно подобно тому, как мы делали в § 8, рассматривая сосредоточенную нагрузку как предельный случай конечной полной нагрузки, распределенной на бесконечно малом участке.

С этой целью берем функцию $F(x, t)$ так, как указано в § 8; тогда интеграл

$$\int_0^l \frac{\partial F(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = f(\alpha) \int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi$$

$$\int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \left(\omega(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \right)_c^{c+\lambda} + \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi$$

Будем брать функцию $\omega(\xi)$ так, чтобы было

$$\omega(c+\lambda) = \omega(c) = 0$$

тогда

$$\int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi$$

Затем

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \left\{ \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right] \sin \frac{\mu_n \xi}{l} \right\}_c^{c+\lambda} -$$

$$- \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \left[\int_c^\xi \omega(\xi) d\xi \right] \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = A \sin \frac{\mu_n (c+\lambda)}{l}$$

ибо в § 8 показано, что второй из этих двух интегралов имеет своим пределом 0, интеграл же

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) d\xi$$

по предположению имеет своим пределом A ; таким образом, имеем

$$\lim_{\substack{c \rightarrow l \\ \lambda \rightarrow 0}} \int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \frac{\mu_n \sin \mu_n}{l} A = \frac{\gamma}{l} A \cos \mu_n$$

Следовательно, будет

$$f_n(t) = \frac{4\gamma}{ql} \cdot \frac{\cos \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} A f(t)$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{4\gamma}{bq} \cdot \frac{\cos \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} A \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l}(t - \alpha) d\alpha$$

и по-прежнему

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \quad (93)$$

Так как нас интересует главным образом движение поршня, а не промежуточных точек пружины индикатора, то для получения его надо положить в формуле (93) $x=l$, тогда получим:

$$u_2 = z = \frac{4\gamma A}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \mu_n \sin \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l}(t - \alpha) d\alpha$$

В силу уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

имеем:

$$\frac{\gamma \cos \mu}{\mu} = \sin \mu$$

и предыдущую формулу можно написать так:

$$z = \frac{4A}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l}(t - \alpha) d\alpha \quad (94)$$

Эту формулу преобразуем подобно тому, как мы делали раньше, а именно, интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^l f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l}(t - \alpha) d\alpha = \frac{l}{b\mu_n} f(t) - \frac{l}{b\mu_n} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l}(t - \alpha) d\alpha$$

подставляя, получаем:

$$z = \frac{4A}{b^2q} l f(t) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} - \\ - \frac{4A}{b^2q} l \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha) d\alpha$$

Нетрудно найти сумму

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

В самом деле в формулах (84') и (85), данных Пуассоном для разложения функции в ряд по синусам аргументов, зависящих от корней уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

положим

$$\varphi(x) = x$$

тогда будет

$$A_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \frac{4l \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

следовательно,

$$x = 4l \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

полагая в этой формуле $x = l$, имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} = \frac{1}{4}$$

и, замечая, что

$$b^2q = k \quad [\text{см. формулу (17')}]$$

можем написать:

$$z = \frac{Al}{k} f(t) - \frac{Al}{k} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha) d\alpha$$

причем последний член и представляет выражение погрешности, даваемой индикатором.

Очевидно, что выражение погрешности

$$\varepsilon = -\frac{Al}{k} \sum \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f'(a) \cos \frac{b\mu_n}{l}(t-a) da \quad (95)$$

может быть преобразовано, подобно тому, как и раньше, и мы получим верхний предел ее абсолютной величины.

Полагая

$$\frac{b\mu_n}{l} = \lambda_n$$

мы в силу сказанного в § 4 можем написать ряд неравенств подобных (59'), а именно:

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(a) \cos \lambda_1(t-a) da &< \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1} f'(t_i) \\ \int_0^t f'(a) \cos \lambda_2(t-a) da &< \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2} f'(t_i) \\ &\dots \dots \dots \\ \int_0^t f'(a) \cos \lambda_n(t-a) da &< \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_n} f'(t_i) \end{aligned}$$

следовательно, будет

$$|\varepsilon| < \frac{Al}{k} \cdot \frac{2\sqrt{2}l}{b} \sum \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} f'(t_i) \quad (96)$$

Так как корни уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$ идут, возрастая приблизительно как ряд натуральных чисел, то

$$\frac{1}{\mu_n} < \frac{1}{\mu_1}$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} < \frac{1}{\mu_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

т. е. рассматриваемая сумма меньше $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu_1}$.

Таким образом, имеем:

$$\varepsilon < \frac{Al}{k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l}{b\mu_1} f'(t_i) \quad (97)$$

Формула (87) показывает, что величина

$$\sigma_1 = \frac{2\pi}{b\mu_1} l \quad (98)$$

есть наибольший из периодов свободных колебаний пружины вместе с поршнем; поэтому, чтобы соблюсти аналогию с предыдущим, формулу (97) напомним для случая, когда σ_1 мало по сравнению с продолжительностью нарастания давления, так

$$\varepsilon < \frac{Al}{k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} f'(t) \frac{\sigma_1}{2}$$

или

$$\varepsilon < 0.45 \frac{Al}{k} f'(t) \frac{\sigma_1}{2} \quad (99)$$

Само собой разумеется, что когда период σ_1 весьма велик по сравнению с продолжительностью действия давления, то индикатор показывает импульс давления и будет

$$Z_{\max} = \frac{Al}{k} \cdot \frac{b\mu_1}{l} I \quad (100)$$

причем μ_1 есть наименьший из корней уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

и

$$b = \sqrt{\frac{k}{q}} = \sqrt{\frac{klq}{Q}}; \quad \gamma = \frac{P}{Q} = \frac{\text{вес пружины}}{\text{вес поршня}}$$

§ 15. Как видно, для нахождения величины σ_1 необходимо решить уравнение

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

Подобные трансцендентные уравнения встречаются во многих вопросах математической физики, и еще Фурье обратил внимание и показал, что их надо решать, исходя из графических соображе-

ний, строя такие две кривые, абсциссы точек пересечения которых и давали бы искомые корни.

В нашем случае стоит только взять кривые, коих уравнения

$$y = \operatorname{tg} x \text{ и } xy = \gamma$$

то абсциссы точек пересечения их и дадут искомые корни предложенного уравнения. Не входя в дальнейшие подробности, прилагаем таблицу значений наименьшего корня этого уравнения:

Таблица значений наименьшего корня уравнения
 $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$

γ	μ_1	γ	μ_1	γ	μ_1
0.01	0.10	0.8	0.79	7.0	1.39
0.05	0.22	0.9	0.82	8.0	1.40
0.1	0.32	1.0	0.86	9.0	1.41
0.2	0.43	1.5	0.98	10.0	1.417
0.3	0.52	2.0	1.13	15.0	1.473
0.4	0.59	3.0	1.20	20.0	1.525
0.5	0.65	4.0	1.27	100.0	1.568
0.6	0.70	5.0	1.32	∞	1.5705
0.7	0.75	6.0	1.37		

Эта таблица составлена по логарифмической линейке без всяких вычислений; стоит только написать уравнение так:

$$\mu^\circ \operatorname{tg} \mu^\circ = 57.3 \gamma$$

и поступать для приискания числа градусов в μ° со шкалой тангенсов и чисел подобно тому, как делают для извлечения кубического корня из чисел.

§ 16. Очевидно, что случай, рассмотренный в §§ 11—15, где приняты во внимание как инерция поршня, так и пружины, есть самый общий и должен заключать в себе как частные остальные два, поэтому получение из этого общего случая этих двух частных составит надежную проверку выкладок.

Начнем с того случая, который рассмотрен в § 7, т. е. где предположено, что масса поршня ничтожно мала. Следовательно, в уравнении (78) надо сделать

$$\gamma = \infty$$

и значит корни

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$$

соответственно будут

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}\pi$$

и соответствующие функции

$$X_n = \sin \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

что согласуется с формулой (39).

Обращаясь затем к формуле (94), мы видим, что коэффициент

$$\frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} = \frac{\sin^2 \frac{2n-1}{2} \pi}{2 \frac{2n-1}{2} \pi + \sin (2n-1)\pi} = \frac{1}{(2n-1)\pi}$$

и формула (94) обращается в такую:

$$z = \frac{4A}{bq\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n-1} \int_0^t f(a) \sin \frac{(2n-1)b\pi}{l} (t-a) da \quad (101)$$

что согласуется с формулой (53), ибо очевидно, что сумму по всем нечетным целым числам можно писать или от $n=0$ до $n=\infty$, изображая нечетное число в виде $2n+1$, как это сделано в формуле (53), или же от $n=1$ до $n=\infty$, изображая нечетное число в виде $2n-1$, как это сделано формулой (101).

Таким образом, случай, рассмотренный в § 7, вытекает из общего.

Перейдем теперь к случаю, рассмотренному в § 1, т. е. когда масса пружины ничтожно мала по сравнению с массой поршня.

В этом случае величина γ в уравнении

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

равна нулю, и это уравнение дает для величины μ значения

$$\mu_n = n\pi \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

В формуле (94) все члены, содержащие коэффициенты

$$\frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n}$$

обратятся в нуль, кроме первого, который принимает неопределенный вид, так что формула (94) должна быть написана так:

$$z = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{4A}{bq} \cdot \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{b\mu}{l} (t - \alpha) d\alpha \quad (102)$$

При разыскании этого предела необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$b^2 = \frac{k}{q}; \quad Q = gql$$

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \frac{Q}{P} = \frac{gql}{P}$$

Из последнего уравнения при бесконечно малом q следует, что наименьший корень μ выражается так:

$$\mu = \sqrt{\frac{gql}{P}}$$

Значит

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{b\mu}{l} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{k}{q}} \sqrt{\frac{gql}{P}} = \sqrt{\frac{kg}{Pl}} \quad (*)$$

Затем

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{4A}{bq} \cdot \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu} &= 4A \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{bq} \cdot \frac{\mu}{4} = \\ &= A \lim_{q \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{kq}} \sqrt{\frac{gql}{P}} = A \sqrt{\frac{gl}{kP}} \end{aligned}$$

Принимая во внимание обозначение § 1

$$n^2 = \frac{kg}{lP}$$

видим, что

$$\text{пред. } \frac{b_l}{l} = n$$

и величина

$$\sqrt{\frac{gl}{kP}} = \frac{nl}{k}$$

и формула (102) обратится в такую:

$$z = \frac{Al}{k} n \int_0^t f(\alpha) \sin n(t - \alpha) d\alpha$$

которая совпадает с формулой (5'), т. е. что и первый случай есть следствие общего.

§ 17. Не приводя численных примеров, относящихся к чисто артиллерийской и минной практике, заметим, что рассмотренное уравнение встречается во многих физических вопросах; так, изложенная теория относится целиком и без всяких изменений к струнному осциллографу; она находится также в самой тесной связи с распространением электрических колебаний и с действием приемника беспроволочного телеграфа и тому подобными вопросами, относящимися к определению вынужденных колебаний системы, движение которой определяется уравнениями в частных производных, подобных уравнениям движения струны.

О РАСЧЕТЕ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

ВВЕДЕНИЕ

Расчет балок, лежащих на упругом основании, разбирается весьма подробно и обстоятельно в изданном Государственным Техническим издательством сочинении проф. Кеиши Хаяси под заглавием „Теория расчета балок на упругом основании“.

Хаяси излагает обычные методы решения этого вопроса, причем в случае прерывной нагрузки или сосредоточенных сил он подразделяет балку на отдельные участки по местам разрывов нагрузки или приложения сосредоточенных сил, и, таким образом, вместо *одной* непрерывной балки ему приходится рассматривать столько балок, сколько таких участков. Вследствие этого, кроме граничных условий, выражающих род закрепления концов балки, ему необходимо составлять для каждой точки соединения двух участков по четыре уравнения, выражающих условия „сопряжения“ этих участков балки. Так, например, для балки, нагруженной тремя силами, ему надо рассматривать четыре участка, и для определения 16 произвольных постоянных, вводимых интегрированием, составить 16 уравнений с 16 неизвестными со сложными при них коэффициентами. Отсюда ясно, к каким сложным выкладкам, даже для простейших нагрузок, приводит эта обычная метода.

В этой статье я прежде всего развиваю общую методу решения поставленного вопроса, при которой, какова бы нагрузка ни была, балку на отдельные участки подразделять не надо, условий сопряжения составлять не надо и вместо многочисленных уравнений для определения постоянных произвольных таковых

приходится определять во всех случаях нагрузки *две* и только *две* по условиям закрепления одного из концов балки. Это вносит во все выкладки простоту и симметрию.

Развив эту „точную“ методику и пояснив ее численным примером, я показываю „приближенные“ методы, которые обобщаются на случай балок переменного и притом какого угодно сечения. Методу эту поясняю также численным примером, чтобы показать, что „приближение“ может быть доведено до любой степени точности.

На применимость формул к численным вычислениям, без чего вопрос не может считаться решенным, я обращаю особенное внимание, ибо рассматриваемым вопрос в связи с нашим громадным и самым разнообразным строительством как раз теперь получил немаловажное практическое значение.

Статья подразделена на две главы, в первой из которых рассматриваются балки постоянного сечения, во второй — балки переменного сечения, отнесены сюда и те случаи, когда балка состоит из нескольких частей, на каждой из которых ее сечение постоянное.

В прибавлении я прилагаю методику, изложенную в первой главе, к расчету перекрестных связей вообще и, в частности, набора судового днища.

Г л а в а I

РАСЧЕТ БАЛОК ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

§ 1. Расчет балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании, приводится, как известно, со времен Эйлера к интегрированию уравнения

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x) \quad (1)$$

в котором E — модуль упругости материала балки; I — момент инерции площади ее поперечного сечения; K — отнесенное на погонную единицу длины (1 см) сопротивление грунта оседанию,

когда оседание равно 1; $F(x)$ — внешняя нагрузка балки, отнесенная на погонную единицу длины; y — прогиб балки в точке, коей абсцисса равна x . Абсциссы считаются от одного из концов балки, длина которой равна l .

Величина y , кроме уравнения (1), должна удовлетворять граничным условиям, относящимся к роду закрепления концов балки, соответствующих значениям $x=0$ и $x=l$.

Эти условия выражаются следующим образом: при $x=0$ или при $x=l$ должно быть

- а) для конца заделанного: $y=0$ и $y'=0$
- б) для конца подпертого: $y=0$ и $y''=0$
- в) для конца свободного: $y''=0$ и $y'''=0$

Для решения уравнения (1) и составления таблиц для разных частных случаев Хаяси полагает, согласно Шведлеру,

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{K}} \text{ и } \frac{x}{L} = \xi \quad (3)$$

он приводит, таким образом, уравнение (1) к виду

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = f(\xi) \quad (4)$$

и указывает составление его общего интеграла, но, как мы увидим ниже, эту основную выкладку до конца не доводит.

Для уравнения (4) характеристическое уравнение есть

$$s^4 + 4 = 0 \quad (5)$$

и корни его суть

$$\begin{aligned} s_1 &= -s_4 = 1 + i \\ s_2 &= -s_3 = 1 - i \end{aligned} \quad (6)$$

причем как обыкновенно $i = \sqrt{-1}$. Соответственно этому Хаяси представляет общий интеграл уравнения (4) в виде

$$y = Z_1 e^{s_1 \xi} + Z_2 e^{s_2 \xi} + Z_3 e^{-s_2 \xi} + Z_4 e^{-s_1 \xi} \quad (7)$$

причем Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 суть функции переменной ξ , для определения которых Хаяси пишет известные уравнения Лагранжевой методы изменения постоянных произвольных, а именно:

$$\begin{aligned} e^{s_1\xi}Z'_1 + e^{s_2\xi}Z'_2 + e^{-s_2\xi}Z'_3 + e^{-s_1\xi}Z'_4 &= 0 \\ e^{s_1\xi}Z'_1 - e^{s_2\xi}Z'_2 - e^{-s_2\xi}Z'_3 + e^{-s_1\xi}Z'_4 &= 0 \\ s_1e^{s_1\xi}Z'_1 + s_2e^{s_2\xi}Z'_2 - s_2e^{-s_2\xi}Z'_3 - s_1e^{-s_1\xi}Z'_4 &= 0 \\ -s_2e^{s_1\xi}Z'_1 - s_1e^{s_2\xi}Z'_2 + s_1e^{-s_2\xi}Z'_3 + s_2e^{-s_1\xi}Z'_4 &= \frac{2}{K}f(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Но этой системы в общем виде он не решает, ограничиваясь рассмотрением некоторых простейших частных видов функции $f(x)$, т. е. действующей на балку нагрузки. Заметим здесь же, что ниже мы показываем, что для нахождения общего интеграла уравнения (4) нет надобности прибегать к Лагранжевой методе и этот общий интеграл находится весьма просто для любой функции $f(x)$ прерывной или непрерывной и даже для сосредоточенных сил, причем нет надобности прибегать к уравнениям сопряжения. Между тем при обычном изложении этого вопроса Хаяси, а значит и всеми авторами, на которых он ссылается, не получающими выражения общего интеграла уравнения (4) при произвольной функции $f(x)$, приходится для каждой точки, где нагрузка претерпевает разрыв или где приложена сосредоточенная сила, составлять „условия сопряжения“ различных участков, на которые этими точками, длина балки подразделяется. Это приводит к необходимости решать для определения постоянных произвольных большое число уравнений первой степени со многими неизвестными, именно по четыре для каждого участка.

Чтобы это стало ясным, возьмем простейший случай: балки, подпертой по концам и нагруженной сосредоточенной силой P , приложенной в точке, абсцисса коей $x=a$.

В этом случае, следуя Хаяси, балка подразделяется на два участка: первый от $x=0$ до $x=a$ и второй от $x=a$ до $x=l$.

Так как распределенной по длине балки нагрузки нет, то $f(x)=0$, и уравнения ее упругого равновесия будут

для первого участка

$$y_1^{IV} + 4y_1 = 0 \quad (9)$$

для второго участка

$$y_2^{IV} + 4y_2 = 0 \quad (10)$$

Пусть

$$\frac{l}{L} = \lambda, \quad \frac{a}{L} = \alpha$$

Общий интеграл уравнения (9) по освобождению от мнимых знаков, как его обыкновенно пишут, будет

$$y_1 = (A_1 e^{\xi} + A_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (A_3 e^{\xi} + A_4 e^{-\xi}) \sin \xi \quad (11)$$

и для уравнения (10)

$$y_2 = (B_1 e^{\xi} + B_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (B_3 e^{\xi} + B_4 e^{-\xi}) \sin \xi \quad (12)$$

Так как конец $\xi = 0$ принадлежит первому участку, а конец $\xi = \lambda$ — второму, то граничные условия будут

$$\begin{aligned} y_1(0) = 0 \text{ и } y_1''(0) = 0 \\ y_2(\lambda) = 0 \text{ и } y_2''(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Условия „сопряжения“ обоих участков в точке $\xi = \alpha$ в этом случае будут

$$\begin{aligned} y_1(\alpha) = y_2(\alpha); y_1'(\alpha) = y_2'(\alpha); y_1''(\alpha) = y_2''(\alpha) \\ y_1'''(\alpha) + \frac{P}{EI} = y_2'''(\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что в развернутом виде уравнения (13) и (14) будут уравнениями первой степени с *восемью* неизвестными $A_1, \dots, B_4$, с довольно сложными при них коэффициентами, заключающими тригонометрические и показательные функции аргументов λ и α .

Если бы наша балка была нагружена, например, двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 , приложенными в точках $x = a$ и $x = b$, коим соответствуют значения

$$\xi_1 = \frac{a}{L} = \alpha \text{ и } \xi_2 = \frac{b}{L} = \beta \quad (15)$$

то пришлось бы, следуя Хаяси, рассматривать три участка:

$$\begin{aligned} \text{первый от } \xi=0 \text{ до } \xi=\alpha; \text{ второй от } \xi=\alpha \text{ до } \xi=\beta \\ \text{третий от } \xi=\beta \text{ до } \xi=\lambda \end{aligned} \quad (16)$$

и три неизвестные функции y_1 , y_2 и y_3 , каждая из которых заключает по четыре произвольные постоянные, для определения которых придется составить *двенадцать* уравнений с этими 12 неизвестными, а именно: четыре уравнения для граничных условий, четыре для сопряжения в точке $\xi=\alpha$ и четыре для сопряжения в точке $\xi=\beta$.

Само собою понятно, насколько сложно было бы общее решение такой системы и к каким громоздким формулам оно бы привело.

Примеры подобных систем и сложных формул даже для простейших случаев нагрузки можно видеть в книге Хаяси.

Такие системы и формулы ему приходится составлять и решать для каждого частного случая нагрузки. Между тем мы покажем, что для балки постоянного сечения условий сопряжения составлять незачем и для *всех* случаев нагрузки вопрос об определении постоянных произвольных приводится к решению системы *двух* уравнений первой степени с *двумя* неизвестными, значит самая сложная и длинная часть выкладок Хаяси отпадает целиком.

Затем мы покажем еще одну методу, где не надо решать для определения постоянных произвольных ни одного уравнения, и расчет ведется прямым ходом, как англичане говорят: „straight forward“.

§ 2. Указав сущность метода, излагаемой Хаяси, и ее главный недостаток, покажем сперва простой прием, которым этот недостаток устраняется, а также такое предварительное преобразование или подготовку уравнения (1), при котором во второй его части будет функция непрерывная.

Расчет надо вести в следующей последовательности.

А. Положим, что на балку действует: а) распределенная нагрузка $F_1(x)$ на погонный сантиметр; б) сосредоточенные силы $P_1, P_2, \dots, P_k$, приложенные в точках, абсциссы коих соответственно $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Надо различать два случая: 1) Закрепление концов балки таково, что под действием данной нагрузки она может находиться в равновесии, не встречая поддержки от грунта. Это имеет место в следующих четырех обычных случаях закрепления концов: оба конца балки заделаны; один конец заделан, другой подперт; один конец заделан, другой свободен; оба конца подперты. 2) Когда равновесие возможно только вследствие поддержания грунтом, т. е. когда оба конца балки свободны и когда один конец подперт, другой свободен.

В этих двух последних случаях надо прежде всего определить оседание бесконечно жесткой (т. е. остающейся прямолинейной) балки, при котором она находится на данном грунте в равновесии.

Пусть будет $y = h_0 + g_0 x$; тогда сила поддержания на 1 см длины в сечении x будет

$$-K(h_0 + g_0 x)$$

и условия статического равновесия под действием внешней нагрузки и поддержания выразятся для балки, оба конца коей свободны, уравнениями

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + \dots + P_k + \int_0^l [F_1(x) - K(h_0 + g_0 x)] dx &= 0 \\ P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_k a_k + \int_0^l [F_1(x) - K(h_0 + g_0 x)] x dx &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

из которых h_0 и g_0 найдутся.

В том случае, когда конец $x=0$ подперт, конец же $x=l$ свободен, то $h_0=0$; предполагая, что опора на уровне грунта, и обозначая через R реакцию опоры, будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} -R + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \int_0^l [F_1(x) - K g_0 x] dx &= 0 \\ P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_k a_k + \int_0^l [F_1(x) - K g_0 x] x dx &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

откуда найдутся R и g_0 .

Полагая в общем уравнении

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F_1(x) \quad (19)$$

$$y = Y + h_0 + g_0 x \quad (20)$$

получим:

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} + KY = F_1(x) - K(h_0 + g_0 x) \quad (21)$$

т. е. уравнение того же самого вида, но для нагрузки

$$F(x) = F_1(x) - K(h_0 + g_0 x) \quad (22)$$

которую будем называть „приведенной“.

Таким образом, для всех случаев будем иметь уравнение вида (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

причем условия статического равновесия балки удовлетворены.

Б. После этого выделяем ту деформацию (прогиб) балки, которая для заданной балки произошла бы от внешней нагрузки при отсутствии поддержания, т. е. при $K=0$; для этого по заданной внешней нагрузке, если надо приведенной, составляем известным образом эпюр срезывающих сил, по нему эпюр моментов, и затем двукратным интегрированием находим прогиб y_0 , если только сразу не найдется для этого случая нагрузки готовых формул в справочниках.

Пусть этот прогиб будет y_0 , это будет известная функция от x , определяемая или таблично, или различными аналитическими выражениями для разных участков; это для нас не важно, но важно то, что эта функция

$$y_0 = \varphi(x) \quad (23)$$

будет не только сама непрерывна, но будет иметь непрерывную производную первого и второго порядка и будет удовлетворять граничным условиям. Значения функции $\varphi(x)$, как уже сказано, будут заданы или аналитически, или графически, или таблично.

Функция эта удовлетворяет уравнению

$$EI \frac{d^4 y_0}{dx^4} = F(x) \quad (24)$$

условиям закрепления (граничным) и условиям сопряжения и составляется прямым расчетом без того, чтобы надо было решать сложные системы уравнений.

В уравнении (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

положим

$$y = y_0 + \eta \quad (25)$$

тогда будет

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} + K\eta = F(x) - EI \frac{d^4 y_0}{dx^4} - Ky_0$$

что, на основании уравнения (24), будет

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} + K\eta = -K\varphi(x) \quad (26)$$

т. е., опять-таки, уравнение того же вида (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

причем $F(x)$ — известная функция, но теперь эта функция не только сама непрерывна, но ее производные первого и второго порядка непрерывны на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$; более того, эта функция удовлетворяет *граничным* условиям.

Таким образом, неизвестная y теперь определяется уравнением (1) и *граничными* условиями, ибо все условия сопряжения и все, что вызывалось особенностями внешней нагрузки, сосредоточенными силами и пр., вошло в функцию y_0 , при определении которой не приходится для удовлетворения этих условий решать сложных систем уравнений со многими неизвестными.

Как видно, этот процесс равносильен тому, что сперва определяется форма равновесия балки под действием заданной внешней нагрузки, отбросив влияние грунта или учитывая среднее его зна-

чение, а затем рассчитывается та поправка, которую надо к этой форме присовокупить, чтобы учесть влияние упругого основания или грунта, т. е. расчет ведется подобно тому, как в астрономии при рассмотрении возмущенного движения.

Итак, в дальнейшем мы можем предполагать, что функция $F(x)$ непрерывна с двумя первыми своими производными и удовлетворяет граничным условиям, в остальном какая угодно.

„Приведение“ нагрузки, указанное в п. А, существенно, ибо иначе уравнения, выражающие граничные условия, недостаточны для полного решения задачи.

Приведение, указанное в п. Б, не является необходимым, и все формулы, выводимые ниже, как будет показано, приложимы и для какой угодно прерывной нагрузки. Но предварительное выделение величины y_0 при сложной нагрузке упрощает расчет, и когда придется вычислять интегралы по правилу трапеций, позволяет брать меньшее число ординат без ущерба точности результата.

§ 3. Составим теперь выражение общего интеграла уравнения

$$y^{IV} + 4y = f(\xi) \quad (4')$$

к решению которого вопрос приводится. Для этого стоит только применить символическую методику, вошедшую теперь в большую часть руководств анализа.

По этой методе уравнение (4') напомним

$$(\delta^4 + 4)y = f(x) \quad (27)$$

следовательно, символически будет

$$y = (\delta^4 + 4)^{-1} f(x) \quad (28)$$

Пусть корни уравнения

$$s^4 + 4 = 0$$

суть

$$s_1 = 1 + i; \quad s_2 = 1 - i; \quad s_3 = -1 + i; \quad s_4 = -1 - i \quad (29)$$

как указано выше, но мы изменили их нумерацию для большей симметрии дальнейших формул.

Алгебраическая дробь

$$\frac{1}{\delta^4 + 4} = \frac{B_1}{\delta - s_1} + \frac{B_2}{\delta - s_2} + \frac{B_3}{\delta - s_3} + \frac{B_4}{\delta - s_4} \quad (30)$$

причем по известным формулам разложения дробей на частные будет

$$B_1 = \frac{1}{4s_1^3}; \quad B_2 = \frac{1}{4s_2^3}; \quad B_3 = \frac{1}{4s_3^3}; \quad B_4 = \frac{1}{4s_4^3} \quad (31)$$

но так как

$$s_1^4 = s_2^4 = s_3^4 = s_4^4 = -4$$

то

$$B_1 = -\frac{1}{16} s_1; \quad B_2 = -\frac{1}{16} s_2; \quad B_3 = -\frac{1}{16} s_3; \quad B_4 = -\frac{1}{16} s_4 \quad (32)$$

поэтому символически будет

$$y = (\delta^4 + 4)^{-1} f(\xi) = B_1 (\delta - s_1)^{-1} f(\xi) + B_2 (\delta - s_2)^{-1} f(\xi) + \\ + B_3 (\delta - s_3)^{-1} f(\xi) + B_4 (\delta - s_4)^{-1} f(\xi) \quad (33)$$

Но символ $(\delta - s_1)^{-1} f(\xi)$ равносильен дифференциальному уравнению

$$(\delta - s_1) z = f(\xi)$$

иначе

$$z' - s_1 z = f(\xi) \quad (34)$$

Это уравнение имеет своим интегрирующим множителем

$$e^{-s_1 \xi}$$

следовательно, будет

$$(e^{-s_1 \xi} z)' = f(\xi) e^{-s_1 \xi}$$

откуда следует

$$z = A_1 e^{s_1 \xi} + e^{s_1 \xi} \int_0^{\xi} e^{-s_1 t} f(t) dt \quad (35)$$

причем A_1 есть постоянная произвольная; буква, по которой интегрирование производится, обозначена через t , во избежание путаницы в дальнейших выкладках, чтобы с ясностью показать, что этот интеграл есть функция своего верхнего предела ξ . За нижний предел взят 0 по причине, которая будет видна ниже.

Так как произведение $-\frac{1}{16}s_1A_1$ есть такая же произвольная постоянная, как и A_1 , то, положив

$$\begin{aligned} -16\Phi(\xi) = & s_1 e^{s_1 \xi} \int_0^{\xi} e^{-s_1 t} f(t) dt + s_2 e^{s_2 \xi} \int_0^{\xi} e^{-s_2 t} f(t) dt + \\ & + s_3 e^{s_3 \xi} \int_0^{\xi} e^{-s_3 t} f(t) dt + s_4 e^{s_4 \xi} \int_0^{\xi} e^{-s_4 t} f(t) dt \end{aligned} \quad (36)$$

получим общий интеграл нашего уравнения в таком виде:

$$y = A_1 e^{s_1 \xi} + A_2 e^{s_2 \xi} + A_3 e^{s_3 \xi} + A_4 e^{s_4 \xi} + \Phi(\xi) \quad (37)$$

Функция $\Phi(\xi)$ может быть короче написана так:

$$-16\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} f(t) \sum s e^{s(\xi-t)} dt$$

причем

$$\sum s e^{s(\xi-t)} = s_1 e^{s_1(\xi-t)} + s_2 e^{s_2(\xi-t)} + s_3 e^{s_3(\xi-t)} + s_4 e^{s_4(\xi-t)}$$

На основании выражений величин s_1, s_2, s_3, s_4 легко проверить равенства

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 &= 0 \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 &= 0 \\ s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + s_4^3 &= 0 \\ s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 + s_4^4 &= -16 \end{aligned}$$

На основании этих равенств имеем:

$$\begin{aligned} -16\Phi'(\xi) &= \int_0^{\xi} f(t) \sum s^2 e^{s(\xi-t)} dt + f(\xi) \sum s = \int_0^{\xi} f(t) \sum s^2 e^{s(\xi-t)} dt \\ -16\Phi''(\xi) &= \int_0^{\xi} f(t) \sum s^3 e^{s(\xi-t)} dt + f(\xi) \sum s^2 = \int_0^{\xi} f(t) \sum s^3 e^{s(\xi-t)} dt \end{aligned} \quad (36')$$

$$\begin{aligned}
 -16 \Phi'''(\xi) &= \int_0^{\xi} f(t) \sum s^4 e^{s(\xi-t)} dt + f(\xi) \sum s^3 = \int_0^{\xi} f(t) \sum s^4 e^{s(\xi-t)} dt = \\
 &= -4 \int_0^{\xi} f(t) \sum e^{s(\xi-t)} dt
 \end{aligned}$$

ибо

$$s_1^4 = s_2^4 = s_3^4 = s_4^4 = -4$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
 -16 \Phi^{IV}(\xi) &= -4 \int_0^{\xi} f(t) \sum s e^{s(\xi-t)} dt - 4f(\xi) \sum e^0 = \\
 &= -16f(\xi) + 64 \Phi(\xi)
 \end{aligned}$$

откуда следует

$$\Phi^{IV}(\xi) + 4 \Phi(\xi) = f(\xi)$$

Это служит проверкою, что функция $\Phi(\xi)$ есть действительно частное решение уравнения (4), какова бы функция $f(\xi)$ ни была при выше указанных ограничениях, коим она удовлетворяет, как и функция $F(x)$.

Затем из формулы (36') видно, что при $\xi=0$ будет

$$\Phi(0)=0; \quad \Phi'(0)=0; \quad \Phi''(0)=0; \quad \Phi'''(0)=0 \quad (36'')$$

Эти равенства показывают, что при составлении граничных условий, относящихся к концу $\xi=0$, в те уравнения, коими эти условия выражаются, функция $\Phi(\xi)$ и ее производные не входят, ибо они равны нулю. Для этого за нижний предел интеграла, коим $\Phi(\xi)$ выражается, и взят нуль.

§ 4. Общий интеграл (37)

$$y = A_1 e^{s_1 \xi} + A_2 e^{s_2 \xi} + A_3 e^{s_3 \xi} + A_4 e^{s_4 \xi} + \Phi(\xi) \quad (37)$$

уравнения (4')

$$y^{IV} + 4y = (\xi)$$

состоит из двух частей: 1) частного решения $\Phi(\xi)$ этого уравнения и 2) общего интеграла

$$Y = A_1 e^{s_1 \xi} + A_2 e^{s_2 \xi} + A_3 e^{s_3 \xi} + A_4 e^{s_4 \xi} \quad (38)$$

уравнения без последнего члена

$$Y^{IV} + 4Y = 0 \quad (39)$$

соответствующего уравнению (4').

Вместо общего интеграла (38) этого уравнения можно взять интеграл

$$Y = B_1 Y_1 + B_2 Y_2 + B_3 Y_3 + B_4 Y_4 \quad (40)$$

в котором B_1, B_2, B_3, B_4 — постоянные произвольные; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 — какие угодно четыре линейно между собою независимые решения уравнения (39).

Для упрощения дальнейших вычислений мы определим эти частные решения так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\begin{aligned} Y_1(0) &= 1; & Y_1'(0) &= 0; & Y_1''(0) &= 0; & Y_1'''(0) &= 0 \\ Y_2(0) &= 0; & Y_2'(0) &= 1; & Y_2''(0) &= 0; & Y_2'''(0) &= 0 \\ Y_3(0) &= 0; & Y_3'(0) &= 0; & Y_3''(0) &= 1; & Y_3'''(0) &= 0 \\ Y_4(0) &= 0; & Y_4'(0) &= 0; & Y_4''(0) &= 0; & Y_4'''(0) &= 1 \end{aligned} \quad (41)$$

Можно бы было, положив, например,

$$Y_1 = A_1 e^{s_1 \xi} + A_2 e^{s_2 \xi} + A_3 e^{s_3 \xi} + A_4 e^{s_4 \xi}$$

составить условия (41) и из них найти A_1, A_2, A_3, A_4 , совершенно так же затем поступить для Y_2 и т. д.; но такой путь был бы сложен, поэтому проще применить общую методу Коши.

Положим, что для уравнения (39)

$$Y^{IV} + 4Y = 0$$

надо составить такое решение, которое при $\xi = 0$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$Y(0) = \eta_0; \quad Y'(0) = \eta_1; \quad Y''(0) = \eta_2; \quad Y'''(0) = \eta_3 \quad (42)$$

где $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ — постоянные. Коши, как одно из приложений своей теории интегральных вычетов, дал для этого следующее правило: пусть будет

$$F(s) = s^4 + 4 \quad (43)$$

характеристическое уравнение для (39).

1°. Составляем функцию

$$F(\eta) = \eta^4 + 4 \quad (44)$$

и затем алгебраическую дробь

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{F(s) - F(\eta)}{s - \eta} \cdot \frac{1}{F(s)}$$

т. е. в нашем случае

$$\frac{s^3\eta^0 + s^2\eta^1 + s\eta^2 + \eta^3}{s^4 + 4}$$

2°. Заменяем в этой дроби показатели степени при букве η соответствующими значками, так что будет

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{s^3\eta_0 + s^2\eta_1 + s\eta_2 + \eta_3}{s^4 + 4} \quad (45)$$

3°. Эту дробь разлагаем на частные, т. е. полагаем

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2} + \frac{B_3}{s - s_3} + \frac{B_4}{s - s_4} \quad (46)$$

определяя коэффициенты по известным формулам

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\varphi(s_1)}{F'(s_1)} = \frac{\eta_0 s_1^3 + \eta_1 s_1^2 + \eta_2 s_1 + \eta_3}{4 s_1^3} = -\frac{1}{16} (\eta_0 s_1^4 + \eta_1 s_1^3 + \eta_2 s_1^2 + \eta_3 s_1) \\ B_2 &= \frac{\varphi(s_2)}{F'(s_2)} = -\frac{1}{16} (\eta_0 s_2^4 + \eta_1 s_2^3 + \eta_2 s_2^2 + \eta_3 s_2) \\ B_3 &= \frac{\varphi(s_3)}{F'(s_3)} = -\frac{1}{16} (\eta_0 s_3^4 + \eta_1 s_3^3 + \eta_2 s_3^2 + \eta_3 s_3) \\ B_4 &= \frac{\varphi(s_4)}{F'(s_4)} = -\frac{1}{16} (\eta_0 s_4^4 + \eta_1 s_4^3 + \eta_2 s_4^2 + \eta_3 s_4) \end{aligned} \quad (47)$$

4°. Полагаем

$$Y = B_1 e^{s_1 \xi} + B_2 e^{s_2 \xi} + B_3 e^{s_3 \xi} + B_4 e^{s_4 \xi} \quad (48)$$

Это и есть искомое решение.

В нашем случае, как видно, будет

$$\begin{aligned} -16 Y = & \eta_0 [s_1^4 e^{s_1 \xi} + s_2^4 e^{s_2 \xi} + s_3^4 e^{s_3 \xi} + s_4^4 e^{s_4 \xi}] + \\ & + \eta_1 [s_1^3 e^{s_1 \xi} + s_2^3 e^{s_2 \xi} + s_3^3 e^{s_3 \xi} + s_4^3 e^{s_4 \xi}] + \\ & + \eta_2 [s_1^2 e^{s_1 \xi} + s_2^2 e^{s_2 \xi} + s_3^2 e^{s_3 \xi} + s_4^2 e^{s_4 \xi}] + \\ & + \eta_3 [s_1 e^{s_1 \xi} + s_2 e^{s_2 \xi} + s_3 e^{s_3 \xi} + s_4 e^{s_4 \xi}] \end{aligned} \quad (49)$$

Для упрощения этих формул заметим, что

$$s_1^4 = s_2^4 = s_3^4 = s_4^4 = -4$$

поэтому множитель при η_0 есть

$$-4 [e^{s_1 \xi} + e^{s_2 \xi} + e^{s_3 \xi} + e^{s_4 \xi}]$$

Стоит только положить в формуле (49)

$$\eta_0 = 1; \quad \eta_1 = 0; \quad \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = 0$$

и мы получим на основании условий (41):

$$Y_1 = \frac{1}{4} [e^{s_1 \xi} + e^{s_2 \xi} + e^{s_3 \xi} + e^{s_4 \xi}] \quad (50)$$

а так как

$$\begin{aligned} e^{s_1 \xi} &= e^{(1+i)\xi} = e^{\xi} e^{i\xi}; & e^{s_3 \xi} &= e^{(-1+i)\xi} = e^{-\xi} e^{i\xi} \\ e^{s_2 \xi} &= e^{(1-i)\xi} = e^{\xi} e^{-i\xi}; & e^{s_4 \xi} &= e^{(-1-i)\xi} = e^{-\xi} e^{-i\xi} \end{aligned}$$

то будет

$$e^{s_1 \xi} + e^{s_2 \xi} = 2 e^{\xi} \cos \xi; \quad e^{s_3 \xi} + e^{s_4 \xi} = 2 e^{-\xi} \cos \xi$$

следовательно,

$$Y_1 = \frac{1}{2} (e^{\xi} + e^{-\xi}) \cos \xi = \operatorname{ch} \xi \cos \xi \quad (51)$$

Совершенно так же, полагая

$$\eta_0 = 0; \quad \eta_1 = 0; \quad \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = 1$$

видим, что множитель при η_3 в формуле (49) равен $-16 Y_4$, вместе с тем этот множитель равен производной множителя при η_0 ; значит будет

$$Y_4 = -\frac{1}{4} Y_1' \quad (52)$$

т. е.

$$Y_4 = \frac{1}{4} \operatorname{ch} \xi \sin \xi - \frac{1}{4} \operatorname{sh} \xi \cos \xi \quad (53)$$

Совершенно подобным образом увидим, что

$$Y_3 = Y'_4 \quad (54)$$

т. е.

$$Y_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi \quad (55)$$

Наконец,

$$Y_2 = Y'_3 \quad (56)$$

т. е.

$$Y_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi \sin \xi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \cos \xi \quad (57)$$

Таким образом, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi \\ Y_2 &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \\ Y_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi \\ Y_4 &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \end{aligned} \quad (58)$$

к которым здесь же присоединим и таблицу производных этих функций (стр. 377).

Вот эти-то функции при расчете балок *постоянного* сечения являются как бы фундаментальными, избавляют от необходимости составлять условия сопряжения при прерывной нагрузке и, таким образом, дают полное решение этого вопроса в самом общем виде, поэтому общий интеграл уравнения (4) мы будем писать так:

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi) \quad (59)$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Таблица производных функций Y_k

k	Y_k	Y'_k	Y''_k	Y'''_k
1	$Y_1 = \operatorname{ch} \xi \cos \xi$	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
2	$Y_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi)$	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
3	$Y_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi$	Y_2	Y_1	$-4Y_4$
4	$Y_4 = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi)$	Y_3	Y_2	Y_1

(58')

§ 5. Остается еще упростить и избавить от мнимых знаков выражение

$$-16 \Phi(\xi) = \int_0^{\xi} [s_1 e^{s_1(\xi-t)} + s_2 e^{s_2(\xi-t)} + s_3 e^{s_3(\xi-t)} + s_4 e^{s_4(\xi-t)}] f(t) dt$$

Сливая множитель в скобках под знаком интеграла с множителем при η_3 в формуле (49), который, как мы видели, равен $-16 Y_4$, видим, что стоящий под знаком интеграла отличается от последнего заменой в выражении Y_4 буквы ξ через $\xi - t$, следовательно, будет

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\xi} [\operatorname{ch}(\xi - t) \sin(\xi - t) - \operatorname{sh}(\xi - t) \cos(\xi - t)] f(t) dt \quad (60) \end{aligned}$$

Развернув и собрав соответственно члены, имеем:

$$Y_4(\xi - t) = 4[Y_4(\xi)Y_1(t) - Y_1(\xi)Y_4(t) + Y_2(\xi)Y_3(t) - Y_3(\xi)Y_2(t)] \quad (61)$$

Положим

$$\begin{aligned} Z_1(\xi) &= -4 \int_0^{\xi} Y_4(t) f(t) dt \\ Z_2(\xi) &= 4 \int_0^{\xi} Y_3(t) f(t) dt \\ Z_3(\xi) &= -4 \int_0^{\xi} Y_2(t) f(t) dt \\ Z_4(\xi) &= 4 \int_0^{\xi} Y_1(t) f(t) dt \end{aligned} \quad (62)$$

тогда будет

$$4\Phi(\xi) = Y_1(\xi) Z_1(\xi) + Y_2(\xi) Z_2(\xi) + Y_3(\xi) Z_3(\xi) + Y_4(\xi) Z_4(\xi) \quad (63)$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (4), опуская аргумент ξ , напишется так:

$$\begin{aligned} y &= A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \\ &+ \frac{1}{4} (Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3 + Y_4 Z_4) \end{aligned} \quad (64)$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные; Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 — функции переменной ξ , определяемые равенствами (62).

В этой форме и имел в виду представить интеграл уравнения (4) Хаяси, составив те уравнения (8), которыми определяются функции Z , по Лагранжевой методе изменения произвольных постоянных, но если не ввести в рассмотрение наших функций Y_k , то выкладка становится столь сложной, что довести ее до конца представляется затруднительным, поэтому эта выкладка у Хаяси, а значит и всех тех авторов, на коих он ссылается, до конца не доведена.

Само собою разумеется, что этими общими формулами следует пользоваться в тех случаях, когда известные простые приемы нахождения частного решения уравнения

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

или ему равносильного

$$y^{IV} + 4y = f(\xi)$$

не применимы, например, когда функция $F(x)$ задана графически или таблично.

При составлении частного решения этими приемами надо заботиться, однако, чтобы функция $\Phi(\xi)$ и ее производные удовлетворяли условиям

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0$$

и были бы определены для всей длины балки, хотя бы и различными аналитическими выражениями для разных участков ее.

В том случае, когда вычисление функций Z по формулам (62) приводит или к слишком сложным выражениям, или же интегралы не выражаются в конечном виде, их весьма просто вычислить по приближению с любой степенью точности, пользуясь, например, формулой трапеций как простейшей.

Для вычисления уклона касательной к упругой линии, изгибающего момента и срезающей силы надо иметь производные функции $\Phi(\xi)$, а именно

$$\Phi'(\xi), \Phi''(\xi) \text{ и } \Phi'''(\xi)$$

Составим выражения этих производных и покажем, что они выражаются через функции $Y_k \tau_k$.

В самом деле $\Phi(\xi)$ есть такое частное решение уравнения (4), которое само и его производные первых трех порядков при $\xi=0$ обращаются в нуль, — такое решение единственное,* и значит каким бы способом оно найдено ни было, результат всегда будет один и тот же.

Представим же себе, что, написав формулу

$$\Phi(\xi) = Z_1 Y_1 + Z_2 Y_2 + Z_3 Y_3 + Z_4 Y_4 \quad (65)$$

или короче

$$\Phi(\xi) = \sum ZY \quad (65')$$

мы стали бы искать неизвестные Z по методе Лагранжа; тогда для их определения мы поставили бы условия, что первые три производные $\Phi(\xi)$ представляются при переменных Z так же, как и при Z постоянных, что и дает первые три уравнения Лагранжевой методы, а именно:

$$\begin{aligned} \sum ZY &= 0 \\ \sum ZY' &= 0 \\ \sum ZY'' &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

так что на основании этих условий будет

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi) &= \sum ZY' = Z_1 Y_1' + Z_2 Y_2' + Z_3 Y_3' + Z_4 Y_4' \\ \Phi''(\xi) &= \sum ZY'' = Z_1 Y_1'' + Z_2 Y_2'' + Z_3 Y_3'' + Z_4 Y_4'' \\ \Phi'''(\xi) &= \sum ZY''' = Z_1 Y_1''' + Z_2 Y_2''' + Z_3 Y_3''' + Z_4 Y_4''' \end{aligned}$$

В § 4 приведены формулы (58'), коими выражаются производные функций Y_k через эти функции; на основании этих выражений получим:

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi) &= -4Z_1 Y_4 + Z_2 Y_1 + Z_3 Y_2 + Z_4 Y_3 \\ \Phi''(\xi) &= -4Z_1 Y_3 - 4Z_2 Y_4 + Z_3 Y_1 + Z_4 Y_2 \\ \Phi'''(\xi) &= -4Z_1 Y_2 - 4Z_2 Y_3 - 4Z_3 Y_4 + Z_4 Y_1 \end{aligned} \quad (67)$$

Эти формулы показывают, что для вычисления написанных производных других функций, кроме Z_k и Y_k , входящих в выражение самого $\Phi(\xi)$, не требуется.

Таким образом, вычисление $\Phi(\xi)$ приводится в общем случае к вычислению функций Z по формуле (62), которое затруднений не представляет.

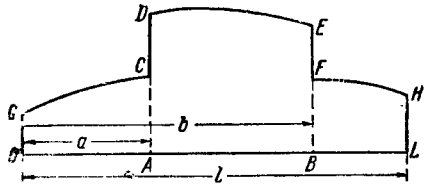
§ 6. Мы предполагали во всех предыдущих рассуждениях, что нагрузка распределена непрерывно по всей длине балки, т. е. что

функция $F(x)$ непрерывна на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$, а значит функция $f(\xi)$ непрерывна на всем протяжении от $\xi=0$ до $\xi=\lambda$.

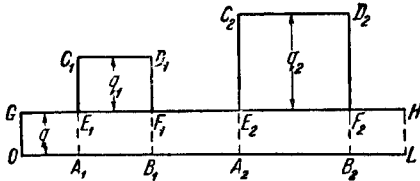
Покажем теперь, каким образом это ограничение для *всех* встречающихся в практике¹ случаев прерывной нагрузки отпадает и как в этом случае выражаются функции Z_k и функция $\Phi(\xi)$.

Типичные встречающиеся в практике случаи прерывной нагрузки следующие.

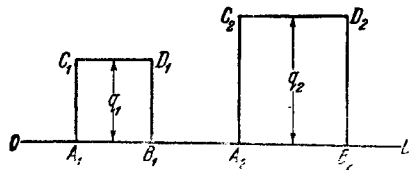
1°. Нагрузка на различных участках балки непрерывна на каждом участке в отдельности, но на разных участках представляется различным образом и в ряде точек имеет скачки конечной величины и схематически изображается, например, для трех участков, чертежом фиг. 1, т. е. на протяжении от $x=0$ до $x=a$ нагрузка изображается кривою GC ,



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

от $x=a$ до $x=b$ — кривою DE , от $x=b$ до $x=l$ — кривою FH ; таких участков может быть сколько угодно.

Наиболее часто встречающиеся случаи такой прерывной нагрузки таковы.

а. По всей балке действует постоянная нагрузка, а на ней местами также постоянная добавочная нагрузка, что, например, изо-

¹ Наши формулы, да и всякие другие, неприменны для таких, например, функций, как $\lg\left(\frac{1}{x-a}\right)$, которые представляют скорее аналитические курьезы, чем функции, нужные для практических приложений. Такие функции из нашего рассмотрения исключаются.

бражается чертежом фиг. 2, причем абсциссы точек A_1, B_1, A_2, B_2 соответственно суть a_1, b_1, a_2, b_2 , или для переменной ξ : $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

6. В частном случае ордината OG может равняться нулю, так что нагружены будут отдельные места балки, как показывает чертеж фиг. 3.

2°. Кроме нагрузок предыдущего рода, имеются нагрузки сосредоточенными силами $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$, приложенными соответственно в точках

$$x = a_1; \quad x = a_2; \quad x = a_3; \dots; \quad x = a_i$$

Мы и рассмотрим все эти типичные случаи, чаще всего встречающиеся в практике.

§ 7. Для первого случая, принимая для простоты три участка, аналитическое задание нагрузки будет таково:

$$\text{для } 0 \leq x \leq a \text{ функция } F(x) = F_1(x)$$

$$\text{для } a \leq x \leq b \text{ функция } F(x) = F_2(x)$$

$$\text{для } b \leq x \leq l \text{ функция } F(x) = F_3(x)$$

соответственно чему будет

$$\text{для } 0 \leq \xi \leq \alpha \text{ функция } f(\xi) = f_1(\xi)$$

$$\text{для } \alpha \leq \xi \leq \beta \text{ функция } f(\xi) = f_2(\xi)$$

$$\text{для } \beta \leq \xi \leq \lambda \text{ функция } f(\xi) = f_3(\xi)$$

причем, как и раньше,

$$\frac{x}{L} = \xi; \quad \frac{a}{L} = \alpha; \quad \frac{b}{L} = \beta; \quad f_1(\xi) = \frac{4}{K} F_1(x) \text{ и т. д.}$$

На основании этих заданий функции Z_k и $\Phi(\xi)$ будут выражаться так.

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha$, на нем $f(\xi) = f_1(\xi)$:

$$Z_{11} = -4 \int_0^{\xi} Y_4(t) f_1(t) dt$$

$$Z_{21} = 4 \int_0^{\xi} Y_3(t) f_1(t) dt$$

$$Z_{31} = -4 \int_0^{\xi} Y_2(t) f_1(t) dt$$

$$Z_{41} = 4 \int_0^{\xi} Y_1(t) f_1(t) dt$$

$$\Phi(\xi) = Z_{11}Y_1 + Z_{21}Y_2 + Z_{31}Y_3 + Z_{41}Y_4 \quad (69)$$

Второй участок: $\alpha \leq \xi \leq \beta$, на нем $f(\xi) = f_2(\xi)$:

$$Z_{12} = -4 \int_0^{\alpha} Y_4(t) f_1(t) dt - 4 \int_{\alpha}^{\xi} Y_4(t) f_2(t) dt$$

$$Z_{22} = 4 \int_0^{\alpha} Y_3(t) f_1(t) dt + 4 \int_{\alpha}^{\xi} Y_3(t) f_2(t) dt$$

$$Z_{32} = -4 \int_0^{\alpha} Y_2(t) f_1(t) dt - 4 \int_{\alpha}^{\xi} Y_2(t) f_2(t) dt$$

$$Z_{42} = 4 \int_0^{\alpha} Y_1(t) f_1(t) dt + 4 \int_{\alpha}^{\xi} Y_1(t) f_2(t) dt$$

$$\Phi(\xi) = Z_{12}Y_1 + Z_{22}Y_2 + Z_{32}Y_3 + Z_{42}Y_4 \quad (71)$$

Третий участок: $\beta \leq \xi \leq l$, на нем $f(\xi) = f_3(\xi)$:

$$Z_{13} = -4 \int_0^{\alpha} Y_4(t) f_1(t) dt - 4 \int_{\alpha}^{\beta} Y_4(t) f_2(t) dt - 4 \int_{\beta}^{\xi} Y_4(t) f_3(t) dt$$

$$Z_{23} = 4 \int_0^{\alpha} Y_3(t) f_1(t) dt + 4 \int_{\alpha}^{\beta} Y_3(t) f_2(t) dt + 4 \int_{\beta}^{\xi} Y_3(t) f_3(t) dt \quad (72)$$

$$Z_{33} = -4 \int_0^{\alpha} Y_2(t) f_1(t) dt - 4 \int_{\alpha}^{\beta} Y_2(t) f_2(t) dt - 4 \int_{\beta}^{\xi} Y_2(t) f_3(t) dt$$

$$Z_{43} = 4 \int_0^{\alpha} Y_1(t) f_1(t) dt + 4 \int_{\alpha}^{\beta} Y_1(t) f_2(t) dt + 4 \int_{\beta}^{\xi} Y_1(t) f_2(t) dt$$

$$\Phi(\xi) = Z_{13}Y_1 + Z_{23}Y_2 + Z_{33}Y_3 + Z_{43}Y_4 \quad (73)$$

Совершенно подобным же образом составляются общие формулы для любого числа участков.

§ 8. Переходя к рассмотрению частных случаев нагрузки, заметим, что тогда проще пользоваться формулой (60)

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t) dt$$

ибо в этих частных случаях функция $f(t)$ на отдельных участках имеет постоянное значение, на основании же таблицы производных функций Y_k имеем:

$$\int Y_4(\xi - t) dt = \frac{1}{4} Y_1(\xi - t) + C \quad (74)$$

причем C — произвольная постоянная.

На основании этой формулы имеем следующие результаты.

а. *Нагрузка постоянная по всей длине балки:*

$0 \leq \xi \leq \lambda$, функция $f(\xi) = q$

$$\Phi(\xi) = q \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) dt = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \quad (75)$$

б. *Нагрузка, постоянная на протяжении от $x = a$ до $x = b$, в остальных местах равна нулю.*

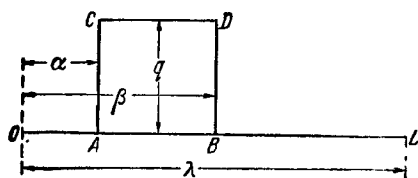
Пусть $\frac{a}{L} = \alpha$; $\frac{b}{L} = \beta$, тогда функция $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 4, следовательно, имеется три участка.

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно,

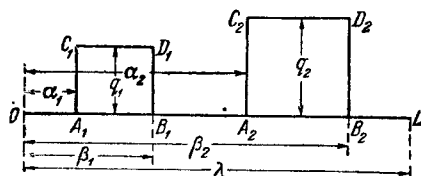
$$\Phi(\xi) = 0$$

Второй участок: $\alpha \leq \xi \leq \beta$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t) dt = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\xi} = \\ &= q \int_{\alpha}^{\xi} Y_4(\xi - t) dt = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi - \alpha)] \end{aligned} \quad (76)$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Третий участок: $\beta \leq \xi \leq l$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\xi} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\xi} = \\ &= q \int_{\alpha}^{\beta} Y_4(\xi - t) dt = \frac{1}{4} q [Y_1(\xi - \beta) - Y_1(\xi - \alpha)] \end{aligned} \quad (77)$$

в. Нагрузка состоит из двух местных равномерно распределенных неравных нагрузок.

Положим, что в этом случае функция $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 5 и значит имеется пять участков.

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно,

$$\Phi(\xi) = 0$$

Второй участок: $\alpha_1 \leq \xi \leq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q_1$, следовательно,

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\xi} = q_1 \int_{\alpha_1}^{\xi} Y_4(\xi - t) dt = \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \quad (78)$$

Третий участок: $\beta_1 \leq \xi \leq \alpha_2$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\xi} = q_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} Y_4(\xi - t) dt = \\ &= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \end{aligned} \quad (79)$$

Четвертый участок: $\alpha_2 < \xi \leq \beta_2$, на нем $f(\xi) = q_2$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\xi} = \\ &= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [1 - Y_1(\xi - \alpha_2)] \end{aligned} \quad (80)$$

Пятый участок: $\beta_2 \leq \xi \leq \lambda$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} + \int_{\beta_2}^{\xi} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} = \\ &= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [Y_1(\xi - \beta_2) - Y_1(\xi - \alpha_2)] \end{aligned} \quad (81)$$

Само собою очевидно, каким образом эти формулы обобщаются на любое число участков.

г. *Нагрузка состоит из равномерно распределенной по всей длине балки и местной на одном участке.*

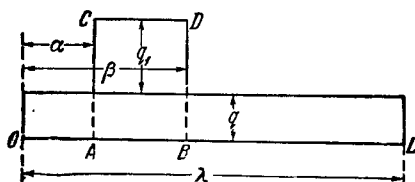
Пусть $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 6. В этом случае, очевидно, $\Phi(\xi)$ получится как „наложение“ на равномерную нагрузку q по всей длине балки местной нагрузки q_1 .

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

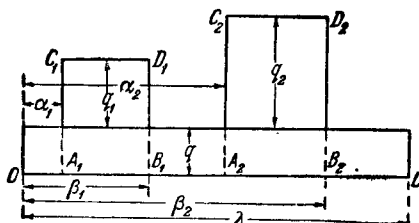
$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \quad (82)$$

Второй участок: $\alpha_1 \leq \xi \leq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q + q_1$, следовательно,

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \quad (83)$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Третий участок: $\beta_1 \leq \xi \leq \lambda$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \quad (84)$$

д. Нагрузка состоит из равномерно распределенной на всей длине балки и местной на двух участках.

Пусть $f(\xi)$ изображается фиг. 7, так что получается пять участков.

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \quad (85)$$

Второй участок: $\alpha_1 \leq \xi \leq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q + q_1$, следовательно,

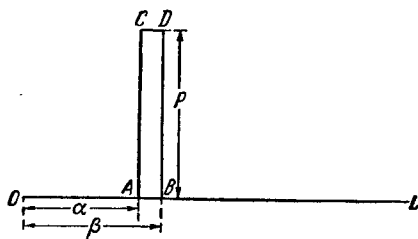
$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \quad (86)$$

Третий участок: $\beta_1 \leq \xi \leq \alpha_2$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

$$(\Phi \xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \quad (87)$$

Четвертый участок: $\alpha_2 \leq \xi \leq \beta_2$, на нем $f(\xi) = q + q_2$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \\ & + \frac{1}{4} q_2 [1 - Y_1(\xi - \alpha_2)] \end{aligned} \quad (88)$$



Фиг. 8.

Пятый участок: $\beta_2 \leq \xi \leq \lambda$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \\ & + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \\ & + \frac{1}{4} q_2 [Y_1(\xi - \beta_2) - Y_1(\xi - \alpha_2)] \end{aligned} \quad (89)$$

Само собою очевидно, как эти формулы обобщаются на любое число местных нагрузок поверх равномерно распределенной по всей длине балки.

Заметим, что все эти формулы пишутся сразу, без всяких вычислений, не требуя составления каких бы то ни было уравнений, выражающих условия сопряжения различных участков, а таких уравнений при обычной методе пришлось бы для последнего случая составить 16 с 16 неизвестными.

§ 9. Остается показать, как представляется функция $\Phi(\xi)$ для сосредоточенных сил.

Рассмотрим сперва одну силу, приложенную в точке $x = a$. Для этого стоит только обратиться к случаю нагрузки, изображенному на чертеже фиг. 8, и вообразить, что точки A и B, соответствующие абсциссам

$$x = a \text{ и } x = b$$

неопределенно сближаются, полная же величина нагрузки, т. е. площадь $ACDB$, остается при этом постоянно равной P .

Обозначая ординату

$$AC = BD = P$$

и разность

$$b - a = s$$

будем, следовательно, иметь равенство

$$ps = P \quad (*)$$

При переходе от уравнения (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

к переменной

$$\xi = \frac{x}{L}$$

и уравнению (4)

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = f(\xi)$$

будет

$$f(\xi) = \frac{4}{K} F(x)$$

значит в нашем случае в уравнении

$$y^{IV} + 4y = q$$

будет

$$q = \frac{4p}{K} \quad (90)$$

Положив

$$\frac{a}{L} = \alpha; \quad \frac{b}{L} = \beta; \quad \frac{s}{L} = \sigma$$

будем иметь:

$$\beta = \alpha + \sigma$$

при условии

$$p\sigma L = P \quad (91)$$

Обращаясь к формулам (77), (78) и (79), видим, что при всяком σ будет:

1°. При $0 \leq \xi \leq \alpha$

$$\Phi(\xi) = 0$$

2°. При $\alpha \leq \xi \leq \alpha + \sigma$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q - \frac{1}{4} q Y_1(\xi - \alpha)$$

3°. При $\alpha + \sigma \leq \xi \leq \lambda$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [Y_1(\xi - (\alpha + \sigma)) - Y_1(\xi - \alpha)]$$

При бесконечно малом σ первый участок остается без перемены, второй в пределе исчезает, для третьего, который тогда становится вторым, будет

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q \frac{\partial}{\partial \alpha} [Y_1(\xi - \alpha)] \sigma = q \sigma Y_4(\xi - \alpha) = \frac{4ps}{KL} Y_4(\xi - \alpha)$$

но произведение ps по условию остается при неопределенном уменьшении s постоянным и равным P , значит в пределе будет

$$\Phi(\xi) = \frac{4P}{KL} Y_4(\xi - \alpha) \quad (92)$$

Положим теперь, что имеется несколько сосредоточенных сил

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_j$$

приложенных соответственно в точках

$$x = a_1; \quad x = a_2; \quad x = a_3; \quad \dots; \quad x = a_j$$

для которых значения переменной ξ суть

$$\frac{a_1}{L} = \alpha_1; \quad \frac{a_2}{L} = \alpha_2; \quad \frac{a_3}{L} = \alpha_3; \quad \dots; \quad \frac{a_j}{L} = \alpha_j$$

Составив схему нагрузки и распределения участков (фиг. 9), получим:

Первый участок: $0 \leq \xi \leq \alpha_1$,

$$\Phi(\xi) = 0$$

Второй участок: $\alpha_1 \leq \xi \leq \alpha_2$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4P_1}{KL} Y_4(\xi - \alpha_1)$$

Третий участок: $\alpha_2 \leq \xi \leq \alpha_3$,

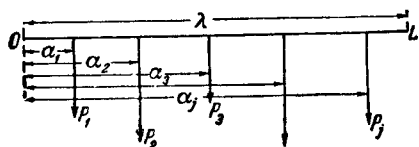
$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL} [P_1 Y_4(\xi - \alpha_1) + P_2 Y_4(\xi - \alpha_2)]$$

.....

(93)

(j-1)-й участок: $\alpha_{j-1} \leq \xi \leq \alpha_j$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL} \sum_{n=1}^{n=j-1} P_n Y_4(\xi - \alpha_n)$$



j-й участок: $\alpha_j \leq \xi \leq \lambda$,

Фиг. 9.

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL} \sum_{n=1}^{n=j} P_n Y_4(\xi - \alpha_n)$$

Как видно, и эти формулы пишутся сразу, без всяких вычислений, и не требуют ни составления, ни решения каких бы то ни было уравнений, выражающих условия сопряжения.

§ 10. Мы привели в § 5 формулы (67), дающие общие выражения производных $\Phi'(\xi)$, $\Phi''(\xi)$ и $\Phi'''(\xi)$, которые нужны как для составления граничных условий, так и для вычисления изгибающих моментов и срезающих сил.

Все эти формулы являются в сущности следствием общего выражения (60)

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t) dt$$

от которого, если брать производную по переменной ξ , получим:

$$\Phi'(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) dt + Y_4(0) f(\xi) \quad (94)$$

но $Y_4(0) = 0$, поэтому будет

$$\Phi'(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) dt = \int_0^{\xi} Y_3(\xi - t) f(t) dt \quad (95)$$

Совершенно так же будет

$$\Phi''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4''(\xi - t) f(t) dt = \int_0^{\xi} Y_2(\xi - t) f(t) dt \quad (96)$$

$$\Phi'''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'''(\xi - t) f(t) dt = \int_0^{\xi} Y_1(\xi - t) f(t) dt \quad (97)$$

ибо

$$Y_3(0) = Y_2(0) = 0$$

Все эти выражения безусловно справедливы, когда функция $f(\xi)$ в пределах изменения переменной ξ от 0 до λ повсюду непрерывна, но для функции разрывной эти формулы требуют проверки.

Таким образом, надо рассмотреть, которые же из формул (94)–(97) имеют место для прерывной нагрузки и для какой; для этого надо обратиться к самому определению производной

$$\Phi'(\xi) = \text{пред.} \frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$$

и, составив отношение

$$\frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$$

перейти к его пределу при $\varepsilon = 0$.

Удерживая лишь члены первого порядка относительно ε , получим:

$$\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi) = \int_0^{\xi + \varepsilon} Y_4(\xi + \varepsilon - t) f(t) dt - \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\xi} [Y_4(\xi + \varepsilon - t) - Y_4(\xi - t)] f(t) dt + \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} Y_4(\xi + \varepsilon - t) f(t) dt = \\
&= \varepsilon \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) dt + \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} Y_4(\xi - t) f(t) dt + \varepsilon \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} Y_4'(\xi - t) f(t) dt \quad (98)
\end{aligned}$$

Но по теореме о средней будет

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} Y_4(\xi - t) f(t) dt &= Y_4(-\theta \varepsilon) \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} f(t) dt & 0 < \theta < 1 \\
\int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} Y_4'(\xi - t) f(t) dt &= Y_4'(-\theta_1 \varepsilon) \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} f(t) dt & 0 < \theta_1 < 1
\end{aligned} \quad (99)$$

Когда функция $f(t)$ такова, что при $t = \xi$ она претерпевает разрыв непрерывности, то в нашем случае этот разрыв может быть двоякого рода:

1°. При переходе через значение $t = \xi$ функция $f(t)$ делает скачок конечной величины, как на фиг. 1—7.

2°. При точке $t = \alpha$ приложена сосредоточенная сила (фиг. 8, 9).

В первом случае при бесконечно малом ε будет при обычном обозначении

$$\int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} f(t) dt = \varepsilon f(\xi + \theta \varepsilon) = \varepsilon f(\xi) + \text{бесконечно малая высшего порядка}$$

причем $f(\xi) = q_1$ есть величина конечная.

Во втором случае хотя и можно было бы рассматривать сосредоточенную силу как предельный случай „криволинейной“ нагрузки при условии, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\alpha + \sigma} f(t) dt = q$$

но проще ограничиться случаем нагрузки по „прямоугольнику“, как показано в § 9, а тогда все доказанное для такой прерывной нагрузки будет относиться и к силам сосредоточенным.

Итак, для разрыва первого рода имеем:

$$\frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon} = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) dt + q_1 Y_4(-\theta\varepsilon) + q_1 Y_4'(-\theta\varepsilon) \varepsilon$$

В пределе при $\varepsilon = 0$ будет $\theta\varepsilon = \theta_1\varepsilon = 0$, но

$$Y_4(0) = 0; \quad Y_4'(0) = 0$$

и останется

$$\text{пред.} \frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon} = \Phi'(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) dt \quad (100)$$

Ввиду того, что

$$Y_4'(0) = Y_4''(0) = 0 \quad \text{и} \quad Y_4'''(0) = 1$$

совершенно так же будет

$$\begin{aligned} \Phi''(\xi) &= \int_0^{\xi} Y_4''(\xi - t) f(t) dt \\ \Phi'''(\xi) &= \int_0^{\xi} Y_4'''(\xi - t) f(t) dt \end{aligned} \quad (101)$$

и значит при разрывах *первого* рода имеют место *все* наши формулы, как и для непрерывной функции $f(t)$. Таким образом, в частности для нагрузки „по прямоугольнику“, имеет место формула (77), поэтому, рассматривая сосредоточенную силу как предельный случай такой „прямоугольной“ нагрузки, видим, что формула (92) справедлива, когда справедливы формулы (100) и (101), т. е. для производных до третьего порядка включительно, которые только нам и нужны.

§ 11. Покажем теперь, каким образом определяются постоянные произвольные по граничным условиям.

Возможных комбинаций при обычных условиях закрепления концов балки (граничные условия) *шесть*, а именно:

№	Род закрепления	
	конца $x = a$	конца $x = l$
1	Заделан	Заделан
2	"	Подперт
3	"	Свободен
4	Подперт	Подперт
5	"	Свободен
6	Свободен	"

Соответственно этим случаям граничные условия выражаются так:

№	Конец $\xi = 0$	Конец $\xi = \lambda$
1	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$	$y(\lambda) = 0; \quad y'(\lambda) = 0$
2	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$	$y(\lambda) = 0; \quad y''(\lambda) = 0$
3	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0; \quad y'''(\lambda) = 0$
4	$y(0) = 0; \quad y''(0) = 0$	$y(\lambda) = 0; \quad y''(\lambda) = 0$
5	$y(0) = 0; \quad y''(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0; \quad y'''(\lambda) = 0$
6	$y''(0) = 0; \quad y'''(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0; \quad y'''(\lambda) = 0$

Мы имели

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi)$$

Возьмем первый случай. Уравнения для определения постоянных будут

$$\begin{aligned}
 0 &= A_1 Y_1(0) + A_2 Y_2(0) + A_3 Y_3(0) + A_4 Y_4(0) + \Phi(0) \\
 0 &= A_1 Y_1'(0) + A_2 Y_2'(0) + A_3 Y_3'(0) + A_4 Y_4'(0) + \Phi'(0) \\
 0 &= A_1 Y_1(\lambda) + A_2 Y_2(\lambda) + A_3 Y_3(\lambda) + A_4 Y_4(\lambda) + \Phi(\lambda) \\
 0 &= A_1 Y_1'(\lambda) + A_2 Y_2'(\lambda) + A_3 Y_3'(\lambda) + A_4 Y_4'(\lambda) + \Phi'(\lambda)
 \end{aligned} \tag{102}$$

Обращаясь к таблице (41) и формулам (36''), видим, что

$$\begin{aligned} Y_1(0) &= 1; \quad Y_2(0) = 0; \quad Y_3(0) = 0; \quad Y_4(0) = 0; \quad \Phi(0) = 0 \\ Y_1'(0) &= 0; \quad Y_2'(0) = 1; \quad Y_3'(0) = 0; \quad Y_4'(0) = 0; \quad \Phi'(0) = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

поэтому из первых двух уравнений следует

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 0 \quad (104)$$

и остается два уравнения

$$\begin{aligned} A_3 Y_3(\lambda) + A_4 Y_4(\lambda) &= -\Phi(\lambda) \\ A_3 Y_3'(\lambda) + A_4 Y_4'(\lambda) &= -\Phi'(\lambda) \end{aligned} \quad (105)$$

с неизвестными A_3 и A_4 , какова бы нагрузка ни была, и мы получаем:

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\Phi'(\lambda) Y_4(\lambda) - \Phi(\lambda) Y_4'(\lambda)}{Y_3(\lambda) Y_4'(\lambda) - Y_4(\lambda) Y_3'(\lambda)} \\ A_4 &= \frac{\Phi(\lambda) Y_3'(\lambda) - \Phi'(\lambda) Y_3(\lambda)}{Y_3(\lambda) Y_4'(\lambda) - Y_4(\lambda) Y_3'(\lambda)} \end{aligned} \quad (106)$$

и значит будет

$$y = A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi) \quad (107)$$

Нужный для расчета балки изгибающий момент найдется по формуле

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{EI}{L^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{EI}{L^2} [A_3 Y_3'' + A_4 Y_4'' + \Phi''(\xi)] \quad (108)$$

срезающее усилие — по формуле

$$S = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} = \frac{EI}{L^3} [A_3 Y_3''' + A_4 Y_4''' + \Phi'''(\xi)] \quad (109)$$

какова бы нагрузка ни была.

Выражения производных функций Y_k и производных функции $\Phi(\xi)$ даны выше.

Какова бы ни была нагрузка — непрерывная, прерывная, сосредоточенными силами — решение вопроса, как видно, не требует

составления многочисленных уравнений, выражающих условия сопряжения в местах разрыва нагрузки, и число постоянных произвольных при любых условиях закрепления концов будет два, для которых и пишутся два уравнения с двумя неизвестными для конца $\xi = \lambda$.

Нет надобности обращаться к системе (102), чтобы написать решение

$$y = A_i Y_i + A_j Y_j + \Phi(\xi) \quad (*)$$

с двумя произвольными постоянными (ибо другие две равны нулю по условиям закрепления конца $\xi = 0$), стоит только, взглянув на схему (41), выбрать те две функции, которые удовлетворяют обоим граничным условиям для конца $\xi = 0$; эти две функции и войдут в состав формулы (*), представляющей общее решение, удовлетворяющее граничным условиям при $\xi = 0$. О функции $\Phi(\xi)$ заботиться нечего, ибо при $\xi = 0$ как эта функция, так и три первые ее производные равны нулю, и значит она всякой комбинации граничных условий при $\xi = 0$ удовлетворяет.

При обычном способе решения, излагаемом Хаяси, а значит и всеми авторами, на коих он ссылается, в общем случае, если балка по роду нагрузки (т. е. мест ее разрыва и приложения сосредоточенных сил) подразделяется на k участков, то для определения постоянных произвольных надо составить: *четыре* уравнения, выражающих условия граничные, и по *четыре* уравнения для каждой из $k - 1$ точек сопряжения, а всего $4k$ уравнений с таковым же числом неизвестных.

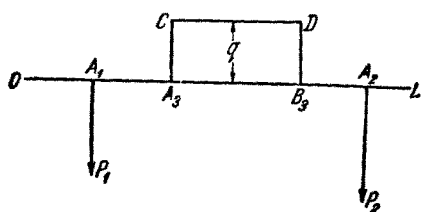
По нашей же методе при всяком числе участков надо составить, как уже сказано, два и только два уравнения с двумя неизвестными.

Например, для балки, схема нагрузки которой такова, как показано на фиг. 10, состоящей из пяти участков, пришлось бы составить, по Хаяси, двадцать уравнений с двадцатью неизвестными.

Решение таких систем требует громадной вычислительной работы и специальных приемов.

§ 12. В случае симметричной нагрузки очевидно, что и форма упругой линии будет симметрична относительно точки $\xi = \frac{\lambda}{2}$, т. е. середины балки; понятно, что и расчет тогда надо вести только для половины от $\xi = 0$ до $\xi = \frac{\lambda}{2}$, причем в точке $\xi = \frac{\lambda}{2}$ должна быть а) касательная горизонтальна и б) срезающая сила равна нулю; значит граничными условиями для этой точки будут уравнения

$$\text{при } \xi = \frac{\lambda}{2} \text{ должно быть } y' \left(\frac{\lambda}{2} \right) = 0 \text{ и } y''' \left(\frac{\lambda}{2} \right) = 0$$



Фиг. 10.

Все остальное остается без перемены.

Понятно, что при симметрии сокращается самое число участков; так будет: вместо трех — два, вместо пяти — три, и т. п.

§ 13. Чтобы дать пример приложения изложенной выше общей

методы, возьмем известную задачу о железнодорожной шпале. Пусть расстояние рельса от конца шпалы равно a , длина шпалы l и пусть $b = \frac{1}{2} l$.

Так как оба конца шпалы свободны, то надо сперва сделать „приведение“ по формулам (17), которые в нашем случае, означая давление на рельс через P , будут

$$2P - K \int_0^l (h_0 + g_0 x) dx = 0$$

$$Pa + P(l - a) - K \int_0^l (h_0 + g_0 x) x dx = 0$$

и дают

$$g_0 = 0; \quad h_0 = \frac{2P}{Kl} = \frac{P}{Kb} \quad (110)$$

что по симметрии нагрузки можно было бы написать сразу.

Таким образом, нагрузка $F(x)$ такова:

1°. Равномерно распределенная по всей длине шпалы и равная

$$-Kh_0 = p = -\frac{P}{b}$$

2°. Сосредоточенная P в точках $x=a$ и $x=l-a$.

Следовательно, нагрузка $f(\xi)$ будет:

1°. Равномерная на всей длине балки и равная

$$q = -\frac{4P}{Kb}$$

2°. Сосредоточенная в точках

$$\xi = \frac{a}{L} = \alpha \quad \text{и} \quad \xi = \frac{l-a}{L} = \lambda - \alpha \quad \text{и} \quad \text{равная} \quad \frac{4P}{KL}$$

Так как нагрузка симметричная, то достаточно рассмотреть половину шпалы от $\xi=0$ до $\xi=\frac{b}{L}=\beta=\frac{\lambda}{2}$ соответственно чему граничные условия будут

$$y''(0)=0; \quad y'''(0)=0 \quad (111)$$

$$y'(\beta)=0; \quad y'''(\beta)=0 \quad (112)$$

следовательно, величина y будет вида

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \Phi(\xi) + h_0$$

Функция будет:

1°. Для равномерной нагрузки q , по формуле (76)

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q - \frac{1}{4} Y_1(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq \lambda)$$

2°. Для сосредоточенной нагрузки, по формуле (92), имеем:

$$0 \leq \xi \leq \alpha, \quad \Phi(\xi) = 0$$

$$0 \leq \xi \leq \lambda - \alpha, \quad \Phi(\xi) = \frac{4P}{KL} Y_4(\xi - \alpha)$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned}
 0 \leq \xi \leq \alpha, \quad y_1 &= h_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \\
 \alpha \leq \xi \leq \beta, \quad y_2 &= h_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \\
 &\quad + \frac{4P}{KL} Y_4(\xi - \alpha)
 \end{aligned}$$

Но, заметив, что

$$h = \frac{P}{Kb} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} q = -\frac{P}{Kb}$$

и положив

$$A_1 - \frac{1}{4} q = A \quad \text{и} \quad A_1 = B$$

напишем предыдущие формулы так:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \xi \leq \alpha: \quad y_1 &= AY_1 + BY_2 \\
 \alpha \leq \xi \leq \beta: \quad y_2 &= AY_1 + BY_2 + \frac{4P}{KL} Y_4(\xi - \alpha)
 \end{aligned} \tag{113}$$

причем, где аргумент не написан, подразумевается ξ . По симметрии нагрузки, как уже сказано, граничные условия суть

$$y'_2(\beta) = 0 \quad \text{и} \quad y''_2(\beta) = 0$$

Выполняя дифференцирование и заменив¹ производные функций Y_k самими функциями, получим:¹

¹ Заметим, что, на основании второго из граничных условий (114), условие статического равновесия балки

$$P = K \int_0^{\frac{l}{2}} y dx$$

будет выполнено само собою. В самом деле

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\beta} y d\xi &= \int_0^{\alpha} [AY_1(\xi) + BY_2(\xi)] d\xi + \frac{4P}{KL} \int_{\alpha}^{\beta} Y_4(\xi - \alpha) d\xi = \\
 &= AY_2(\beta) + BY_3(\beta) - \frac{P}{KL} [Y_1(\beta - \alpha) - 1] = -\frac{P}{KL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4AY_4(\beta) - BY_1(\beta) &= \frac{4P}{KL} Y_3(\beta - \alpha) \\
 4AY_2(\beta) + 4BY_3(\beta) &= \frac{4P}{KL} Y_1(\beta - \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4P}{KL} \cdot \frac{4Y_3(\beta - \alpha) Y_3(\beta) + Y_1(\beta - \alpha) Y_1(\beta)}{\Delta} \\
 B &= \frac{4P}{KL} \cdot \frac{4Y_4(\beta) Y_1(\beta - \alpha) - 4Y_3(\beta - \alpha) Y_2(\beta)}{\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{115}$$

$$\Delta = 16Y_4(\beta) Y_3(\beta) + 4Y_1(\beta) Y_2(\beta) = \operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta = \operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda$$

как то получается, если заменить Y_k их выражениями и сделать приведение членов.

Формулы (113) и (115) и дают полное решение задачи и притом в виде, удобном для численных вычислений.

Эта задача решена обычною метою в книге Хаяси. Вместо наших уравнений (113) он пишет вследствие симметрии

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{1}{2} [(A_1 e^{\xi} + A_2 e^{-\xi}) \cos \xi + 2A_3 \operatorname{ch} \xi \sin \xi] \\
 y_2 &= \frac{1}{2} [(B_1 e^{\xi_1} + B_2 e^{-\xi_1}) \cos \xi_1 + (B_2 e^{\xi_1} + B_4 e^{-\xi_1}) \sin \xi_1]
 \end{aligned}
 \tag{116}$$

причем $\xi_1 = \xi - \alpha$ (мы несколько изменили обозначения) и для определения семи произвольных постоянных составляет семь уравнений, выражающих граничные условия и условия сопряжения.

Но

$$\int_0^{\beta} y d\xi = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{l}{2}} y dx$$

следовательно,

$$K \int_0^{\frac{l}{2}} y dx = P \tag{113'}$$

как и должно быть.

Решения этих уравнений получаются у него, например, в таком виде:

$$A_1 = \frac{P}{KL (\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda)} [\operatorname{ch} \alpha \cos (\lambda - \alpha) + \sin (\lambda - \alpha) + \\ + \operatorname{ch} (\lambda - \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha) + \\ + e^{-\alpha} \cos (\lambda - \alpha) + e^{-(\lambda - \alpha)} \cos \alpha]$$

и т. п., само собою разумеется, после длинных выкладок и приведений. Затем уравнение упругой линии для первого участка он пишет в таком виде:

$$y = y_1 = \frac{P}{KL [\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda]} \{ \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \xi \cos (\lambda - \alpha - \xi) + \\ + \cos \alpha \cos \xi \operatorname{ch} (\lambda - \alpha - \xi) + \\ + \operatorname{ch} (\lambda - \alpha) \operatorname{ch} \xi \cos (\alpha - \xi) + \cos (\lambda - \alpha) \cos \xi \operatorname{ch} (\alpha - \xi) + \\ + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \xi \cos \xi \sin (\lambda - \alpha) - \cos \alpha \sin \xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} (\lambda - \alpha) + \\ + \sin \alpha \cos \xi \operatorname{ch} (\lambda - \alpha) \operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \xi \cos (\lambda - \alpha) \sin \xi \}$$

Ясно, что эта формула и все другие ей подобные для численных вычислений непригодна по своей сложности, и мы увидим, что в числах Хаяси имеется существенная ошибка.

Чтобы избавиться от ошибок в вычислении, необходимо производить ту непосредственную проверку, которая показана ниже, для чего надо вычислить достаточное число ординат упругой линии, а по формуле вроде приведенной выше это вычисление потребовало бы громадной работы. Между тем вычисление по нашим формулам (13) весьма просто и хорошо укладывается в схему, как то и показано на численном примере, приведенном со всею подробностью.

Для численного примера возьмем дубовую железнодорожную шпалу прусского образца, для которой в книге Хаяси приведены следующие численные данные:

$$a = 59.65 \text{ см}, \quad l = 270 \text{ см}, \quad b = \frac{l}{2} = 135 \text{ см}$$

$$I = \frac{25 \cdot 16^3}{12} = 8533 \text{ см}^4; \quad E = 100000 \text{ кг/см}^2$$

(в книге напечатано $E=1000000$, но в расчетах взято верное значение).

$$K=8 \cdot 25=200; \quad P=10000 \text{ кг}$$

Затем по табличке, помещенной в книге, получено

$$y(a)=0.856 \text{ см}, \quad y(b)=0.156 \text{ см}$$

и еще отдельно там же исчислена разность

$$y(a)-y(b)=1.75 \cdot 10^{-3} \cdot 400=0.70 \text{ см}$$

Чтобы проверить эти числа по нашим формулам, надо произвести следующие вычисления, которые приводим полностью по логарифмам с точностью, далеко превышающей практическую потребность, но в данном случае необходимой, чтобы не было сомнений в ошибочности результатов Хаяси:

$$L^4 = \frac{4FI}{K} = \frac{4 \cdot 8533 \cdot 100000}{200} = 17066000$$

$$4 \lg L = 7.23213; \quad \lg L = 1.80803; \quad \text{clg } L = \bar{2}.19197$$

$$\lg l = 2.43136, \quad \lg \lambda = 0.62333, \quad \lambda = 4.2008, \quad \text{sh } \lambda = 33.37$$

$$\lg a = 1.77561, \quad \lg \alpha = \bar{1}.96758, \quad \alpha = 0.9281, \quad \sin \lambda = -0.87$$

$$\lg b = 2.13033, \quad \lg \beta = 0.32230, \quad \beta = 2.1004, \quad \Delta = 32.50$$

$$\lg(b-a) = 1.87708, \quad \lg(\beta-\alpha) = 0.06905, \quad \beta-\alpha = 1.1723, \quad \lg \Delta = 1.51188$$

$$\frac{4P}{K} = \frac{40000}{200} = 200, \quad \lg \frac{4P}{K} = 2.30103$$

$$\text{clg } L = \bar{2}.19197$$

$$\lg \frac{4P}{KL} = 0.49300; \quad \frac{4P}{KL} = 3.112$$

$$\text{clg } \Delta = \bar{2}.48812$$

$$\lg \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} = \bar{2}.98112 = \lg N$$

Вычисление A .¹

$$A = \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} [4Y_3(\beta - \alpha) Y_3(\beta) + Y_1(\beta - \alpha) \cdot Y_1(\beta)]$$

$\beta - \alpha = 1.1723$	sh sin	1.3455	lg 0.12889	ch cos	0.6867	lg 1.83677
$\beta = 2.1004$	sh sin	3.4723	0.54062	ch cos	-2.0945	0.32108 n
			lg I = 0.66951			
			I = 4.6721			
					lg II = 0.15785 n	
					II = -1.4383	

$$I + II = 3.2338; \lg [] = 0.50971$$

$$\lg N = 2.98112$$

$$\lg A = 1.49083 \quad A = 0.3096 = y_1(0)$$

¹ При нашем обозначении и формулах

$$A = y(0)$$

В книге Хаяси (стр. 85) приведена формула (6)

$$y(0) = \frac{2P}{KL (\text{sh } \lambda + \sin \lambda)} [\text{ch } \alpha \cos (\lambda - \alpha) + \cos \alpha \text{ch } (\lambda - \alpha)]$$

Эта формула верна и следует непосредственно из нашей.

В самом деле:

$$\begin{aligned} 4Y_3(\beta - \alpha) Y_3(\beta) + Y_1(\beta - \alpha) Y_1(\beta) &= \text{sh } (\beta - \alpha) \text{sh } \beta \sin (\beta - \alpha) \sin \beta + \\ &+ \text{ch } (\beta - \alpha) \text{ch } \beta \cos (\beta - \alpha) \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{sh } (\beta - \alpha) \text{sh } \beta (\cos \alpha - \cos (2\beta - \alpha)) + \\ &+ \text{ch } (\beta - \alpha) \text{ch } \beta (\cos \alpha + \cos (2\beta - \alpha))] = \frac{1}{2} [\cos \alpha (\text{ch } (\beta - \alpha) \text{ch } \beta + \\ &+ \text{sh } (\beta - \alpha) \text{sh } \beta) + \cos (2\beta - \alpha) (\text{ch } (\beta - \alpha) \text{ch } \beta - \text{sh } (\beta - \alpha) \text{sh } \beta)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos \alpha \text{ch } (2\beta - \alpha) + \cos (2\beta - \alpha) \text{ch } \alpha] = \frac{1}{2} [\cos \alpha \text{ch } (\lambda - \alpha) + \cos (\lambda - \alpha) \text{ch } \alpha] \end{aligned}$$

ибо $2\beta = \lambda$, значит будет

$$A = y(0) = \frac{2P}{KL (\text{sh } \lambda + \sin \lambda)} [\cos \alpha \text{ch } (\lambda - \alpha) + \cos (\lambda - \alpha) \text{ch } \alpha]$$

Вычисление B .

$$B = \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} [4Y_4(\beta) Y_1(\beta - \alpha) - 4Y_3(\beta - \alpha) Y_2(\beta)]$$

$\beta = 2.1004$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{ch sin} & 3.5779 \\ \hline -\text{sh cos} & 2.0326 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{lg} & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{ch sin} & 3.5779 \\ \hline \text{sh cos} & -2.0326 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{lg} & \\ \hline \end{array}$
	$4Y_4(\beta) = 5.6103$	0.74898	$2Y_2(\beta) = 1.5453$	0.18902
$\beta - \alpha = 1.1723$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{ch cos} & 0.6867 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{lg} & 1.83677 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{sh sin} & 1.3455 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \text{lg} & 0.12889 \\ \hline \end{array}$
	$\text{lg } I = 0.58575$		$\text{lg } II = 0.31791$	
	$I = 3.8526$		$II = 2.0793$	
	$I - II = 1.7733$	0.24879		
	$\text{lg } N$	2.98112		
	$\text{lg } B$	1.22991	$B = 0.1698$	

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 60 \text{ см} \quad y &= 0.3096 Y_1(\xi) + 0.1698 Y_2(\xi) \\ 60 \leq x \leq 135 \text{ см} \quad y &= 0.3096 Y_1(\xi) + 0.1698 Y_2(\xi) + \\ &+ 3.112 Y_4(\xi - 0.9281) \end{aligned} \quad (117)$$

причем напомним, что

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \text{ch } \xi \cos \xi \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} [\text{ch } \xi \sin \xi + \text{sh } \xi \cos \xi] \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} [\text{ch } \xi \sin \xi - \text{sh } \xi \cos \xi] \end{aligned}$$

К книге Хаяси приложены таблицы, в которых по аргументу ξ даны натуральные величины тригонометрических и гиперболических функций и их произведений попарно, так что вычисление функций Y_k сводится к выборке из таблиц, в крайнем случае, двух чисел, рядом стоящих. Отсюда простота наших формул по сравнению с обычными становится очевидной.

Вычислим теперь $y(0)$, $y(\alpha)$ и $y(\beta)$.

Имеем:

$$y(0) = 0.3096$$

без всякого вычисления.

Затем для $\alpha = 0.9281$ будет по обеим формулам

$$y(\alpha) = 0.3096 Y_1(\alpha) + 0.1698 Y_2(\alpha)$$

$\alpha = 0.9281$	$Y_1(\alpha) = 0.8763$	$\lg$	$\lg A$	$\bar{1}.94285$	$\text{ch } \alpha \sin \alpha$	1.1707	$\lg$
				$\bar{1}.49083$	$\text{sh } \alpha \cos \alpha$	0.6397	
				$\bar{1}.43368$	$2Y_2 = 1.8104$		0.25778
	$AY_1(\alpha) = 0.2714$				$\lg \frac{1}{2} B$		$\bar{2}.92892$
					$\lg BY_2$	$\bar{1}.18670$	
						$BY_2 = 0.1530$	
	$y(\alpha) = 0.4244$						

$\beta = 2.1004$	$Y_1\beta = -2.0945$	$\lg$	$\lg A$	$1.32108 (n)$	$\text{ch } \sin$	3.5779	$\lg$
				$\bar{1}.49083$	$+\text{sh } \cos$	-2.0326	
			$\lg AY_1$	$\bar{1}.81191 (n)$	$2Y_2$	1.5453	0.18902
						$\lg \frac{1}{2} B$	$\bar{2}.92888$
				$AY_1 = -0.6485$		$\lg BY_2$	$\bar{1}.11790$
						$BY_2 = 0.1312$	

$\beta - \alpha = 1.1723$	$\text{ch } \sin$	1.6309					
	$-\text{sh } \cos$	-0.5672				$AY_1 = -0.6485$	
	$4Y_4$	1.0637	0.02683			$BY_2 = 0.1312$	
	$\lg \frac{1}{4} C$	$\bar{1}.89094$			$CY_4 = 0.8275$		
	$\lg CY_4$	1.91777			$y(\beta) = 0.3102$		
		$CY_4 = 0.8275$					

Таким образом, имеем:

$$y(0) = 0.3096 \text{ см}; \quad y(a) = 0.4244 \text{ см}; \quad y(b) = 0.3102 \text{ см}$$

Между тем в книге Хаяси по его таблице получается

$$y(a) = 0.856 \text{ см}; \quad y(b) = 0.156 \text{ см}$$

и вместе с тем приведена разность этих чисел

$$y(a) - y(b) = 0.700 \text{ см}$$

Мы покажем непосредственной проверкой, что наши числа *верны*. Так как в таблице у Хаяси эти числа, соответствующие его аргументу $K=8$ (наше $K=8 \cdot 25$, где 25 см есть ширина балки), не выделяются из ряда прочих, то значит вся его таблица *неверна*, а это заставляет относиться с осторожностью и к прочим результатам и формулам книги, ибо они везде одинаково сложны и значит легко подвержены ошибкам.

Для примера приложения наших формул провычислен подробно численный пример той же шпалы, но несколько округлив числа, а именно взято

$$a = 60 \text{ см}; \quad b - a = 75 \text{ см}; \quad b = 135 \text{ см}; \quad l = 270 \text{ см}$$

т. е. изменено только a и взято 60 см вместо 59.65 см; тогда получается

$$\alpha = 0.9335; \quad A = 0.3042$$

$$\beta = 2.1004; \quad B = 0.1743$$

все остальные числа остаются без перемены.

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a; \quad y &= 0.3042Y_1(\xi) + 0.1743Y_2(\xi) \\ a \leq x \leq b; \quad y &= 0.3042Y_1(\xi) + 0.1743Y_2(\xi) + \\ &+ 3.112Y_4(\xi - 0.9335) \end{aligned} \quad (118)$$

Вычисление по этим формулам со всею подробностью показано в табл. 1 (стр. 410—411) в том самом виде, как оно произведено, т. е. никаких побочных вычислений не производилось. Умножения выполнены на большой логарифмической линейке.

Схема этого вычисления настолько проста, что пояснений не требует. Аргументы (абсциссы) x взяты через 10 см для удобства поверительного расчета; можно бы было упростить выборку из

таблиц, взяв величины ξ , например, через 0.15 см; тогда не приходилось бы интерполировать при выборке значений функций

$$\operatorname{ch} \xi \cos \xi, \quad \operatorname{ch} \xi \sin \xi, \quad \operatorname{sh} \xi \cos \xi$$

Само собою разумеется, что весь этот расчет произведен с точностью, далеко превышающей практическую потребность (было бы нелепо рассчитывать прогиб шпала с точностью до 0.001 мм) но приведенный расчет служит примером для установления и пояснения нашей методы.

§ 14. Как общее правило, всякий расчет необходимо подвергать проверке, которая наглядно обнаружила бы всякую случайную ошибку и вместе с тем давала ясное представление о степени точности полученного результата.

В нашем случае такая проверка может быть произведена следующим образом: мы имеем основное уравнение (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

и мы для величины y получили решение вида

$$y = \varphi(x) \quad (119)$$

в численной табличной форме, вычислив достаточное число ординат; положим, что величина y в члене Ky заменена ее значением (119) и уравнение (1) написано в виде

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = F(x) - K\varphi(x) \quad (120)$$

Тогда, положив

$$F(x) - K\varphi(x) = G(x) \quad (121)$$

имеем уравнение

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = G(x) \quad (122)$$

представляющее уравнение упругого равновесия балки под действием нагрузки $G(x)$, нам теперь известной. Рассчитав обычными приемами (четырежды численным интегрированием, проще

всего по правилу трапеций) величину y по уравнению (122), мы должны вновь получить

$$y = \varphi(x)$$

в той же табличной форме, из которой мы исходили. Сличение обоих результатов даст как требуемую проверку, так и суждение о степени точности расчета, а попутно и величины изгибающего момента во всех сечениях балки, срезающей силы и уклона касательной. Такая проверка результатов расчета, данного в табл. 1, произведена в табл. 2 и 2 bis, пояснения к которым даны в примечаниях к этим таблицам (стр. 412—415).

На этом мы и закончим изложение общей „точной“ теории расчета балок постоянного сечения, лежащих на упругом основании, и перейдем к „приближенным“ методам.

Эти „приближенные“ методы во многих случаях упрощают численные вычисления, а главное обобщаются на балки переменного сечения, изменяющегося по *любому* закону, что для точных методов в общем виде сделать невозможно.

§ 15. Лет тридцать пять тому назад на практических занятиях со слушателями кораблестроительного отдела Морской академии, которыми я в то время руководил совместно с И. Г. Бубновым, по моим указаниям была разработана метода, при которой для балки, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенными силами или иною прерывною нагрузкою, нет надобности составлять уравнения сопряжения различных участков и, следовательно, нет надобности решать для определения постоянных произвольных многочисленные системы уравнений со многими неизвестными.

Сущность этой методы состоит в разложении уравнения упругой линии, в которую обращается первоначально прямолинейная ось балки, в ряд по тем фундаментальным функциям, соответствующим условиям закрепления концов балки и не зависящим от ее нагрузки, которые служат для представления колебательного ее движения.

Вычисление формы
Уравнения: $0 \leq x \leq 60$ см
 $60 \leq x \leq 135$,

1	2	3	4	5	6	7	8
x (см)	ξ	$\operatorname{ch} \xi \cos \xi =$ $= Y_1(\xi)$	$\operatorname{ch} \xi \sin \xi$	$\operatorname{sh} \xi \cos \xi$	$(4) + (5) =$ $= 2Y_2(\xi)$	$(3) \cdot A =$ $= AY_1(\xi)$	$(6) \cdot \frac{1}{2} B =$ $= BY_2(\xi)$
0	0.0000	+1.0000	0.0000	+0.0000	0.0000	+0.3042	0.0000
10	0.1556	+0.9999	0.1567	+0.1544	0.3111	+0.3042	0.0271
20	0.3112	+0.9984	0.3210	+0.3012	0.6222	+0.3038	0.0542
30	0.4668	+0.9921	0.5001	+0.4322	0.9323	+0.3019	0.0812
40	0.6224	+0.9765	0.6996	+0.5390	1.2386	+0.2972	0.1080
50	0.7780	+0.9376	0.9252	+0.6119	1.5371	+0.2853	0.1340
60	0.9335	+0.8737	1.1800	+0.6397	1.8197	+0.2658	0.1586
70	1.0891	+0.7663	1.4659	+0.6104	2.0763	+0.2331	0.1810
80	1.2447	+0.6020	1.8021	+0.5098	2.3119	+0.1832	0.2015
90	1.4003	+0.3651	2.1202	+0.3231	2.4433	+0.1111	0.2130
100	1.5559	+0.0368	2.4749	+0.0338	2.5087	+0.0112	0.2187
110	1.7115	-0.4009	2.8307	-0.3756	2.4551	-0.1220	0.2140
120	1.8670	-0.9667	3.1674	-0.9216	2.2458	-0.2941	0.1958
130	2.0226	-1.6788	3.4593	-1.6211	1.8382	-0.5108	0.1602
135	2.1004	-2.0945	3.5779	-2.0326	1.5453	-0.6373	0.1347

* На основании формулы (113') эта сумма должна бы равняться 5.000. Погрешность накопилась вследствие приближенного вычисления площади по правилу трапеций. Соответствующая величина δ должна быть 0. Для проверки, чтобы показать степень приближения при интегрировании по правилу трапеций, мы подвергаем проверке обе величины, т. е. с поправкой (табл. 2, ст. 16) и без поправки (табл. 2 bis, ст. 16).

Проверка результатов

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (см)	Действительная нагрузка $-Kq$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезающая сила $S = \frac{1}{2} h \cdot (4)$ (кг)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изгибающий момент $M = \frac{(7) \cdot \frac{1}{2} h}{1000}$ (т · см)	Суммы (8) попарно
0	60.94	127.30	0.00	0.0	— 636	0	0.00	— 3.18
10	66.36	138.06	— 127.30	— 636.5	— 1963	— 636	— 3.18	— 16.18
20	71.70	148.42	— 265.36	— 1326.8	— 3396	— 2599	— 13.00	— 42.97
30	76.72	157.86	— 413.78	— 2068.9	— 4927	— 5995	— 29.97	— 84.58
40	81.14	165.10	— 571.64	— 2858.2	— 6542	— 10922	— 54.61	— 141.93
50	83.96	168.94	— 736.74	— 3683.7	— 8212	— 17464	— 87.32	— 215.70
60	84.98	—	— 905.68	— 4528.4	—	— 25676	— 128.38	—
60	84.98	168.26	+ 1094.32	+ 5471.6	+ 10102	— 25676	— 128.38	—
70	83.28	163.40	+ 926.06	+ 4630.3	+ 8444	— 15574	— 77.87	— 206.25
80	80.12	155.60	+ 762.66	+ 3813.3	+ 6849	— 7130	— 35.65	— 113.52
90	75.48	146.54	+ 607.06	+ 3035.3	+ 5238	— 281	— 1.40	— 37.05
100	71.06	138.30	+ 460.52	+ 2302.6	+ 3914	+ 5057	+ 25.29	+ 23.89
110	67.24	131.74	+ 322.22	+ 1611.1	+ 2563	+ 8971	+ 44.85	+ 70.14
120	64.50	127.53	+ 190.48	+ 952.4	+ 1267	+ 11534	+ 57.67	+ 102.52
130	63.02	125.90	+ 62.96	+ 314.8	+ 315	+ 12801	+ 64.00	+ 121.67
135	62.88	—	+ 00.01	+ 0.5	—	+ 12958	+ 64.79	+ 128.79

* Разность ϵ накопилась от интегрирования по правилу трапеций и от присовокупления к числам ст. 15 табл. 1 величины $\delta = 0.0005$.

В табл. 2 bis приведен расчет без этой поправки.

Таблица 2

данные таблицы 1

10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (9) снизу	$1000J' =$ $= (10) \cdot \frac{1000h}{2EI}$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13) \cdot \frac{1}{2} h$	$(14) + f = Y_r$	y	$\varepsilon = Y - y^*$
+476.74	+2.794	+5.569	0.000	0.000	0.3024	0.3047	-0.0023
+473.56	+2.775	+5.455	5.569	0.0278	0.3302	0.3318	- 16
+457.38	+2.680	+5.108	11.024	0.0551	0.3576	0.3585	- 11
+414.41	+2.428	+4.361	16.132	0.0807	0.3831	0.3836	- 5
+329.83	+1.933	+3.034	20.493	0.1025	0.4049	0.4057	- 8
+187.90	+1.101	+0.838	23.527	0.1176	0.4200	0.4198	+ 2
- 27.80	-0.163	-1.534	24.365	0.1218	0.4242	0.4249	- 7
-234.05	-1.371	-3.408	22.831	0.1147	0.4171	0.4164	+ 7
-347.57	-2.037	-4.279	19.423	0.0971	0.3995	0.4006	- 11
-382.62	-2.242	-4.344	15.144	0.0757	0.3781	0.3774	+ 7
-358.73	-2.102	-3.704	10.800	0.0540	0.3564	0.3553	+ 11
-288.59	-1.692	-2.782	7.096	0.0355	0.3379	0.3362	+ 17
-186.07	-1.090	-1.467	4.314	0.0216	0.3240	0.3225	+ 15
- 64.40	-0.377	-0.377	2.847	0.0142	0.3166	0.3151	+ 14
0.00	0.0000		2.658	0.0133	0.3157	0.3144	+ 13
				0.9183			
				-71			
				+69			

0.9181

$$Q = \frac{0.9181 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 270}{135} = 3672$$

$$F = \frac{20000 - 3672}{200 \cdot 270} = 0.3024$$

Проверка результатов

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (см)	Действительная нагрузка $-K_y$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезывающая сила $S = (4) \cdot \frac{1}{2} h$ (кг)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изгибающий момент $M = \frac{(7) \cdot \frac{1}{2} h}{1000}$ (т · см)	Суммы (8) попарно
0	60.84		0.00	0.0		0.0	0.00	
10	66.26	-127.10	- 127.10	- 635.5	- 636	- 636	- 3.18	- 3.18
20	71.60	-137.86	- 264.96	-1324.8	- 1960	- 2596	- 12.98	- 16.16
30	76.62	-148.22	- 413.18	-2065.9	- 3390	- 5986	- 29.93	- 42.91
40	81.04	-157.66	- 570.84	-2854.2	- 4920	-10906	- 54.53	- 84.46
50	83.86	-164.90	- 735.74	-3678.7	- 6533	-17439	- 87.20	-141.73
60	84.88	-168.74	- 904.48	-4522.4	- 8201			-215.40
60	84.88	-	- 904.48	-4522.4	-	-25640	-128.20	
70	83.18	-168.06	+1095.52	+5477.6	+10115	-15525	- 77.62	-205.82
80	80.02	-163.20	+ 927.46	+4637.3	+ 8459	- 7066	- 35.33	-112.95
90	75.38	-155.40	+ 764.26	+3821.3	+ 6866	- 200	- 1.00	- 36.33
100	70.96	-146.34	+ 608.86	+3044.3	+ 5357	+ 5157	+ 25.78	+ 24.78
110	67.14	-138.10	+ 462.52	+2312.6	+ 3935	+ 9092	+ 45.46	+ 71.24
120	64.40	-131.54	+ 324.42	+1622.1	+ 2586	+11678	+ 58.39	+103.85
130	62.92	-127.38	+ 192.88	+ 964.4	+ 1292	+12970	+ 64.85	+123.24
135	62.78	-125.70	+ 65.56	+ 327.8	+ 341			+130.55
			+ 2.71	+ 13.5 ¹		+13140	+ 65.70	

¹ Срезывающая сила при $x = 135$ должна бы быть равна нулю. Получилось 13.5 кг вследствие интегрирования по правилу трапеций. Понятно, что практического значения при полной нагрузке в 20000 кг эта невязка не имеет.

Таблица 2 bis

тазов таблицы 1

10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (9) снизу	$1000y' =$ $= (10) \cdot \frac{1000h}{2EI}$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13) \cdot \frac{1}{2} h$	$(14) + f = Y$	y	$\delta = Y - y$
+470.56	+2.758	+5.498	0.000	0.000	0.3044	0.3042	+0.0002
+467.38	+2.740	+5.386	5.498	0.0275	0.3319	0.3313	+ 6
+451.22	+2.646	+5.039	10.884	0.0544	0.3588	0.3580	+ 8
+408.31	+2.393	+4.290	15.923	0.0796	0.3840	0.3831	+ 9
+323.85	+1.897	+2.964	20.213	0.1011	0.4055	0.4052	+ 3
+182.12	+1.067	+0.872	23.177	0.1159	0.4203	0.4193	+ 10
			24.049				
— 33.28	—0.195	—1.597		0.1202	0.4246	0.4244	+ 2
			22.452				
—239.10	—1.402	—3.467		0.1123	0.4167	0.4159	+ 8
—352.05	—2.065	—4.343	18.985	0.0949	0.3993	0.4001	— 8
—388.38	—2.278	—4.410	14.642	0.0732	0.3776	0.3769	+ 7
—363.60	—2.132	—3.847	10.232	0.0512	0.3556	0.3548	+ 8
—292.36	—1.715	—2.820	6.385	0.0319	0.3363	0.3357	+ 6
—188.51	—1.105	—1.489	3.565	0.0178	0.3222	0.3220	+ 2
— 65.27	—0.384	—0.384	2.076	0.0104	0.3148	0.3146	+ 2
0.00	0.000		1.884	0.0094	0.3138	0.3139	— 1
				0.8904			
				—52			
				+49			

0.8901

$$Q = \frac{0.8901 \cdot 10.200 \cdot 270}{135} = 3560$$

$$f = \frac{20000 - 3560}{200 \cdot 270} = 0.3044$$

Зная уравнение упругой линии, находим и все прочие, необходимые для расчета балки, элементы.

§ 16. Около двухсот лет тому назад Эйлер показал, что рассмотрение упругих колебаний однородной балки приводится к решению уравнения вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (123)$$

причем свободные колебания балки определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (123')$$

граничными и начальными условиями.

Для уравнения (123') ищется решение вида

$$z = \sum XT$$

в котором X означает функцию одной только переменной x , T — функция только времени t . Эти функции определяются обыкновенными линейными уравнениями

$$\begin{aligned} T'' + \frac{m^4}{l^4} c^2 T &= 0 \\ X^{IV} - \frac{m^4}{l^4} X &= 0 \end{aligned} \quad (124)$$

причем m — пока неизвестное отвлеченное число, могущее принимать какое угодно значение.

Функции X надо определить так, чтобы каждая из них в отдельности удовлетворяла граничным условиям.

Соответственно шести возможным комбинациям этих условий, указанным выше, получается для каждой комбинации трансцендентное уравнение для определения значений m , отвечающих задаче.

Пусть эти значения суть

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_k, \dots$$

Каждому из них соответствует „фундаментальная“ функция X ; эти функции мы обозначим

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k, \dots$$

Все эти функции обладают свойством ортогональности, т. е.

$$\int_0^l X_h X_j dx = 0, \text{ если } h \neq j$$

На основании этого свойства определяются коэффициенты ряда

$$f(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k + \dots$$

при разложении заданной функции $f(x)$ в ряд по фундаментальным функциям, а именно будет

$$A_k = \frac{\int_0^l f(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \quad (125)$$

В гл. VIII „Theory of Sound“ Рэлея даны как выражения функций X_k , так и значения интеграла в знаменателе формулы (125) для всех комбинаций граничных условий. Мы даем сводку этих формул и чисел в § 24.

§ 17. При рассмотрении вынужденных колебаний балки, как оно изложено мною, т. е. когда надо решать уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (126)$$

действующая нагрузка $f(x, t)$ разлагается в ряд по фундаментальным функциям, соответствующим рассматриваемым граничным условиям, т. е. в ряд вида

$$f(x, t) = H_1 X_1 + H_2 X_2 + \dots + H_k X_k + \dots$$

причем, когда нагрузка зависит от времени, коэффициенты H будут функциями времени t , если же нагрузка времени t не содержит, то величины H постоянные.

Вот это-то разложение и было естественно применить к решению статической задачи

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = F(x) \quad (*)$$

о равновесии балки, в частности при рассмотрении вопроса „о перекрестных связях“, с которым приходится иметь дело в кораблестроении. Этот последний вопрос, когда число связей весьма велико, приводится к предельному случаю бесконечно большого числа их, а тогда вместо уравнения (*) приходится рассматривать уравнение (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

т. е. балки, лежащей на упругом основании. Это выполняется следующим образом.

Написав уравнение (1) под видом (4)

$$y^{IV} + c^2 y = f(x)$$

причем положено

$$\frac{K}{EI} = c^2; \quad \frac{1}{EI} F(x) = f(x)$$

представляем сперва заданную функцию $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k + \dots$$

расположенного по фундаментальным функциям, соответствующим условиям закрепления концов балки, определяя коэффициенты A_k по формуле (125). Тогда уравнение (4) принимает вид

$$y^{IV} + c^2 y = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k$$

Решение этого уравнения ищем под видом

$$y = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k$$

а так как

$$X_k^{IV} = \frac{m^4}{l^4} X_k$$

то будет

$$B_k = \frac{A_k l^4}{m_k^4 + c^2 l^4}$$

и, значит,

$$y = l^4 \sum \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} X_k \quad (127)$$

Так как каждая из функций X_k удовлетворяет граничным условиям, то и величина (127) им удовлетворяет и, значит, это и есть искомое решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям, притом решение единственное, т. е. всякое другое по форме решение ему эквивалентно.

Этот метод нашел отражение в моей статье „Ueber erzwungene Schwingungen von elastischen Stäben“ (Math. Ann., 1905) и в курсе И. Г. Бубнова по строительной механике корабля, читанном в Морской Академии.

Выгода этого способа решения та же, что и точного изложенного выше, т. е. когда нагрузка прерывная [функция $f(x)$ между значениями $x=0$ и $x=l$ разрывная], ход выкладки остается по-прежнему „прямой“, не требующий решения систем уравнений со многими неизвестными.

Способ этот является обобщением метода, изложенной Пуассоном в его „Механике“.¹

§ 18. Поясним сперва эту методу на простейшем примере — балки, подпертой на обоих концах. Тогда

$$X_k = \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad m_k = k\pi \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (128)$$

¹ См.; S. D. Poisson. *Traité de Mécanique*, t. I, 1833, § 323.

и будет

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{k^4 \pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (129)$$

Разрывность функции $f(x)$ не составляет препятствия при вычислении интеграла в формуле (128); ряд (129) быстро сходящийся, причем его сходимость может быть усилена как угодно, что показано ниже.

Положим теперь, что нагрузка

$$F(x) = EIf(x)$$

состоит из сосредоточенной силы P , приложенной в точке $x = a$.

Рассматривая сперва эту нагрузку как равномерно распределенную на участке

$$\text{от } x = a \text{ до } x = a + \sigma$$

так что

$$p\sigma = P \quad (*)$$

и переходя затем к пределу, считая σ бесконечно малым, при условии (*) получим:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} A &= p \int_a^{a+\sigma} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{lp}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi a}{l} - \cos \frac{k\pi (a+\sigma)}{l} \right] = \\ &= \frac{2l}{k\pi} p \sin \frac{k\pi \sigma}{l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(a + \frac{\sigma}{2} \right) \end{aligned}$$

так что

$$A_k = \frac{4}{k\pi} p \sin \frac{k\pi \sigma}{l} \sin \frac{k\pi}{l} \left(a + \frac{\sigma}{2} \right)$$

В том случае, когда σ бесконечно малое, будет, на основании (*),

$$\frac{4p}{k\pi} \sin \frac{k\pi \sigma}{2l} = \frac{4p}{k\pi} \cdot \frac{k\pi \sigma}{2l} = \frac{2P}{l}$$

Значит, при сосредоточенной силе

$$A_k = \frac{2P}{l} \sin \frac{k\pi a}{l}$$

следовательно,

$$y = \frac{2P l^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{k^4 \pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (130)$$

Положим теперь, что на балку действует несколько сил, например:

P_1 , приложенная в точке $x = a_1$

P_2 , приложенная в точке $x = a_2$

P_3 , приложенная в точке $x = a_3$

Тогда, на основании формулы (130), будет

$$y = \frac{2 l^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_1 \sin \frac{k\pi a_1}{l} + P_2 \sin \frac{k\pi a_2}{l} + P_3 \sin \frac{k\pi a_3}{l}}{k^4 \pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (131)$$

Подобная формула может быть написана сразу для любого числа сил, что при обычной методе было бы невозможно.

Так, например, для двух равных и симметрично расположенных сил будет

$$P_1 = P_2 = P; \quad a_1 = a; \quad a_2 = l - a$$

$$P_1 \sin \frac{k\pi a_1}{l} + P_2 \sin \frac{k\pi a_2}{l} = P \sin \frac{k\pi a}{l} + P \sin \left(k\pi - \frac{k\pi a}{l} \right)$$

при $k = 2n$ эта величина равна нулю

при $k = 2n + 1$ эта величина равна $2P \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} a$

Таким образом, будет

$$y = \frac{4 l^3 P}{EI} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi a}{l}}{(2n+1)^4 \pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \quad (132)$$

Положим, что в точке $x = a_3 = \frac{2}{l}$ поставлен упор (анкер) так, чтобы для этой точки было $y = 0$, тогда, на основании формул (131) и (132), получим для определения давления P_3 на анкер уравнение

$$\frac{4 l^3 P}{EI} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi a}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)^4 \pi^4 + c^2 l^4} + \frac{2 P_3 l^3}{EI} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^4 \pi^4 + c^2 l^4} = 0$$

Найдя P_3 , находим затем y по формуле (131).

Нетрудно на основании известных разложений в тригонометрические ряды проверить, что все эти результаты эквивалентны тем, которые получаются по первой методе нашей. На этом мы останавливаться не будем, но обратим внимание на простоту выкладок, даже по сравнению с нашей первою методою, не говоря уже об обычной.

§ 19. Покажем теперь, каким образом усилить быстроту сходимости рядов, к которым эта метода приводит. Для этого стоит только вернуться к исходному уравнению

$$y^{IV} + c^2 y = f(x)$$

и, положив в нем

$$y = y_0 + \eta \quad (133)$$

определить y_0 так, чтобы было

$$y_0^{IV} = f(x) \quad (134)$$

иначе

$$EI y_0^{IV} = F(x) \quad (135)$$

и чтобы y_0 удовлетворяло граничным условиям, т. е. условиям закрепления концов балки.

Уравнение (135) представляет уравнение равновесия „свободной“, т. е. не опирающейся на упругое основание балки, и величина y_0 рассчитывается по обычным для таких балок приемам; пусть будет

$$y_0 = f_0(x) \quad (136)$$

тогда будет

$$\eta^{IV} + y_0^{IV} + c^2 \eta + c^2 y_0 = f(x)$$

или, на основании уравнения (134),

$$\eta^{IV} + c^2 \eta = -c^2 f_0(x) \quad (137)$$

Так как $f_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям, то и для неизвестной η они останутся те же, что и для y .

Положим в уравнении (137)

$$\eta = y_1 + \eta_1$$

и определим y_1 так, чтобы было

$$y_1^{IV} = -c^2 f_0(x) \quad (138)$$

причем y_1 должно удовлетворять граничным условиям. Уравнение (138), будучи написано так:

$$EI y_1^{IV} = -K y_0 \quad (139)$$

показывает, что y_1 представляет упругую линию „свободной“ балки под действием нагрузки $-K y_0$, т. е. той, которая происходит от оседания в упругое основание балки, имеющей форму y_0 .

Составив по известной величине

$$y_0 = f_0(x)$$

нагрузку $-K y_0$, рассчитываем по уравнению (139) функцию y_1 как форму упругой линии „свободной“ балки под этою нагрузкою.

На основании уравнений (138) и (139), неизвестная η_1 будет определяться уравнением

$$\eta_1^{IV} + c^2 \eta_1 = -c^2 y_1 \quad (140)$$

и граничными условиями, и продолжаем этот процесс сколь угодно далеко. Таким образом, приходим к такому результату: решение уравнения

$$y^{IV} + c^2 y = f(x)$$

удовлетворяющее граничным условиям, может быть получено в такой форме:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + \eta_n \quad (141)$$

причем $y_0, y_1, y_2, \dots$ рассчитываются последовательно, как прогибы (форма упругой линии) обыкновенной „свободной“ балки при заданных граничных условиях, по формулам

$$EI y_0^{IV} = F(x)$$

$$EI y_1^{IV} = -K y_0$$

$$EIy_2^{IV} = -Ky_2 \quad (142)$$

.....

$$EI\eta_n^{IV} + K\eta_n = -Ky_n$$

Этому процессу можно придать другой вид. Положим, что по заданной функции $f(x)$ составлялись бы последовательно функции

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$$

по уравнениям

$$\begin{aligned} f_0^{IV}(x) &= f(x) \\ f_1^{IV}(x) &= f_0(x) \\ f_2^{IV}(x) &= f_1(x) \end{aligned} \quad (143)$$

.....

и граничным условиям, тогда, сопоставляя эти уравнения с (141), видим, что будет

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0(x) \\ y_1 &= -c^2 f_1(x) \\ y_2 &= c^4 f_2(x) \end{aligned} \quad (144)$$

.....

$$y_n = (-1)^n c^{2n} f_n(x)$$

Тогда будет

$$y = f_0(x) - c^2 f_1(x) + c^4 f_2(x) - \dots + (-1)^n c^{2n} f_n(x) + \eta_n \quad (145)$$

причем η_n определяется уравнением

$$\eta_n^{IV} + c^2 \eta_n = (-1)^{n+1} c^{2n+2} f_n(x) \quad (146)$$

и граничными условиями.

§ 20. Может представиться, что это преобразование не доставляет никакой выгоды, ибо величина η_n определяется уравнением совершенно того же вида, как и y , и теми же граничными условиями, но стоит только сопоставить формулу (146) с формулой (127), чтобы видеть, что определение неизвестной η_n выполняется при достаточно большом n весьма просто.

В самом деле здесь может быть два случая.

1°. Когда отношение

$$\frac{c^2 l^4}{m_1^4} < 1$$

и притом значительно меньше, например в 2 или 3 раза, что мы будем обозначать знаком $\ll$.

2°. Когда это отношение или больше единицы, а если и меньше, то близко к единице.

В первом случае члены ряда (141), а значит и ряда (144), будут быстро убывать, и η_n будет быстро приближаться к нулю.

Во втором случае члены ряда (141) будут идти возрастающими или убывать столь медленно, что пришлось бы взять слишком много членов этого ряда для получения требуемой степени точности, но зато в этом случае члены того ряда, которым представляется η_n , убывают столь быстро, что в этом ряду достаточно будет взять лишь один *первый* член.

В самом деле, мы имели формулу (127)

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} X_k$$

Положим для краткости письма $c^2 l^4 = b^2$, так что будет

$$m_k^4 + c^2 l^4 = m_k^4 + b^2$$

но

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_k^4 + b^2} &= \frac{1}{m_k^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{m_k^4}} = \\ &= \frac{1}{m_k^4} \left[1 - \frac{b^2}{m_k^4} + \frac{b^4}{m_k^8} - \frac{b^6}{m_k^{12}} + \dots + (-1)^n \frac{b^{2n}}{m_k^{4n}} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{b^{2n+2}}{m_k^{4n} (m_k^4 + b^2)} \right] \end{aligned}$$

следовательно, будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^4} y = & \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4} X_k - b^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^8} X_k + b^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^{12}} X_k - \dots + \\ & + (-1)^{n+1} b^{2n+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + b^2)} \end{aligned}$$

Сличая эту формулу с формулой (145) и заметив, что $b^2 = c^2 l^4$, видим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^4} \\ c^2 f_1(x) &= c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^8} \\ c^4 f_2(x) &= c^4 l^8 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{12}} \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_n &= c^{2n+2} l^{4n+4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + c^2 l^4)} \end{aligned} \tag{147}$$

Числа m_k при различных граничных условиях приведены в § 24. Они выражаются одною из следующих формул:

$$m_k = k\pi; \quad m_k = \frac{2k-1}{2} \pi; \quad m_k = \frac{2k+1}{2} \pi; \quad m_k = \frac{4k+1}{4} \pi$$

причем первая формула точная, последние три приближенные.

Поэтому в том случае, когда отношение

$$c^2 l^4 : m_1^4 \ll 1$$

например $\frac{1}{2}$ или еще меньше, то функции $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... быстро убывают и, например, уже при $n=3$ будет

$$\left(\frac{c^2 l^4}{m_1^4} \right)^n = \left(\frac{c^2 l^4}{m_1^4} \right)^3 < \frac{1}{4096}$$

и сумма

$$c^6 l^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{12} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

по своей малости может быть отброшена, т. е. величина η_3 может быть заменена нулем.

Положим теперь, что

$$\frac{c^2 l^4}{m_1^4} > 1$$

или близко к 1. Так как числа m_k^4 идут быстро возрастаая, то найдется такое значение k , при котором будет

$$m_k^4 \gg c^2 l^4$$

Пусть, например,

$$m_3^4 \gg c^2 l^4 > m_2^4 > m_1^4$$

тогда будет

$$\eta_n = c^{2n+2} l^{4n+4} \left[\frac{A_1 X_1}{m_1^{4n} (m_1^4 + c^2 l^4)} + \frac{A_2 X_2}{m_2^{4n} (m_2^4 + c^2 l^4)} \right] + \sum_{k=3}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

Сумма

$$c^{2n+2} l^{4n+4} \sum_{k=3}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

при возрастании числа n будет быстро убывать, как показано выше, сумма же первых двух членов

$$c^{2n+2} l^{4n+4} \left[\frac{A_1 X_1}{m_1^{4n} (m_1^4 + c^2 l^4)} + \frac{A_2 X_2}{m_2^{4n} (m_2^4 + c^2 l^4)} \right]$$

будет возрастать, но так как отношение $m_2^{4n} : m_1^{4n}$ с увеличением числа n быстро возрастает, то второй член станет малым по сравнению с первым и выйдет за пределы точности расчета, так что будет

$$f_n(x) = \frac{A_1 X_1}{m_1^{4n}} = B X_1 \quad (148)$$

где B — некоторая постоянная.

При вычислении функций $f_n(x)$, имея таблицу значений функции X_1 , легко убедиться, имеет ли место равенство (148) с требуемой степенью точности или нет.

Если бы такой таблицы под руками не было, то и тогда по самому ходу вычисления функций $f_n(x)$ нетрудно заметить, имеет место равенство (148) или нет.

В самом деле, если это равенство имеет место с требуемой точностью (т. е. с тою, с которою расчет ведется), то будет иметь место и равенство

$$f_{n+1}(x) = \frac{BX_1}{m_1^{4n+4}}$$

и, значит, будет

$$f_n(x) : f_{n+1}(x) = m_1^4$$

Если же, что обыкновенно удобнее, вычисляются величины

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$$

то будет

$$y_{n+1} : y_n = \frac{c^2 l^4}{m_1^4}$$

Как только равенство (148) достигнуто, то уравнение (146) будет

$$EI \eta_n^{IV} + K \eta_n = -KCX_1$$

ибо в этом случае $y_n = CX_1$, причем C — постоянная, а так как

$$X_1^{IV} = \frac{m_1^4}{l^4} X_1$$

то интеграл этого уравнения, удовлетворяющий граничным условиям, будет

$$\eta_n = - \frac{l^4 KC}{EI m_1^4 + Kl^4} = - \frac{Kl^4}{EI m_1^4 + Kl^4} y_n \quad (149)$$

и требуемое решение будет найдено, ибо y_n уже известно.

§ 21. Для пояснения сказанного возьмем сперва простейший пример — балки, подпертой в обоих концах и нагруженной сосредоточенной силой в точке $x=a$.

Мы видели, что в этом случае

$$y = \frac{2Pl^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{k^4\pi^4 + c^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (*)$$

Чтобы усилить быстроту сходимости этого ряда, выделяем функцию $f_0(x)$, представляющую форму равновесия нашей балки, свободно лежащей на опорах. В любом справочнике находим, что в этом случае

$$y_0 = f_0(x) = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{l-a}{6l} [x^3 - a(2l-a)x], \text{ когда } 0 \leq x \leq a$$

$$y_0 = f_0(x) = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{a}{6l} [(l-x)^3 - (l^2-a^2)(l-x)], \text{ когда } a \leq x \leq l$$

и у нас будет

$$y = y_0 - \frac{2Pl^3}{EI} c^2l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{k^8\pi^8 + k^4\pi^4 c^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Ряд в этой формуле сходится гораздо быстрее, нежели в формуле (*), и в нем достаточно будет удержать лишь один или два первых члена.

Возьмем для примера балку, рассматриваемую в § 14 книги Хаяси. Для этой балки

$$K = 15 \text{ кг/см}^3; I = 47430 \text{ см}^4$$

$$l = 820 \text{ см}; E = 140\,000 \text{ кг/см}^2$$

(величины K и I относятся к 1 см ширины балки).

По этим данным,

$$l^4 c^2 = \frac{KI^4}{EI} = \frac{15 \cdot 820 \cdot 820 \cdot 820 \cdot 820}{140000 \cdot 47430} = 1180$$

Следовательно,

$$c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} = 1180 \left[\frac{\sin \frac{\pi a}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^8 + 1180\pi^4} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{l} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}}{(2\pi)^8 + 1180(2\pi)^4} + \dots \right] \quad (150)$$

Подставляя числа, получим приближенно

$$c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} = \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{109} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{l}}{3770} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{3\pi a}{l}}{63703} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (151)$$

При вычислении срезающей силы и изгибающего момента по формулам

$$S = EI''' \text{ и } M = EIy''$$

вошли бы вторая и третья производные, которые представились бы рядами, значительно медленнее сходящимися, поэтому изгибающий момент и срезающую силу надо вычислять не по этим производным, а по формулам

$$\begin{aligned} S &= \int_0^x (F(x) - Ky) dx \\ M &= \int_0^x S dx \end{aligned} \quad (152)$$

куда войдут интегралы предыдущей суммы, которые будут представляться такими рядами:

$$\begin{aligned} & l \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{109} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a}{l}}{3770} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) + \dots \right] \\ \text{и} \quad & \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{109} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a}{l}}{3770} + \dots \right] x - \\ & - l^2 \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{109} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a}{l}}{3770} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \end{aligned}$$

сходимость которых более быстрая, нежели первоначального ряда.

§ 22. Чтобы дать пример последовательного вычисления функций

$$y_0, y_1, y_2, \dots$$

возьмем опять железнодорожную шпалу, для которой в § 13 приведен расчет по точной формуле нашей. Расчет этот будем делать, не производя интегрирований аналитически, а приближенно, по правилу трапеций, так что схема этого расчета остается без изменения для любой нагрузки, а также и для балки переменного сечения, как увидим в гл. II.

Данные для этой шпалы приведены в § 13, самый расчет произведен в табл. 3—5, относительно которых дадим необходимые пояснения (стр. 432—437).

Таблица 3. В табл. 3 вычисляется функция y_0 . В ст. 2 таблицы вписана отнесенная на погонный сантиметр длины балки направленная вверх (а потому знак —) сила поддержания от грунта, соответствующая постоянному оседанию h_0 (см. § 13). В ст. 3 показана срезающая сила, происходящая как от этого поддержания, так и от сосредоточенной силы $P=10$ т, приложенной в точке $x=60$ см.

По срезающим силам интегрированием по правилу трапеций исчислен, как показано, изгибающий момент (ст. 6), причем ввиду того что конец $x=0$ свободен, то при $x=0$ должно быть $M=0$; это значение и вписано как начальное в ст. 5, и суммирование ведется „сверху“.

По изгибающему моменту, опять интегрированием по правилу трапеций, исчислен уклон касательной y'_0 (во избежание малых чисел вычислено $1000 y'_0$). Здесь ввиду симметрии балки известно значение $y'_0=0$ при $x=135$ см, поэтому оно принято за исходное и суммирование в ст. 8 проведено „снизу“.

По величине y'_0 вычисляется сперва ст. 12, в котором за исходное значение принято $y_0=0$. Чтобы определить истинное значение $y_0=f_0$ этой величины, вычисляем площадь, ограниченную кривою Y_0 , ординаты коей вписаны в ст. 12, по правилу трапеций, обратив

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7
Абсцисса x (см)	Нагрузка $F(x)$ (кг/см)	Срезы- вающая сила (т)	Суммы (3) попарно	Суммы (4) сверху	Изгибающий момент (4) · $h = M$ ($h = 5$) (т · см)	Суммы (6) попарно
0	—74.07	0.00	— 0.74	0.00	0.0	— 3.7
10	—74.07	—0.74	— 2.22	— 0.74	— 3.7	— 18.5
20	—74.07	—1.48	— 3.70	— 2.96	— 14.8	— 48.1
30	—74.07	—2.22	— 5.18	— 6.66	— 33.3	— 92.5
40	—74.07	—2.96	— 6.66	—11.84	— 59.2	—151.7
50	—74.07	—3.70	— 8.14	—18.50	— 92.5	—225.7
60	—74.07	—4.44		—26.64	—133.2	
60	—74.07	+5.56	+10.38	—26.64	—133.2	—214.5
70	—74.07	+4.82	+ 8.90	—16.26	— 81.3	—118.1
80	—74.07	+4.08	+ 7.42	— 7.36	— 36.8	— 36.5
90	—74.07	+3.34	+ 5.93	+ 0.06	+ 0.3	+ 30.3
100	—74.07	+2.59	+ 4.44	+ 5.99	+ 30.0	+ 82.1
110	—74.07	+1.85	+ 2.96	+10.43	+ 52.1	+119.1
120	—74.07	+1.11	+ 1.48	+13.39	+ 67.0	+141.4
130	—74.07	+0.37	+ 0.37	+14.87	+ 74.4	+149.6
135	—74.07	0.00		+15.05	+ 75.2	

Таблица 3

 $f_0(x)$ по $f(x)$

8	9	10	11	12	13
Суммы (7) снизу	$\frac{(8)h}{EI} 1000 = 1000y'$	Суммы (9) попарно	Суммы (10) сверху	$(11) \cdot h = Y_0$	$y_0 = (12) - f_0$
+461.6	+2.70		0.00	0.0000	-0.0543
+457.9	+2.68	+5.38	- 5.38	-0.0269	-0.0274
+439.4	+2.57	+5.25	-10.63	-0.0532	-0.0011
+391.3	+2.29	+4.86	-15.49	-0.0775	+0.0232
+298.8	+1.75	+4.04	-19.53	-0.0976	+0.0433
+147.1	+0.86	+2.61	-22.14	-0.1107	+0.0564
- 78.6	-0.46	+0.40	-22.54	-0.1127	+0.0583
- 78.6	-0.46		-22.54	-0.1127	+0.0583
-293.1	-1.72	-2.18	-20.36	-0.1018	+0.0475
-411.2	-2.41	-4.13	-16.23	-0.0811	+0.0268
-447.7	-2.62	-5.03	-11.20	-0.0560	+0.0017
-417.4	-2.45	-5.07	- 6.13	-0.0307	-0.0236
-335.3	-1.96	-4.41	- 1.72	-0.0086	-0.0457
-216.2	-1.27	-3.23	- 1.51	-0.0075	-0.0618
- 74.8	-0.44	-1.71	- 3.22	-0.0161	-0.0704
0.00	0.00	-0.44	- 3.44	-0.0172	-0.0715

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсцисса x (см)	Нагрузка $F(x)$ (кг/см)	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Среза- ющая сила $S = (4) \cdot h$ ($h = 5$) (кг)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изгибающий момент $M = \frac{(7) \cdot h}{1000}$ (т · см)
0	+10.86		0.00	0.0		0.0	0.00
10	+ 5.48	+16.34			+ 81.7		
20	+ 0.22	+ 5.70	+16.34	+ 81.7	+191.9	+ 81.7	+ 0.41
30	— 4.64	— 4.42	+22.04	+110.2	+198.3	+ 273.6	+ 1.37
40	— 8.66	—13.30	+17.62	+ 88.1	+109.7	+ 471.9	+ 2.36
50	—11.28	—19.94	+ 4.32	+ 21.6	— 56.5	+ 581.6	+ 2.91
60	—11.66	—22.94	—15.62	— 78.1	—270.9	+ 525.1	+ 2.63
70	— 9.50	—21.16	—38.56	—192.8	—491.4	+ 254.2	+ 2.72
80	— 5.36	—14.86	—59.72	—298.6	—671.5	— 237.2	— 1.19
90	— 0.34	— 5.70	—74.58	—372.9	—774.3	— 908.7	— 4.54
100	+ 4.72	+ 4.38	—80.28	—401.4	—780.9	—1683.0	— 8.41
110	+ 9.14	+13.86	—75.90	—379.5	—689.7	—2463.9	—12.32
120	+12.36	+21.50	—62.04	—310.2	—512.9	—3153.6	—15.77
130	+14.08	+26.44	—40.54	—202.7	—273.2	—3666.5	—18.33
135	+14.30	+28.38	—14.10	— 70.5	— 70.0	—3939.7	—19.97
			+ 0.09	+ 0.5		—3974.7	—19.87

Таблица 4

 $f_1(x)$ по $f_0(x)$

9	10	11	12	13	14	15
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	$\frac{(10) \cdot h}{EI} 1000 = 1000g'$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13) \cdot h = Y_1$	$y_1 = (14) - f_1$
+ 0.41	135.21	0.792	1.586	0.000	0.0000	-0.0554
+ 1.78	135.62	0.794	1.599	1.586	0.0079	-0.0475
+ 3.73	137.40	0.805	1.631	3.185	0.0159	-0.0395
+ 5.27	141.13	0.826	1.684	4.816	0.0241	-0.0313
+ 5.54	146.40	0.858	1.748	6.500	0.0325	-0.0229
+ 5.35	151.94	0.890	1.811	8.248	0.0412	-0.0142
+ 2.53	157.29	0.921	1.858	10.059	0.0503	-0.0051
- 5.73	159.82	0.937	1.840	11.917	0.0596	+0.0042
-12.95	154.09	0.903	1.730	13.757	0.0688	+0.0134
-20.73	141.14	0.827	1.533	15.487	0.0774	+0.0220
-28.00	120.41	0.706	1.253	17.020	0.0851	+0.0297
-34.10	92.32	0.547	0.888	18.273	0.0914	+0.0360
-38.30	58.22	0.341	0.458	19.161	0.0958	+0.0404
-39.84	19.92	0.117	0.117	19.619	0.0981	+0.0427
	0.00	0.000		19.678	0.0984	+0.0430

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсцисса x (см)	Нагрузка $F(x)$ (кг, см)	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Средне- взвешенная сила $S = (4) \cdot h$ (кг)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изгибающий момент $M = \frac{(7) \cdot h}{1000}$ (т · см)
0	+11.08		0.00	0.0		0.0	0.00
10	+ 9.50	+20.58	20.58	102.9	102.9	102.9	0.51
20	+ 7.90	+17.40	37.98	189.9	292.8	395.7	1.98
30	+ 6.26	+14.16	52.14	260.7	450.6	846.3	4.23
40	+ 4.58	+10.84	62.98	314.9	575.6	1421.9	7.11
50	+ 2.84	+ 7.42	70.40	352.0	666.9	2088.8	10.44
60	+ 1.02	+ 3.86	74.26	371.3	723.3	2812.1	14.06
70	+ 0.84	+ 0.18	74.44	372.2	743.5	3555.6	17.78
80	- 0.84	- 3.52	70.92	354.6	726.8	4282.4	21.41
90	- 2.68	- 7.08	63.84	319.2	673.8	4956.2	24.78
100	- 4.40	-10.34	53.50	267.5	586.7	5542.9	27.71
110	- 5.94	-13.14	40.36	201.8	469.3	6012.2	30.06
120	- 7.20	-15.28	25.08	125.4	327.2	6339.4	31.70
130	- 8.08	-16.62	8.56	42.8	168.2	6507.6	32.54
135	- 8.54	-17.14	0.00	0.0	42.8	6529.0	32.64

Таблица 5

 $f_2(x)$ по $f_1(x)$

9	10	11	12	13	14	15
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	$\frac{(10) \cdot h}{EI} 1000 =$ $= 1000 y_2$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13) \cdot h = Y_2$	$y_2 = (14) - f_1$
0.51	-447.67	-2.624	-5.245	0.000	0.0000	+0.1531
2.49	-447.16	-2.621	-5.222	- 5.245	-0.0262	+0.1269
6.21	-445.67	-2.601	-5.176	10.467	-0.0523	+0.1008
11.34	-439.46	-2.575	-5.083	15.643	-0.0782	+0.0749
17.55	-428.12	-2.508	-4.914	20.726	-0.1036	+0.0495
24.50	-410.57	-2.406	-4.668	25.640	-0.1282	+0.0249
31.84	-386.07	-2.262	-4.374	30.308	-0.1515	+0.0016
39.19	-354.22	-2.112	-3.958	34.682	-0.1734	-0.0203
46.19	-315.04	-1.846	-3.421	38.640	-0.1932	-0.0401
52.49	-268.85	-1.575	-2.843	42.061	-0.2103	-0.0572
57.77	-216.36	-1.268	-2.198	44.904	-0.2245	-0.0714
61.76	-158.59	-0.930	-1.497	47.102	-0.2355	-0.0824
64.24	- 96.83	-0.567	-0.758	48.599	-0.2430	-0.0899
65.18	- 32.59	-0.191	-0.191	49.357	-0.2468	-0.0937
	0.00	0.000		49.452	-0.2473	-0.0942

внимание на то, что последний промежуток (от $x=130$ см до $x=135$ см) вдвое меньше остальных, тогда будет

$$f_0 = \frac{10 \Sigma}{135}$$

где Σ есть сумма ординат ст. 12 с „поправкой“. Тогда будет

$$y_0 = Y_0 - f_0$$

Эти числа и вписаны в ст. 13.

Обратим еще раз внимание, что при суммировании как „сверху“, так и „снизу“ от нижнего числа в ст. 5, 8, 11, т. е. от чисел 0.37, 149.6, —0.44 берется половина, ибо в нашем примере последний промежуток между ординатами 5 см, а не 10, как в остальных местах.

Таблица 4. Эта таблица содержит вычисление функции y_1 по y_0 . Для этого принимаем за нагрузку $-Ky_0$ и вписываем эти значения в ст. 2. Затем производим по правилу трапеций четыре раза подряд интегрирование, которое и доставляет срезывающее усилие, изгибающий момент, уклон касательной ординаты y_1 для каждой из указанных в ст. 1 абсцисс.

Таблица 5. Эта таблица служит для вычисления y_2 по y_1 , так что в ней за нагрузку принято $-Ky_1$. В остальном вычисление произведено, как в табл. 4.

§ 23. В нашем примере

$$c^2 l^4 = \frac{K}{EI} l^4 = \frac{200 \cdot 270 \cdot 270 \cdot 270 \cdot 270}{100000 \cdot 8533} = 1246$$

$$m_1^4 = 500.6$$

Таким образом, $c^2 l^4 > m_1^4$, поэтому величины $y_1, y_2, \dots$ идут возрастающей, причем, согласно сказанному в § 20, функция y_n должна приближаться к CX_1 , где C есть постоянная, X_1 — первая фундаментальная функция колеблющегося стержня, оба конца коего свободны, т. е.

$$X_1 = (\operatorname{ch} m_1 - \cos m_1) \left(\operatorname{sh} \frac{m_1 x}{l} + \sin \frac{m_1 x}{l} \right) -$$

$$-(\operatorname{sh} m_1 - \sin m_1) \left(\operatorname{ch} \frac{m_1 x}{l} + \cos \frac{m_1 x}{l} \right)$$

причем m_1 есть наименьший отличный от нуля корень уравнения

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1$$

именно

$$m_1 = 4.7300$$

В „Theory of Sound“ Рэля имеется следующая таблица значений этой функции:

$\frac{x}{l}$	X_1	$\frac{x}{l}$	X_1	$\frac{x}{l}$	X_1
0.000	+1.6452	0.175	+0.3342	0.350	—0.6815
0.025	+1.4542	0.200	+0.1608	0.375	—0.7767
0.050	+1.2631	0.225	—0.0055	0.400	—0.8559
0.075	+1.0722	0.250	—0.1632	0.425	—0.9184
0.100	+1.8838	0.275	—0.3110	0.450	—0.9636
0.125	+0.6969	0.300	—0.4475	0.475	—0.9909
0.150	+0.5133	0.325	—0.5714	0.500	—1.0000

В нашем расчете значения $\frac{x}{l}$ суть: 0, $\frac{1}{27}$, $\frac{2}{27}$, ..., $\frac{13}{27}$, $\frac{1}{2}$.

Пользуясь приведенной таблицей, по простой интерполяции составим нужные нам значения X_1 при $l=270$ см и x через 10 см:

x (см)	X_1	x (см)	X_1	x (см)	X_1
0	1.645	50	+0.262	100	—0.760
10	1.362	60	+0.014	110	—0.874
20	1.080	70	—0.221	120	—0.953
30	0.800	80	—0.430	130	—0.993
40	0.527	90	—0.607	135	—1.000

Взяв для $x=0$ и $x=135$ см отношение $y_2:X_1$, получаем соответственно 0.0925 и 0.0942.

Берем среднее 0.0935 и составляем следующую таблицу:

x (см)	$0.0935 X_1$ (см)	y_2 (см)	x (см)	$0.0935 X_1$ (см)	y_2 (см)	x (см)	$0.0935 X_1$ (см)	y_2 (см)
0	0.1536	0.1531	50	+0.0245	+0.0249	100	-0.0710	-0.0714
10	0.1272	0.1269	60	+0.0013	+0.0016	110	-0.0818	-0.0824
20	0.1010	0.1008	70	-0.0206	-0.0203	120	-0.0891	-0.0899
30	0.0748	0.0749	80	-0.0402	-0.0401	130	-0.0928	-0.0937
40	0.0493	0.0495	90	-0.0568	-0.0572	135	-0.0935	-0.0942

Эта таблица показывает, что формулу

$$y_2 = 0.0935 X_1$$

функция y_2 представляется с погрешностью, не превышающей 0.0008 см, т. е. меньшей $\frac{1}{100}$ мм. В подобном вопросе, как наш, эта величина не только не имеет никакого практического значения, но находится на пределе точности самого вычисления.

Приняв

$$y_2 = 0.0935 X_1 \quad (153)$$

мы будем иметь для определения η_2 уравнение

$$EI \frac{d^4 \eta_2}{dx^4} + K \eta_2 = -0.0935 K X_1 \quad (154)$$

интеграл которого, удовлетворяющий граничным условиям, на основании формулы (149), будет

$$\eta_2 = -0.0935 \frac{K l^4}{EI} \cdot \frac{1}{EI m_1^4 + K l^4} X_1 \quad (155)$$

Подставляя числа, получим:

$$\eta_2 = -0.0667 X_1 \quad (155')$$

и, значит, будет

$$y = h_0 + y_0 + y_1 + y_2 + \eta_2 = h_0 + y_0 + y_1 + 0.0268X_1 \quad (156)$$

Если заменить X_1 его величиною через y_2 по формуле (153), то будет

$$y = h_0 + y_0 + y_1 + 0.287y_2 \quad (157)$$

В § 13, табл. 1, приведен расчет величины y по формуле (117), с которым и сравним эти величины, рассчитанные по формуле (157). Получим:

x	y форм. (117)	y форм. (157)	x	y форм. (117)	y форм. (157)	x	y форм. (117)	y форм. (157)
0	0.3042	0.3042	50	0.4193	0.4199	100	0.3548	0.3560
10	0.3313	0.3318	60	0.4244	0.4240	110	0.3357	0.3367
20	0.3580	0.3586	70	0.4159	0.4164	120	0.3220	0.3232
30	0.3831	0.3837	80	0.4001	0.3991	130	0.3146	0.3159
40	0.4052	0.4050	90	0.3769	0.3778	135	0.3139	0.3149

Это сличение показывает, что наибольшая разность этих величин, рассчитанных совершенно различными способами, не превышает 0.0013 см, т. е. находится на пределе точности самого вычисления.

Само собою понятно, что величины y , рассчитанные по формуле (157), можно подвергнуть описанной в § 14 проверке, которая не зависит от того, каким образом функция y вычислена. Эта проверка, ничем не отличающаяся от приведенной в табл. 2, исполнена в табл. 6 (стр. 442—443).

Эта проверка и сличение результатов, полученных совершенно различными методами, служат наглядным подтверждением верности наших формул и вычислений.

§ 24. Приведем в заключение этой главы таблицы фундаментальных функций для всех шести комбинаций граничных условий для балки постоянного сечения (стр. 444).

Проверка величины Y ,

$$Y = 0.3703 + y_0$$

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсцисса x (см)	Нагрузка $F(x)$ (кг/см)	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Средняя сила $S = (4) \cdot h$ (кг)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изгибающий момент $M = \frac{(7) \cdot h}{1000}$ (т · см)
0	-60.84		0.00	0.0		0	0.00
10	-66.36	-127.20	-127.20	-636.0	-636	-636	-3.18
20	-71.72	-138.03	-265.28	-1326.4	-1962	-2598	-12.99
30	-76.64	-148.46	-413.74	-2068.7	-3395	-5993	-29.97
40	-81.00	-157.74	-571.48	-2857.4	-4926	-10919	-54.59
50	-83.98	-164.98	-736.46	-3682.3	-6540	-17459	-87.30
60	-84.80	-168.78	-905.24	-4526.2	-8208	-25667	-128.33
60	-84.80		+1094.76	+5473.8		-25667	-128.33
70	-83.28	-168.08	+926.68	+4633.4	+10107	-15500	-77.80
80	-79.82	-163.10	+763.58	+3817.9	+8451	-7109	-35.54
90	-75.56	-155.38	+608.20	+3041.0	+6859	-250	-1.25
100	-71.20	-146.76	+461.44	+2307.2	+5348	+5098	+25.49
110	-67.44	-138.64	+322.80	+1614.0	+3921	+9019	+45.10
120	-64.64	-132.08	+190.72	+953.6	+2568	+11587	+57.93
130	-63.18	-127.82	+62.90	+314.5	+1268	+12855	+64.28
135	-62.98	-126.16	-0.18	+0.9	+3136	+13012	+65.06

Таблица 6

рассчитанной по формуле

$$+y_1 + 0.287 y_2$$

9	10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	(10) $\cdot \frac{h}{EI} 1000 =$ $= 1000 y'$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	(13) $\cdot h$	(14) $-f =$ $= Y$	y	$\delta = y - Y$
	+475.91	+2.790		0.000	0.0000	0.3026	0.3042	+ 0.0016
— 3.18	+472.73	+2.770	+5.560	5.560	0.0278	0.3304	0.3318	+14
— 16.17	+456.56	+2.675	+5.445	11.005	0.0550	0.3576	0.3586	+10
— 42.96	+413.60	+2.423	+5.098	16.103	0.0805	0.3831	0.3837	+ 6
— 84.56	+329.04	+1.929	+4.352	20.455	0.1023	0.4049	0.4050	+ 1
—141.89	+187.15	+1.036	+3.025	23.480	0.1174	0.4200	0.4199	— 1
—215.63	— 28.48	—0.167	+0.929	24.409	0.1220	0.4246	0.4240	— 6
	— 28.48	—0.167		24.409	0.1220	0.4246	0.4240	— 6
—206.13	—234.61	—1.375	—1.542	22.867	0.1143	0.4169	0.4164	— 5
—113.34	—347.95	—2.040	—3.415	19.452	0.0973	0.3999	0.3991	— 8
— 36.79	—384.74	—2.255	—4.295	15.157	0.0758	0.3784	0.3778	— 6
+ 24.24	—360.50	—2.113	—4.368	10.789	0.0539	0.3565	0.3560	— 5
+ 70.59	—289.91	—1.693	—3.806	6.983	0.0349	0.3375	0.3367	— 8
+103.03	—186.88	—1.095	—2.788	4.195	0.0210	0.3236	0.3232	— 4
+122.21	— 64.67	—0.379	—1.474	2.721	0.0136	0.3162	0.3159	— 3
+129.34	0.00	0.000	—0.379	2.531	0.0127	0.3153	0.3149	— 4

Характеристические уравнения и корни их

№	Род закрепления		Характеристическое уравнение	Корни характеристических уравнений		
	конца $x=0$	конца $x=l$		m_1	m_2	$m_k (k > 2)$
1	Свободен	Свободен	$\operatorname{ch} m \cos m = 1$	4.7300	7.8532	$\frac{2k+1}{2} \pi$
2	Подперт	Подперт	$\sin m = 0$	π	2π	$k \pi$
3	Заделан	Заделан	$\operatorname{ch} m \cos m = 1$	4.7300	7.8532	$\frac{2k+1}{2} \pi$
4	Заделан	Подперт	$\operatorname{tg} m = \operatorname{th} m$	3.9266	7.0685	$\frac{4k+1}{4} \pi$
5	Заделан	Свободен	$\operatorname{ch} m \cos m = -1$	1.8751	4.6941	$\frac{2k-1}{2} \pi$
6	Свободен	Подперт	$\operatorname{tg} m = \operatorname{th} m$	3.9266	7.0685	$\frac{4k+1}{4} \pi$

Фундаментальные функции

№	X
1	$(\operatorname{ch} m - \cos m) \left(\operatorname{sh} \frac{mx}{l} + \sin \frac{mx}{l} \right) - (\operatorname{sh} m - \sin m) \left(\operatorname{ch} \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l} \right)$
2	$\sin \frac{mx}{l}$
3	$(\operatorname{sh} m + \sin m) \left(\operatorname{ch} \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l} \right) - (\operatorname{ch} m - \cos m) \left(\operatorname{sh} \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l} \right)$
4	$(\operatorname{sh} m + \sin m) \left(\operatorname{ch} \frac{mx}{l} - \cos \frac{mx}{l} \right) - (\operatorname{ch} m + \cos m) \left(\operatorname{sh} \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l} \right)$
5	$(\operatorname{sh} m + \sin m) \left(\operatorname{ch} \frac{mx}{l} - \cos \frac{mx}{l} \right) - (\operatorname{ch} m + \cos m) \left(\operatorname{sh} \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l} \right)$
6	$(\operatorname{sh} m + \sin m) \left(\operatorname{ch} \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l} \right) - (\operatorname{ch} m + \cos m) \left(\operatorname{sh} \frac{mx}{l} + \sin \frac{mx}{l} \right)$

Примечание. Для простоты набора значок k при букве m опущен. Функция x может быть умножена на любой постоянный множитель.

Для вычисления интегралов

$$\int_0^l X_k^2 dx \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Рэлей дает следующее правило и таблицу: в выражении фундаментальной функции X_k , приведенной выше, надо аргумент $\frac{m_k x}{l}$ заменить через z , обозначить полученную функцию через $U_k(z)$ и ее производные по переменной z обозначать значками, тогда значения вышеуказанных интегралов найдутся из следующей таблицы:

Значения интеграла $\frac{4}{l} \int_0^l X_k^2 dx$

№	Род закрепления		$\frac{4}{l} \int_0^l X^2 dx$
	конца $x=0$	конца $x=l$	
1	Свободен	Свободен	$[U_k(0)]^2$
2	Подперт	Подперт	$2[U_k'(0)]^2 = -2U_k'(l) U_k'''(l)$
3	Заделан	Заделан	$[U_k''(0)]^2$
4	Заделан	Подперт	$[U_k''(0)]^2 = -2U_k'(l) U_k'''(l)$
5	Заделан	Свободен	$[U_k''(0)]^2 = [U_k(l)]^2$
6	Свободен	Подперт	$[U_k(0)]^2 = -2U_k'(l) U_k'''(l)$

Когда интеграл

$$\int_0^l f(x) X_k dx$$

вычисляется по какой-нибудь приближенной формуле, то полезно по той же формуле и при том же числе ординат вычислить и интеграл

$$\int_0^l X_k^2 dx$$

и, слив получившее значение со значением, вычисленным по приведенной таблице, получить суждение о степени точности примененной для вычисления приближенной формулы.

Как видно, фундаментальные функции, в особенности для $k > 1$, представляются в виде разности двух членов, каждый из которых большой, а разность их малая, поэтому для численного вычисления, пользуясь приложенными к книге Хаяси таблицами функций показательной, тригонометрических, гиперболических,¹ надо эти формулы преобразовать.

Возьмем для примера первую формулу, в которой для краткости положим $\frac{x}{l} = z$, так что будет

$$X = (\operatorname{ch} m - \cos m) (\operatorname{sh} mz + \sin mz) - (\operatorname{sh} m - \sin m) (\operatorname{ch} mz + \cos mz)$$

Положим

$$\frac{\operatorname{sh} m - \sin m}{\operatorname{ch} m - \cos m} = 1 - \alpha$$

так что

$$\alpha = \frac{e^{-m} + \sin m - \cos m}{\operatorname{ch} m - \cos m}$$

есть малая величина, по этой формуле хорошо вычисляемая; тогда будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch} m - \cos m} X &= \operatorname{sh} mz + \sin mz - (1 - \alpha) (\operatorname{ch} mz + \cos mz) = \\ &= \sin mz + \alpha (\operatorname{ch} mz + \cos mz) - e^{-mz} \end{aligned}$$

Все входящие во вторую часть этого равенства функции выбираются прямо из таблиц по аргументу mz , и вычисление не представит никаких затруднений.

После того как правая часть вычислена, нет надобности ее умножить на $\operatorname{ch} m - \cos m$, а лучше составить отношение

$$\frac{X(z)}{X(0)} \quad \text{или} \quad \frac{X(z)}{X\left(\frac{l}{2}\right)}$$

¹ Хороши также таблицы гиперболических функций Лиговского: Dr. W. Ligowski. Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen. Berlin, 1890.

т. е. принять за единицу или начальное значение $X(0)$, или же соответствующее середине балки, при этом, чтобы избежать в дальнейшем интерполяции, следует сразу брать те значения аргумента mz , которые потребуются в дальнейшем расчете.

Все прочие формулы преобразуются подобным же образом, и тогда вычисление по ним настолько просто, что дальнейших пояснений не требует и для практических целей может быть выполнено логарифмической линейкой.

Г л а в а II

РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

§ 25. При расчете балок переменного сечения надо различать два случая: а) переменным является лишь профиль балки, ширина же нижней ее панели, которой она опирается на грунт, и жесткость грунта постоянные; б) переменные и профиль балки и ширина ее нижней панели.

Пусть M будет изгибающий момент в сечении, соответствующем абсциссе x , считаемой от одного из концов балки; $EI = \sigma(x)$ — произведение модуля упругости на момент инерции площади сечения балки; $K = \theta(x)$ — отнесенная на погонный сантиметр сила поддержания грунта при прогибе в этом месте, равно одному сантиметру; $F(x)$ — внешняя нагрузка также на погонный сантиметр; наконец, y — ордината упругой линии в рассматриваемом сечении.

Общие уравнения упругого равновесия балки

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= M \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= F(x) - Ky \end{aligned} \quad (158)$$

при сделанных обозначениях примут вид

$$\begin{aligned} \sigma(x) \frac{d^2 y}{dx^2} &= M \\ \frac{d^2 M}{dx^2} + \theta(x) y &= F(x) \end{aligned} \quad (158')$$

или, исключая M ,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \theta(x) y = F(x) \quad (159)$$

Очевидно по самому виду этого уравнения, что его интегрирование в конечном виде или в квадратурах возможно лишь в весьма ограниченном числе случаев, разбирать которые бесполезно, ибо в практике они не встречаются. Поэтому к решению уравнения (159) надо применять приближенные приемы, являющиеся обобщением изложенных в гл. I.

Рассмотрение свободных упругих колебаний нашей балки, обозначая через $p(x)$ массу ее, приходящуюся на 1 см длины, в сечении коего абсцисса есть x , приводится к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x} \left[\theta(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + p(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (160)$$

Граничные условия для стержня или балки переменного сечения выражаются теми же уравнениями, как и для балки сечения постоянного.

Решение уравнения (160) ищут под видом

$$y = \Sigma X T$$

где X — функция только одной переменной x ; T — функция только одной переменной t , так чтобы каждый член этой суммы в отдельности удовлетворял уравнению (160) и граничным условиям. Тогда, обозначая через m некоторое пока неизвестное отвлеченное число, получим для определения функции T и X обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{m^4}{l^4} T = 0 \quad (161)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] - \frac{m^4}{l^4} p(x) X = 0 \quad (162)$$

Функция X должна удовлетворять граничным условиям, что подобно как для балки постоянного сечения приводит к тому,

что числа m определяются как корни некоторого трансцендентного уравнения.

Пусть эти корни будут

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \dots$$

каждому корню соответствует фундаментальная функция, эти функции мы обозначим через

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k, \dots$$

Эти функции обладают свойством ортогональности в отношении функции $p(x)$, т. е.

$$\int_0^l p(x) X_h X_j dx = 0, \text{ если } h \neq j$$

что дает возможность разлагать заданную функцию $F(x)$ в ряд вида

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k + \dots$$

по фундаментальным функциям, определяя коэффициенты по формуле

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) p(x) X_k dx}{\int_0^l p(x) X_k^2 dx} \quad (163)$$

На основании этих свойств фундаментальных функций мы покажем, что для того случая, когда ширина опорной панели и жесткость грунта постоянная, т. е. величина K не есть функция $\theta(x)$, а есть величина *постоянная*, метода, изложенная в §§ 17—21, распространяется целиком и на балки переменного профиля.

§ 26. Итак, положим, что величина K постоянная; обозначим ее по аналогии с гл. I через c^2 , тогда уравнение равновесия балки будет

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\theta(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + c^2 y = F(x) \quad (164)$$

Вообразим, что составлены фундаментальные функции

$$X_1, X_2, X_k, \dots$$

для балки той же жесткости $\sigma(x)$, как и заданная, но масса которой, отнесенная на единицу длины, *постоянная* и равна единице; тогда эти функции будут удовлетворять уравнениям вида

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 X_k}{dx^2} \right] = \frac{m_k^4}{l^4} X_k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (165)$$

и граничным условиям.

Положим, что заданная нагрузка $F(x)$ представлена в виде ряда, расположенного по этим фундаментальным функциям, так что

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k + \dots$$

Здесь коэффициенты A_k будут определяться равенствами

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \quad (166)$$

совершенно подобными равенству (125) для балки постоянного сечения, ибо $p(x) = 1$ при всяком x между 0 и l .

Уравнение (164) примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + c^2 y = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k$$

Будем искать его решение под видом

$$y = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k$$

Тогда, на основании уравнения (165), получим:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\left(\frac{m_k^4}{l^4} + c^2 \right) B_k - A_k \right] X_k = 0$$

откуда следует

$$B_k = \frac{l^4 A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} \quad (167)$$

и, значит, будет

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} X_k \quad (168)$$

т. е. совершенно та же формула, как и для балки постоянного профиля, а так как формула эта относится к *любому* виду фундаментальных функций, то и все следствия, которые мы из формулы (127) в §§ 17—21 вывели, относятся и к этому случаю, с тою лишь разницею, что в этом случае вид фундаментальных функций неизвестен; поэтому придется пользоваться формулой (149), а не формулой (147).

Функции

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \eta_n$$

будут определяться уравнениями

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right] = F(x) \quad (169)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right] = -c^2 y_0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right] = -c^2 y_1 \quad (170)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_n}{dx^2} \right] = -c^2 y_{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 \eta_n}{dx^2} \right] - c^2 \eta_n = -c^2 y_n \quad (171)$$

из которых все, кроме последнего, представляют не что иное, как уравнения упругого равновесия нашей балки переменного профиля под действием известной нагрузки; вопрос этот приводится к очевидным квадратурам и определению постоянных произвольных (в крайнем случае для каждой функции $y_0, y_1, y_2, \dots$ двух) по граничным условиям.

Квадратуры следует выполнять не аналитически, а приближенно по правилу трапеций; определение постоянных мы поясним ниже.

Если бы оказалось, что $c^2 l^4$ значительно меньше m_1^4 , то величины $y_1, y_2, \dots$ шли бы быстро убывая, приближаясь к нулю, значит, в этом случае и величина η_n , определяемая уравнением (171), приближалась бы к нулю и с принятой для расчета точностью после некоторого определенного значения n могла бы быть отброшена.

В более общем случае, когда $c^2 l^4 > m_1^4$ или если и меньше, то близко к m_1^4 , так что числа $y_1, y_2, \dots$ или шли бы возрастаая, или убывали столь медленно, что пришлось бы идти до слишком больших значений n , пока y_n стало ничтожно малым, то совершенно так же, как для балки постоянного сечения, раньше будет достигнуто равенство

$$y_{n-1} = CX_1$$

причем C есть постоянная; тогда уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_n}{dx^2} \right] = c^2 y_{n-1}$$

имело бы своим решением

$$y_n = -\frac{c^2 l^4}{m_1^4} CX_1$$

значит, при всяких x между 0 и l имело бы место соотношение

$$y_n : y_{n-1} = -\frac{c^2 l^4}{m_1^4} \quad (172)$$

которое доставило бы и значение m_1^4 , ибо $c^2 l^4$ задано, после чего нашли бы η_n по формуле

$$\eta_n = \frac{c^2 l^4}{m_1^4 + c^2 l^4} y_n \quad (173)$$

Заметим, что этот процесс попутно дает и функцию X_1 .

Как видно, этот способ расчета применим только в том случае, когда величина K есть постоянная.

Жесткость балки $\sigma(x)$ при этом способе расчета может быть задана как угодно, даже графически, — нам этой функции дифференцировать не приходится. Эта функция может быть и прерывная, может быть ступенчатой, состоя из отдельных прямолинейных участков, и т. п., — расчет остается без изменения, какова бы нагрузка ни была, и не требует составления условий сопряжения,

§ 27. Остается показать, каким образом в тех случаях закрепления концов балки, которые делают ее статически неопределимой, находятся постоянные произвольные, вводимые интегрированием при вычислении величин $y_0, y_1, y_2, \dots$

Положим для определенности рассуждения, что оба конца балки заделаны так, что граничные условия выражаются следующими уравнениями:

при $x=0$ должно быть $y'(0)=0$ и $y(0)=0$

при $x=l$ должно быть $y'(l)=0$ и $y(l)=0$

Имеем уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right] = F(x) \quad (174)$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right] = \int_0^x F(t) dt + A \quad (175)$$

причем A есть произвольная постоянная, значение же интеграла

$$\int_0^x F(t) dt = S(x)$$

представляющего срезающую силу в сечении x , происходящую от данной нагрузки $F(x)$, найдется, если выполнять интегрирование как обыкновенно или аналитически, или по правилу трапеций приближенно.

Второе интегрирование дает

$$\sigma(x) \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \int_0^x S(t) dt + Ax + B \quad (176)$$

причем интеграл

$$\int_0^x S(t) dt = M(x)$$

представляющий производимый заданной нагрузкой в сечении x изгибающий момент, найдется как обыкновенно.

Затем будет

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{M(x)}{\sigma(x)} + A \frac{x}{\sigma(x)} + B \frac{1}{\sigma(x)} \quad (177)$$

следовательно,

$$\frac{dy_0}{dx} = \int_0^x \frac{M(t)}{\sigma(t)} dt + A \int_0^x \frac{t}{\sigma(t)} dt + B \int_0^x \frac{1}{\sigma(t)} dt + C \quad (178)$$

Пусть будет

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_0^x \frac{M(t)}{\sigma(t)} dt \\ \varphi(x) &= \int_0^x \frac{t}{\sigma(t)} dt \\ \psi(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sigma(t)} dt \end{aligned} \quad (179)$$

Все эти интегралы найдутся или точно, или приближенно по правилу трапеций, как обыкновенно.

Наконец, будет

$$y_0 = \int_0^x T(t) dt + A \int_0^x \varphi(t) dt + B \int_0^x \psi(t) dt + Cx + D$$

Пусть будет

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \int_0^x T(t) dt \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (180)$$

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt$$

тогда будет

$$y_0 = Y_0(x) + A\varphi_1(x) + B\psi_1(x) + Cx + D \quad (181)$$

Заметим, что на основании равенств (179) и (180) будет

$$Y_0(0) = 0; Y'_0(0) = 0; \varphi_1(0) = 0; \varphi'_1(0) = 0; \psi_1(0) = 0; \psi'_1(0) = 0$$

Обращаясь к граничным условиям, получим:

$$y_0(0) = 0 = D$$

$$y'_0(0) = 0 = C$$

Затем

$$\begin{aligned} y_0(l) &= Y_0(l) + A\varphi_1(l) + B\psi_1(l) = 0 \\ y'_0(l) &= T(l) + A\varphi(l) + B\psi(l) = 0 \end{aligned} \quad (182)$$

откуда и найдутся постоянные A и B .

Само собою понятно, что подобным же образом определяются постоянные, вводимые интегрированием в функции y_1 , y_2 и т. д.

Для ясности прилагаем схемы, по которым, пользуясь правилом трапеций, вычисляются все входящие в предыдущие уравнения величины (стр. 457).

Численного примера не приводим, так как, кроме некоторой длины и утомительного однообразия, вычисление по приведенным схемам никаких трудностей не представляет.

§ 28. Второй случай, т. е. когда и жесткость балки и ширина панели, на коей она лежит, — переменные, является самым общим и требует применения способа численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Из различных приемов такого интегрирования мы воспользуемся методом Адамса—Штермера, изложение которой можно найти во многих статьях моих в применении к техническим вопросам.

В этом случае будем иметь уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \theta(x)y = F(x) \quad (183)$$

причем $\sigma(x)$, $\theta(x)$ и $F(x)$ — заданные функции переменной x , — задание это может быть табличное и графическое.

К этому уравнению надо присовокупить граничные условия, относящиеся к концам $x=0$ и $x=l$ балки.

Для определенности и ясности рассуждения положим, что оба конца балки свободные, так что граничные условия суть

$$\text{при } x=0 \text{ должно быть } y'''(0)=0; y''(0)=0$$

$$\text{при } x=l \text{ должно быть } y'''(l)=0; y''(l)=0$$

Расчет следует вести в такой последовательности.

1°. Положить

$$y_0 = Cx + D$$

и определить постоянные C и D так, чтобы было

$$\begin{aligned} \int_0^l [F(x) - (Cx + D)\theta(x)] dx &= 0 \\ \int_0^l [F(x) - (Cx + D)\theta(x)] x dx &= 0 \end{aligned} \quad (184)$$

Этими уравнениями определяется такое оседание бесконечно жесткой балки (не деформируемой), имеющей ту же форму нижней панели, при котором при данной нагрузке удовлетворяются условия статического равновесия.

2°. Положить в уравнении (183)

$$y = Cx + D + Y$$

тогда неизвестная функция Y будет определяться уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] + \theta(x) Y = F(x) - \theta(x) (Cx + D)$$

3°. Обозначив для краткости

$$F(x) - \theta(x) (Cx + D) = F_1(x)$$

полагаем

$$Y = Y_0 + z$$

СХЕМА 1. Вычисление функций $S(x)$, $M(x)$, $T(x)$, $Y_0(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x	$\frac{1}{\sigma} \frac{(x)}{\sigma}$	$F(x)$	Суммы (3) попарно	Суммы (4) сверху	$(5) \cdot \frac{1}{2} h = S(x)$	Суммы (6) попарно	Суммы (7) сверху	$(8) \cdot \frac{1}{2} h = M(x)$	$(9) \cdot (2) = M(x) : \sigma(x)$	Суммы (10) попарно	Суммы (11) сверху	$(12) \cdot \frac{1}{2} h = T(x)$	Суммы (13) попарно	Суммы (14) сверху	$(15) \cdot \frac{1}{2} h = Y_0(x)$

СХЕМА 2. Вычисление функций $\psi(x)$, $\phi(x)$, $\varphi_1(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	$\frac{1}{\sigma} \frac{(x)}{\sigma}$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	$(4) \cdot \frac{1}{2} h = \psi(x)$	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	$(7) \cdot \frac{1}{2} h = \psi_1(x)$	$(1) \cdot (2) = \frac{\sigma(x)}{x}$	Суммы (9) попарно	Суммы (10) сверху	$(11) \cdot \frac{1}{2} h = \varphi(x)$	Суммы (12) попарно	Суммы (13) сверху	$(14) \cdot \frac{1}{2} h = \varphi_1(x)$

и определяем Y_0 по методе, указанной в § 27, так, чтобы было

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \right] = F_1(x)$$

Тогда неизвестная z будет определяться уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \right] + \theta(x) z = -\theta(x) Y_0 \quad (185)$$

Может представиться, что этим последним преобразованием расчет только напрасно удлиняется, ибо уравнение (185) того же вида, как и предложенное (183). Но дело в том, что в предложенном уравнении в состав функции $F(x)$ могут входить сосредоточенные силы, эта функция может быть разрывная и т. п., при вычислении Y_0 все эти обстоятельства никаких затруднений не представляют и не требуют составления условий сопряжения, но при численном интегрировании уравнения (183) разрывность функции $F(x)$ и сосредоточенные силы доставляют ряд затруднений, разбирать которые нет надобности, ибо описанным преобразованием они устраняются. Функция $\theta(x) Y_0$ будет, так сказать, „сглаженная“, и при численном интегрировании можно будет брать больший табличный промежуток h , что сокращает работу.

4°. После описанной подготовки положим

$$\theta(x) Y_0 = f(x) \quad (186)$$

тогда уравнение (185) будет

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \right] + \theta(x) z = f(x) \quad (187)$$

Неизвестная функция z определяется этим уравнением и граничными условиями, которые в нашем предположении суть

$$\text{при } x=0 \text{ должно быть } z'''(0)=0; \quad z''(0)=0$$

$$\text{при } x=l \text{ должно быть } z'''(l)=0; \quad z''(l)=0$$

Уравнение (187) есть линейное с последним членом, следовательно, общий его интеграл будет вида

$$z = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + A_3 Z_3 + A_4 Z_4 + \Phi(x) \quad (188)$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные; $\Phi(x)$ есть любое частное решение уравнения (187) с последним членом, причем нет надобности, чтобы это частное решение удовлетворяло граничным условиям (если бы это было, вопрос был бы решен); Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 — частные решения, линейно между собою независимые, уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 Z}{dx^2} \right] + \theta(x) Z = 0 \quad (189)$$

без последнего члена, соответствующего уравнению (187). Опять-таки нет надобности, чтобы эти решения удовлетворяли граничным условиям — этим условиям должна удовлетворять функция z , а не каждая из составных частей ее в отдельности. В нашем случае граничные условия будут

$$\begin{aligned} A_1 Z_1''(0) + A_2 Z_2''(0) + A_3 Z_3''(0) + A_4 Z_4''(0) + \Phi''(0) &= 0 \\ A_1 Z_1'''(0) + A_2 Z_2'''(0) + A_3 Z_3'''(0) + A_4 Z_4'''(0) + \Phi'''(0) &= 0 \\ A_1 Z_1''(l) + A_2 Z_2''(l) + A_3 Z_3''(l) + A_4 Z_4''(l) + \Phi''(l) &= 0 \\ A_1 Z_1'''(l) + A_2 Z_2'''(l) + A_3 Z_3'''(l) + A_4 Z_4'''(l) + \Phi'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (190)$$

Вид этих условий показывает, что при численном интегрировании уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right] + \theta(x) \Phi = f(x) \quad (191)$$

которым определяется функция $\Phi(x)$, и уравнения (189), которым определяется Z , надо распорядиться так, чтобы были известны и значения производных этих функций и их не приходилось бы находить по правилам дифференцирования табличных функций, пользуясь формулами теории конечных разностей.

Начальными (соответствующими $x=0$) значениями функций Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и Φ мы можем распоряжаться как угодно, заботясь, однако, чтобы между решениями Z_k не было линейного соотношения. Мы этого наверное достигнем, подчинив, следуя Коши, начальные значения функций Z_k тем же условиям (единичная матрица), которым мы в § 4 подчинили функции Y_k , что нам и дало возможность решить в простом и самом общем виде вопрос о балке постоянного сечения, т. е. пишем такую схему этих начальных значений:

$$\begin{aligned} Z_1(0) &= 1; \quad Z_1'(0) = 0; \quad Z_1''(0) = 0; \quad Z_1'''(0) = 0 \\ Z_2(0) &= 0; \quad Z_2'(0) = 1; \quad Z_2''(0) = 0; \quad Z_2'''(0) = 0 \\ Z_3(0) &= 0; \quad Z_3'(0) = 0; \quad Z_3''(0) = 1; \quad Z_3'''(0) = 0 \\ Z_4(0) &= 0; \quad Z_4'(0) = 0; \quad Z_4''(0) = 0; \quad Z_4'''(0) = 1 \end{aligned} \quad (192)$$

Функцию же $\Phi(x)$ мы подчиним тем же самым условиям (36''), как и раньше, а именно:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0 \quad (192')$$

тогда в граничные условия для $x=0$ эта функция входить не будет.

При таком выборе начальных значений, на основании граничных условий, относящихся к $x=0$, при любой их комбинации, две из постоянных произвольных A_1, A_2, A_3, A_4 будут равны нулю. Так, в нашем случае, очевидно, будет

$$A_3 = 0 \text{ и } A_4 = 0$$

значит, нет надобности вычислять те две функции Z_3 и Z_4 , которые на эти постоянные умножаются, так что искомое решение, удовлетворяющее граничным условиям при $x=0$, будет заключать не четыре, а две постоянные произвольные — в нашем случае A_1 и A_2 — и, значит, это решение будет вида

$$z = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \Phi(x) \quad (193)$$

причем постоянные произвольные A_1 и A_2 определяются по граничным условиям для $x=l$, которые в нашем случае будут

$$\begin{aligned} A_1 Z_1''(l) + A_2 Z_2''(l) + \Phi''(l) &= 0 \\ A_1 Z_1'''(l) + A_2 Z_2'''(l) + \Phi'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (194)$$

Таким образом, все свелось к вычислению функций Z_1 , Z_2 и Φ , определяемых уравнениями (189) и (191), и начальными их значениями, указанными в схеме (192), что производится по методу численного интегрирования уравнений без всяких затруднений.

Хотя в нашем случае для численного интегрирования уравнений (189) и (191) можно бы было привести каждое из них к системе двух уравнений второго порядка и применить методу Штермера, но, ввиду надобности иметь значения производных этих функций, в общем случае выгоднее привести каждое из этих уравнений к системе уравнений *первого* порядка и применить методу Адамса, для которой мы ниже приведем схемы, не приводя таковых для метода Штермера.

Положим, что надо определить функцию Z_1 по уравнению (189)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\vartheta(x) \frac{d^2 Z_1}{dx^2} \right] + \theta(x) Z_1 = 0$$

Это уравнение заменяем системою

$$\frac{dZ_1}{dx} = u; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma(x)} v; \quad \frac{dv}{dx} = w; \quad \frac{dw}{dx} = -\theta(x) Z_1 \quad (195)$$

для которой начальные условия таковы:

$$\text{при } x=0 \text{ должно быть } Z_1(0)=1; \quad u(0)=v(0)=w(0)=0$$

Чтобы применить к этой системе методу Адамса, которую предполагаем известной, полагаем, выбрав достаточно малый табличный промежуток h ,

$$\alpha_n = u_n h; \quad \beta_n = \frac{1}{\sigma(x_n)} v_n h; \quad \gamma_n = w_n h; \quad \varepsilon_n = -\theta(x_n) Z_{1,n} h \quad (196)$$

и для каждой из неизвестных u , v , w , Z_1 составляем таблицу, подобную следующей для переменной Z_1 (стр. 462):

1	2	3	4	5	6	7
№	x	α_n	$\Delta\alpha_n$	$\Delta^2\alpha_n$	$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	x_{n-2}	α_{n-2}				$Z_{1,n-2}$
$n-1$	x_{n-1}	α_{n-1}	$\Delta\alpha_{n-2}$	$\Delta^2\alpha_{n-2}$	$\Delta Z_{1,n-2}$	$Z_{1,n-1}$
n	x_n	α_n	$\Delta\alpha_{n-1}$	$\Delta^2\alpha_{n-1}$	$\Delta Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$n+1$	x_{n+1}	α_{n+1}	$\Delta\alpha_n$		$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n+1}$

причем $\Delta Z_{1,n}$ вычисляется по формуле

$$\Delta Z_{1,n} = \alpha_n + \frac{1}{2} \Delta\alpha_n + \frac{5}{12} \Delta^2\alpha_{n-2} \quad (197)$$

Таким образом, полная схема для нашего вычисления будет такова, как в нижеследующей таблице:

Схема вычисления

Данные				Вычисление Z_1					Вычисл		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$\frac{h}{\theta(x_n)}$	$\begin{matrix} \parallel \\ \frac{h}{\sigma(x_n)} \\ \parallel \\ \frac{h}{\theta(x_n)} \end{matrix}$	$\Delta\alpha_n$	$\Delta^2\alpha_n$	$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n}$	$\begin{matrix} \parallel \\ \frac{h}{\sigma(x_n)} \\ \parallel \\ \frac{h}{\theta(x_n)} \end{matrix}$	$\Delta\epsilon_n$	$\Delta^2\epsilon_n$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	x_{n-2}	$\frac{h}{\sigma(x_{n-2})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n-2})}$	α_{n-2}		$\Delta^2\alpha_{n-3}$		$Z_{1,n-2}$	ϵ_{n-2}		$\Delta^2\epsilon_{n-3}$
$n-1$	x_{n-1}	$\frac{h}{\sigma(x_{n-1})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n-1})}$	α_{n-1}	$\Delta\alpha_{n-2}$	$\Delta^2\alpha_{n-2}$	$\Delta Z_{1,n-2}$	$Z_{1,n-1}$	ϵ_{n-1}	$\Delta\epsilon_{n-2}$	$\Delta^2\epsilon_{n-2}$
n	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$\frac{h}{\theta(x_n)}$	α_n	$\Delta\alpha_{n-1}$	$\Delta^2\alpha_{n-1}$	$\Delta Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$	ϵ_n	$\Delta\epsilon_{n-1}$	$\Delta^2\epsilon_{n-1}$
$n+1$	x_{n+1}	$\frac{h}{\sigma(x_{n+1})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n+1})}$	α_{n+1}	$\Delta\alpha_n$		$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n+1}$	ϵ_{n+1}	$\Delta\epsilon_n$	
$n+2$	...	...	...								

При вычислении по этой схеме служат формулы:

$$\Delta Z_{1,n} = \alpha_n + \frac{1}{2} \Delta \alpha_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \alpha_{n-2}; \quad Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \Delta Z_{1,n}$$

$$\Delta w_n = \varepsilon_n + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \varepsilon_{n-2}; \quad w_{n+1} = w_n + \Delta w_n$$

$$\Delta v_n = \gamma_n + \frac{1}{2} \Delta \gamma_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \gamma_{n-2}; \quad v_{n+1} = v_n + \Delta v_n$$

$$\Delta u_n = \beta_n + \frac{1}{2} \Delta \beta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \beta_{n-2}; \quad u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$$

В этой схеме показан процесс перехода от значений $Z_{1,n}$, w_n , v_n , u_n , соответствующих абсциссе x_n , к значениям $Z_{1,n+1}$, w_{n+1} , v_{n+1} , u_{n+1} , когда вычисление в ходу и, значит, все таблицы заполнены так, как показано для Z . По формулам (196) вычисляются значения

$$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \varepsilon_n$$

и вписываются в свои места, затем по формуле (197) и ей подобным вычисляются разности

$$\Delta u_n, \Delta v_n, \Delta w_n, \Delta Z_{1,n}$$

функций Z_1 , w , v , u

име w		Вычисление v					Вычисление u				
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Δw_n	w_n	$\gamma_n \parallel \frac{w_n \cdot h}{(14) \cdot h} \parallel$	$\Delta \gamma_n$	$\Delta^2 \gamma_n$	Δv_n	v_n	$\beta_n \parallel \frac{v_n \cdot h}{\sigma(x_n) \cdot (3)} \parallel$	$\Delta \beta_n$	$\Delta^2 \beta_n$	Δu_n	u_n
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Δw_{n-2}	w_{n-2}	γ_{n-2}	$\Delta \gamma_{n-2}$	$\Delta^2 \gamma_{n-3}$	Δv_{n-2}	v_{n-2}	β_{n-2}	$\Delta \beta_{n-2}$	$\Delta^2 \beta_{n-3}$	Δu_{n-2}	u_{n-2}
Δw_{n-1}	w_{n-1}	γ_{n-1}	$\Delta \gamma_{n-1}$	$\Delta^2 \gamma_{n-2}$	Δv_{n-1}	v_{n-1}	β_{n-1}	$\Delta \beta_{n-1}$	$\Delta^2 \beta_{n-2}$	Δu_{n-1}	u_{n-1}
Δw_n	w_n	γ_n	$\Delta \gamma_n$	$\Delta^2 \gamma_{n-1}$	Δv_n	v_n	β_n	$\Delta \beta_n$	$\Delta^2 \beta_n$	Δu_n	u_n
	w_{n+1}	γ_{n+1}				v_{n+1}					

и вписываются в свои места, после чего получаются

$$u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, Z_{1,n+1}$$

и вписываются в свои места; по этим значениям вычисляются

$$\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}$$

и разности, как показано в первых трех таблицах, которые заполнены, а последняя для ясности оставлена незаполненной, и таким образом процесс продолжается дальше.

Совершенно подобным же образом вычисляются Z_2 и Φ .

В схемах показано, каким образом *продолжать* вычисление, когда оно в ходу. Начало таблиц, т. е. числа, соответствующие значениям $n=0$, $n=1$ и $n=2$, составляются последовательными приближениями следующим образом.

Значения u_0 , v_0 , w_0 , $Z_{1,0}$ заданы, вписываем их в свои места, вычисляем по ним α_0 , β_0 , γ_0 , ε_0 , которые также вписываем в свое место. Затем ведем отдельно следующий расчет.

Полагаем в первом приближении

$$\Delta u_0 = \beta_0; \Delta v_0 = \gamma_0; \Delta w_0 = \varepsilon_0; \Delta Z_{1,0} = \alpha_0$$

и пишем приближенно

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0; v_1 = v_0 + \Delta v_0; w_1 = w_0 + \Delta w_0; Z_{1,1} = Z_{1,0} + \Delta Z_{1,0}$$

Вычисляем по этим значениям величины

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varepsilon_1$$

составляем разности

$$\Delta \alpha_0, \Delta \beta_0, \Delta \gamma_0, \Delta \varepsilon_0$$

и пишем более точные равенства

$$\Delta u_0 = \beta_0 + \frac{1}{2} \Delta \beta_0 \quad \text{и} \quad \Delta u_1 = \beta_1 + \frac{1}{2} \Delta \beta_0$$

$$\Delta v_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2} \Delta \gamma_0 \quad \text{и} \quad \Delta v_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \Delta \gamma_0$$

$$\Delta w_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \Delta w_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_0$$

$$\Delta Z_{1,0} = \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta \alpha_0 \quad \text{и} \quad \Delta Z_{1,1} = \alpha_1 + \frac{1}{2} \Delta \alpha_0$$

и по ним находим значения

$$u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, Z_{1,1}, Z_{1,2}$$

и затем

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \epsilon_2$$

составляем вновь разности

$$\Delta\alpha_0, \Delta\alpha_1, \Delta^2\alpha_0; \Delta\beta_0, \Delta\beta_1, \Delta^2\beta_0, \dots$$

и затем

$$\Delta Z_{1,0} = \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta\alpha_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\alpha_0$$

$$\Delta w_0 = \epsilon_0 + \frac{1}{2} \Delta\epsilon_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\epsilon_0$$

$$\Delta v_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2} \Delta\gamma_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\gamma_0$$

$$\Delta u_0 = \beta_0 + \frac{1}{2} \Delta\beta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\beta_0$$

$$\Delta Z_{1,1} = \alpha_1 + \frac{1}{2} \Delta\alpha_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\alpha_0$$

$$\Delta w_1 = \epsilon_1 + \frac{1}{2} \Delta\epsilon_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\epsilon_0$$

$$\Delta v_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \Delta\gamma_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\gamma_0$$

$$\Delta u_1 = \beta_1 + \frac{1}{2} \Delta\beta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\beta_0$$

По этим разностям перевычисляем

$$Z_{1,1} \text{ и } Z_{1,2}; w_1 \text{ и } w_2; v_1 \text{ и } v_2; u_1 \text{ и } u_2$$

вписываем их в свои места схемы, после чего продолжаем вычисление по этой схеме.

Как видно, процесс вычисления весьма прост и симметричен.

Если окажутся очень малые числа, то надо вычислять, например, не β_n , а $\beta_n \cdot 10^k$, взяв подходящее значение k . Привычный вычислитель сам найдет, как сократить работу и придавать вычислению удобный вид.

Понятно, что все вычисление надо вести логарифмической линейкой 50 см длиной; точность его будет больше, нежели в этом вопросе практикою требуется.

После того как вычислены функции Z_1 , Z_2 и Φ , составляем уравнения (195) для определения постоянных произвольных, взяв входящие в эти уравнения значения производных из наших таблиц. Так, например, мы имеем, на основании равенств (194):

$$\frac{d^2 Z_1}{dx^2} = Z_1'' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma(x)} v \quad (198)$$

значит, будет

$$Z_1''(l) = \frac{1}{\sigma(l)} v(l) \quad (199)$$

Чтобы найти $Z_1'''(l)$, надо обратиться к формуле

$$\sigma(x) Z_1' = v$$

из которой следует

$$\sigma'(l) Z_1''(l) + \sigma(l) Z_1'''(l) = \left(\frac{dv}{dx} \right)_l = w(l) \quad (200)$$

Величина $\sigma'(l)$ по заданной функции $\sigma(x)$ найдется или аналитически, или графически, тогда предыдущее уравнение даст величину $Z_1'''(l)$.

Совершенно так же найдутся и прочие значения производных, входящие в уравнения (195).

После того как постоянные определены, надо по формуле

$$y = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \Phi(x) \quad (201)$$

вычислить величину y и затем проверить ее, как объяснено выше, пользуясь уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = F(x) - \theta(x) y \quad (202)$$

в правую часть которого надо подставить величину y , рассчитываемую по формулам (201).

В том случае, когда функции $\sigma(x)$ и $\theta(x)$ заданы таблично или графически, так что нахождение их частных значений весьма просто, можно численное интегрирование системы уравнений (195) производить по методу Эйлера, взяв достаточно мелкие промежутки.

По этой методе, сохраняя обозначения (196), вычисление производим по следующей схеме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ n	x	$\frac{h}{\sigma(x)}$	$h\theta(x)$	α_n	u_n	β_n	v_n	γ_n	$w_{1,n}$	ϵ_n	$Z_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$h\theta(x_n)$	α_n	u_n	β_n	v_n	γ_n	w_n	ϵ_n	$Z_{1,n}$
$n+1$					u_{n+1}		v_{n+1}		w_{n+1}		$Z_{1,n+1}$

Причем

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_n$$

$$v_{n+1} = v_n + \beta_n$$

$$w_{n+1} = w_n + \gamma_n$$

$$Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \epsilon_n$$

Вычисление по этой схеме настолько просто, что никаких пояснений не требует.

§ 29. Мы развили несколько методов расчета балки на упругом основании. Спрашивается, которою же методою пользоваться?

Первая метода — составления точного решения — приложима только для балок *постоянного* сечения.

Вторая метода — разложения заданной нагрузки по фундаментальным функциям — приложима также только для балок *постоянного* сечения, для которых эти функции известны; эта метода особенно удобна, когда балка *подперта* в обоих концах, — тогда эта метода быстро и просто ведет к цели.

Остальные методы основаны на приближенном численном интегрировании или функций (метода, изложенная в §§ 16—21), или уравнений. Последняя метода является, так сказать, универсальною и приложима ко *всякому* случаю расчета балок на упругом основании, т. е. как балок *постоянного*, так и *переменного* сече-

ния, постоянной или переменной ширины опорной панели при любой нагрузке.

Метода §§ 16—21, которую можно назвать методом последовательных приближений, приложима для балок постоянного сечения и при переменном сечении — для балок с постоянной шириной опорной панели и однородном грунте, что является, однако, довольно обычным случаем.

Необходимо, однако, обратить внимание, что при переменном K метода последовательных приближений вообще не применима, — процесс, представляемый формулами (170), может оказаться расходящимся, и без рассмотрения дополнительного члена η_m , определяемого уравнением (171), этот процесс не может считаться обоснованным.

Вычислительный процесс в обоих методах разнится в том, что в методе последовательных приближений вычисление ведется „по столбцам“, т. е. один и тот же процесс, например „суммирование попарно“ или „суммирование сверху“, ведется в одном столбце с верху до низу таблицы, *не перебиваясь другими процессами*. В методе численного интегрирования уравнений вычисление ведется по *строкам*, сказанного однообразия процесса нет, и он идет, так сказать, с *постоянными перебоями*, что делает его требующим большего внимания, а значит, и вызывающим большее утомление, вследствие чего при одинаковом числе написанных цифр (что по Гауссу¹ является мерою вычислительной работы) этот процесс требует приблизительно на 50% больше времени, нежели предыдущий.

На основании этих замечаний можно сказать вообще: 1) для балок постоянного сечения следует вообще пользоваться „точной“

¹ 5 апреля 1812 г. Гаусс, приступив к вычислению возмущений Паллады Юпитером, рассчитал, сколько весь расчет потребует цифр — оказалось 338 400. По пробному вычислению он определил, что всю работу окончит 12 июля, что и записал в своем дневнике, в который затем вносил ход действительного исполнения работы. 13 июля он написал Ольберсу, что эту работу он в назначенный срок окончил! (Gauss, Werke, Bd. VII, 1906, S. 605).

методом, как она у нас изложена, за исключением случая балки, подпертой в обоих концах, когда разложение по фундаментальным функциям (в этом случае $\sin \frac{k\pi x}{l}$) ведет проще и быстрее к цели; 2) для балки переменного сечения и переменной ширины нижней панели единственным практически применимым методом является метода численного интегрирования уравнения. Таким образом, остается только случай балки переменного профиля и постоянной ширины опорной панели, к которому приложимы обе методы: последовательных приближений и численного интегрирования уравнений.

Чтобы в каждом частном случае сделать обоснованный выбор между этими методами, надо поступать так:

а) определить, как показано ниже, сколько приближений надо взять для получения требуемой точности, предполагая, что вычисление ведется на четыре знака, причем последний сомнительный;

б) составить схему и по ней сосчитать, сколько придется всего написать цифр, причем учесть и необходимый поверительный расчет, производимый, как объяснено в § 14, приняв, например, табличный промежуток h в $\frac{1}{24}l$;

в) для методы численного интегрирования учесть, составив схему, сколько цифр придется написать для вычисления величины Y_0 квадратурами для „приведения“ нагрузки;

г) по схеме § 28 сосчитать, сколько цифр придется написать для вычисления функций Z_i , Z_j и $\Phi(x)$, входящих в состав величины y по роду граничных условий; при этом счете надо принимать, что в столбцах 3, 4, 5, 10, 15, 20, 9, 14, 19 и 24 будет по четыре значащих цифры в каждой строке, в столбцах 6, 11, 16, 21, 8, 13, 18 и 23 — по три цифры, в столбцах 7, 12, 17 и 22 — по две цифры, а всего в строке будет

$$4 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 72$$

т. е. по 72 цифры, а во всей схеме при 24 строках

$$72 \cdot 24 = 1728 \text{ цифр}$$

что равносильно

$$1728 \cdot 1.50 = 2592$$

или кругло 2600 цифрам схем в расчете по простым квадратурам. Таких схем надо заполнить три, значит эту работу надо всего оценивать в 7800 цифр. К этому надо присовокупить одну схему квадратур на приведение нагрузки, т. е. 1600 цифр, и одну схему для поверительного расчета — 1600 цифр, так что всего при 24 точках будет 11 000 цифр.

При расчете по последовательному приближению каждое приближение требует заполнения схемы в 1600 цифр, когда число точек 24, значит расчет по численному интегрированию уравнения равносильен по затрате работы получению четырех приближений, т. е. y_0 , y_1 , y_2 и y_3 и поверительному расчету для y_4 .

Чтобы определить, доставит ли это требуемую степень точности, надо взять отношение

$$m_2^{4k} [m_2^4 + c^2 l^4] : m_1^{4k} [m_1^4 + c^2 l^4]$$

при значениях $k=1, 2, 3, 4, \dots$ и выбрать то значение k , при котором это отношение становится равным и большим 5000.

Характеристические числа можно для приближения брать для случая однородной балки при одинаковых граничных условиях с данною.

Так, например, положим, что рассчитывается фундамент шириною 200 см при сопротивлении грунта 8 кг/см^3 , так что наше $k = c^2 = 8 \cdot 200 = 1600$. Оба конца свободны, тогда:

$$m_1 = 4.73; \quad m_2 = 7.85$$

$$m_1^4 = 500; \quad m_2^4 = 3800$$

$$m_1^4 + c^2 = 2100; \quad m_2^4 + c^2 = 5400$$

$$m_2^4 (m_2^4 + c^2) : m_1^4 (m_1^4 + c^2) = 13.8$$

$$m_2^8 (m_2^4 + c^2) : m_1^8 (m_1^4 + c^2) = 105$$

$$m_2^{12} (m_2^4 + c^2) : m_1^{12} (m_1^4 + c^2) = 794$$

$$m_2^{16} (m_2^4 + c^2) : m_1^{16} (m_1^4 + c^2) = 6040$$

$$m_2^{20} (m_2^4 + c^2) : m_1^{20} (m_1^4 + c^2) = 45880$$

Из этого видно, что надо вычислить y_4 и y_5 , отношение которых будет постоянное в пределах точности вычисления, и, значит, доставит нужное значение m_1^4 . Таким образом, потребуется заполнить *шесть* схем для получения y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , y_4 и y_5 и еще одну для проверки полученного результата, что составит

$$1600 \cdot 7 = 11200 \text{ цифр}$$

т. е. столько же, как и при методе численного интегрирования уравнения. Но ввиду того, что процесс вычисления по последовательным приближениям более прост и может быть поручен менее искусному вычислителю, то в данном случае следовало применить этот способ.

П Р И Б А В Л Е Н И Е

О РАСЧЕТЕ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ И НАБОРА СУДОВОГО ДНИЩА

§ 1. Методы, изложенные в гл. I, можно обобщить и применить к расчету перекрестных связей, что мы и поясним, изложив вкратце сущность расчета набора судового днища и показав на этом примере то упрощение, которое вносится, если решение выражать в функциях, обозначенных через Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 .

Подробно этот вопрос рассмотрен в книге инж. В. Шиллинга (Dr. Ing. W. Schilling. Statik der Bodenkonstruktion der Schiffe. J. Springer, Berlin, 1925), но здесь применены обычные приемы, ведущие к напрасному усложнению дела, как будет отмечено в своем месте далее.

§ 2. Днищевой набор коммерческого судна обыкновенной системы постройки состоит из среднего кия, нескольких параллельных ему продольных балок, называемых стрингерами, и многочисленных поперечных балок, называемых шпангоутами.

Опорами для килей и стрингеров служат поперечные переборки, на которых, смотря по относительной жесткости, считают, что продольные балки *подперты* или *заделаны*.

Расположение шпангоутов между переборками равномерное, поэтому когда пиллерсов нет, то нагрузка продольных балок симметрична относительно плоскости, проходящей через середину длины их параллельно переборкам. Ввиду большого числа шпангоутов воображают, что число их бесконечно большое, и, таким образом, приводят вопрос к рассмотрению системы балок, лежащих на упругом основании.

Не входя в изложение самого способа составления уравнений упругого равновесия такой системы, мы ограничимся лишь методом их интегрирования и определения постоянных произвольных по условиям закрепления продольных балок на поперечных переборках.

§ 3. Мы начнем с рассмотрения того случая, когда в данном трюме *пиллерсов нет*.

Для каждой балки абсциссы x будем считать от ее середины, полудлину балки обозначим через l и вместо переменной x введем переменную z уравнением

$$lz = x$$

и производные по этой переменной будем обозначать значками.

Вследствие симметрии для каждой балки при любом их числе одна пара граничных условий будет

$$\text{при } z=0 \text{ должно быть } y'(0)=0; y'''(0)=0$$

Вторая пара граничных условий будет выражаться различно, смотря по тому, считается ли конец $z=1$ подпертым или заделанным, и эти условия таковы:

а) если конец *подперт*:

$$\text{при } z=1 \text{ должно быть } y(1)=0; y''(1)=0$$

б) если конец *заделан*:

$$\text{при } z=1 \text{ должно быть } y(1)=0; y'(1)=0$$

В этом вопросе нам придется пользоваться функциями Y_k от аргумента az , поэтому приведем сводку главнейших формул, к ним относящихся.

1°. Очевидно, что начальные значения этих функций и их производных первых трех порядков будут заключаться в той же единичной матрице.

Сами же функции и их производные суть:

	Y_k	Y'_k	Y''_k	Y'''_k
Y_1	1	0	0	0
Y_2	0	1	0	0
Y_3	0	0	1	0
Y_4	0	0	0	1

K	Функции $Y_k(az)$	Y'_k	Y''_k	Y'''_k
1	$Y_1(az) = \operatorname{ch} az \cos az$	$-4aY_4$	$-4a^2Y_3$	$-4a^3Y_2$
2	$Y_2(az) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} az \sin az + \operatorname{sh} az \cos az)$	aY_1	$-4a^2Y_4$	$-4a^3Y_3$
3	$Y_3(az) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} az \sin az$	aY_2	a^2Y_1	$-4a^3Y_4$
4	$Y_4(az) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} az \sin az - \operatorname{sh} az \cos az)$	aY_3	a^2Y_2	a^3Y_1

Заметим также, что вообще

$$Y_k^{IV}(az) = -4a^4 Y_k(az) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению частных случаев, встречающихся в практике, на которых и поясним нашу методику.

А. Один средний киль.

В этом случае мы имеем дело с одним уравнением вида

$$ay^{IV} + y = f \quad (1)$$

причем a и f — заданные постоянные.

Хотя и очевидно, что случай этот уже рассмотрен в гл. I, но мы рассмотрим его в соответствии с прочими.

Характеристическое уравнение для (1) есть

$$as^4 + 1 = 0 \quad (2)$$

Положив в нем

$$\frac{1}{a} = 4a^4$$

будем иметь корни, отличающиеся от корней уравнения

$$s^4 + 4 = 0$$

лишь множителем a .

Значит, частные решения уравнения без последнего члена, соответствующего (1), имеющие единичную матрицу, будут

$$Y_1(az); Y_2(az); Y_3(az); Y_4(az)$$

Из рассмотрения этой матрицы видно, что для того, чтобы были удовлетворены граничные условия

$$y'(0) = 0 \text{ и } y'''(0) = 0$$

надо в составе общего интеграла оставить лишь функции $Y_1(az)$ и $Y_3(az)$ и брать

$$y = A_1 Y_1(az) + A_3 Y_3(az) + f \quad (3)$$

причем A_1 и A_3 — произвольные постоянные, которые определяются по второй паре граничных условий.

Если конец $z = 1$ подперт

$$y(1) = 0; y''(1) = 0$$

т. е.

$$A_1 Y_1(a) + A_3 Y_3(a) + f = 0$$

$$A_1 Y_1''(a) + A_3 Y_3''(a) = 0$$

На основании таблицы производных последнее уравнение переписывается так:

$$-4A_1 Y_3(a) + A_3 Y_1(a) = 0$$

так что для определения постоянных служат уравнения

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(a) + A_3 Y_3(a) + f &= 0 \\ 4A_1 Y_3(a) - A_3 Y_1(a) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Совершенно так же для того случая, когда конец $z=1$ заделан, получим:

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha) + A_3 Y_3(\alpha) + f &= 0 \\ 4A_1 Y_4(\alpha) - A_3 Y_2(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) и (3) и (5) представляют решение вопроса при обоих случаях закрепления. В дальнейшие подробности здесь нет надобности входить, заметим лишь, что, на основании таблицы производных функций Y_k , срезающие силы и изгибающие моменты выражаются через самые функции Y_k .

Б. Киль и по одному стрингеру с каждого борта.

В этом случае вопрос приводится к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + y_1 &= f_1 \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + y_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (6)$$

причем $a_1, b_1, a_2, b_2, f_1, f_2$ — заданные постоянные.

Соответствующая система уравнений без последнего члена, написанных символически, есть

$$\begin{aligned} (a_1 \delta^4 + 1) u_1 + b_1 \delta^4 u_2 &= 0 \\ a_2 \delta^4 u_1 + (b_2 \delta^4 + 1) u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

По исключении неизвестной u_2 имеем для определения u_1 уравнение

$$[(a_1 \delta^4 + 1)(b_2 \delta^4 + 1) - a_2 b_1 \delta^8] u_1 = 0 \quad (8)$$

и характеристическое уравнение

$$(a_1 s^4 + 1)(b_2 s^4 + 1) - a_2 b_1 s^8 = 0 \quad (9')$$

которое напишется так:

$$s^8 + \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} s^4 + \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = 0 \quad (9)$$

Во всех случаях практики левая часть этого уравнения разлагается на множители

$$(s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2) = 0 \quad (10)$$

причем

$$\omega_1 > 0 \text{ и } \omega_2 > 0$$

поэтому, положив

$$\omega_1 = 4\alpha_1^4 \text{ и } \omega_2 = 4\alpha_2^4 \quad (11)$$

видим, что у нас получаются две группы решений с единичною матрицею — первая с аргументом $\alpha_1 z$, вторая с аргументом $\alpha_2 z$, т. е.

$$Y_1(\alpha_1 z); Y_2(\alpha_1 z); Y_3(\alpha_1 z); Y_4(\alpha_1 z)$$

и

$$Y_1(\alpha_2 z); Y_2(\alpha_2 z); Y_3(\alpha_2 z); Y_4(\alpha_2 z)$$

так что решение нашей системы, удовлетворяющее граничным условиям при $z=0$, будет

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z) + B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z) + f_1 \\ y_2 &= \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + f_2 \end{aligned} \quad (12)$$

причем σ_1 и σ_2 определяются уравнениями

$$\begin{aligned} -4\alpha_1^4 a_2 - 4\alpha_1^4 b_2 \sigma_1 + 1 &= 0 \\ -4\alpha_2^4 a_2 - 4\alpha_2^4 b_2 \sigma_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

A_1, A_3, B_1, B_3 — произвольные постоянные.

Положим теперь, что балки при конце $z=1$ подперты, так что граничные условия для этого конца суть

$$\begin{aligned} y_1(1) &= 0; \quad y_1''(1) = 0 \\ y_2(1) &= 0; \quad y_2''(1) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

которые в нашем случае будут

$$\begin{aligned} [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + f_1 &= 0 \\ \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + f_2 &= 0 \\ [4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1)] + [4B_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2)] &= 0 \\ \sigma_1 [4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1)] + \sigma_2 [4B_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2)] &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} 4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1) &= 0 \\ 4B_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + \frac{\sigma_2 f_1 - f_2}{\sigma_2 - \sigma_1} &= 0 \\ B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + \frac{f_2 - \sigma_1 f_1}{\sigma_2 - \sigma_1} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Положив

$$\frac{\sigma_2 f_1 - f_2}{\sigma_2 - \sigma_1} = h_1 \quad \text{и} \quad \frac{f_2 - \sigma_1 f_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = h_2$$

видим, что постоянные A_1, A_3, B_1, B_3 определяются уравнениями

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 &= 0 \\ 4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + h_2 &= 0 \\ 4A_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

того же вида, как и для одной балки.

Совершенно также увидим, что для случая, когда конец $z=1$ считается заделанным, постоянные будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 &= 0 \\ 4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + h_2 &= 0 \\ 4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, вопрос решен, причем для определения постоянных произвольных служат в обоих случаях весьма простые уравнения.

В. Средний киль и по два стрингера с каждого борта.

В этом случае система уравнений будет вида

$$\begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + c_1 y_3^{IV} + y_1 &= f_1 \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + c_2 y_3^{IV} + y_2 &= f_2 \\ a_3 y_1^{IV} + b_3 y_2^{IV} + c_3 y_3^{IV} + y_3 &= f_3 \end{aligned} \quad (21)$$

Соответствующая система однородных уравнений, написанных в символической форме, есть

$$\begin{aligned}(a_1\delta^4 + 1)u_1 + b_1\delta^4 u_2 + c_1\delta^4 u_3 + u_1 &= 0 \\ a_2\delta^4 u_1 + (b_2\delta^4 + 1)u_2 + c_2\delta^4 u_3 + u_2 &= 0 \\ a_3\delta^4 u_1 + b_3\delta^4 u_2 + (c_3\delta^4 + 1)u_3 &= 0\end{aligned}\quad (22)$$

Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} a_1s^4 + 1 & b_1s^4 & c_1s^4 \\ a_2s^4 & b_2s^4 + 1 & c_2s^4 \\ a_3s^4 & b_3s^4 & c_3s^4 + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Первая часть этого уравнения разлагается для случаев, имеющих место на практике, на множители

$$(s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2)(s^4 + \omega_3) = 0 \quad (24)$$

причем

$$\omega_1 > 0; \quad \omega_2 > 0; \quad \omega_3 > 0$$

поэтому, положив

$$\omega_1 = 4\alpha_1^4; \quad \omega_2 = 4\alpha_2^4; \quad \omega_3 = 4\alpha_3^4 \quad (25)$$

получим три группы частных решений с единичною матрицею, а именно:

$$\begin{aligned}Y_1(\alpha_1 z); \quad Y_2(\alpha_1 z); \quad Y_3(\alpha_1 z); \quad Y_4(\alpha_1 z) \\ Y_1(\alpha_2 z); \quad Y_2(\alpha_2 z); \quad Y_3(\alpha_2 z); \quad Y_4(\alpha_2 z) \\ Y_1(\alpha_3 z); \quad Y_2(\alpha_3 z); \quad Y_3(\alpha_3 z); \quad Y_4(\alpha_3 z)\end{aligned}$$

и решения, удовлетворяющие граничным условиям при $z=0$, т. е.

$$\begin{aligned}y'_1(0) &= 0; \quad y'''_1(0) = 0 \\ y'_2(0) &= 0; \quad y'''_2(0) = 0 \\ y'_3(0) &= 0; \quad y'''_3(0) = 0\end{aligned}\quad (26)$$

будут

$$\begin{aligned}y_1 = A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_2 Y_2(\alpha_1 z) + B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_2 Y_2(\alpha_2 z) + \\ + C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_1 Y_2(\alpha_3 z) + f_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + \\ &\quad + \sigma_3 [C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_3 Y_3(\alpha_3 z)] + f_2 \\ y_3 &= \tau_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \tau_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + \\ &\quad + \tau_3 [C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_3 Y_3(\alpha_3 z)] + f_3 \end{aligned} \quad (27)$$

причем множители $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3$ определяются уравнениями вида

$$\begin{aligned} -4a_2\alpha_j^4 + (-4b_2\alpha_j^4 + 1)\sigma_j - 4c_2\alpha_j^4\tau_j &= 0 \\ -4a_3\alpha_j^4 - 4b_3\alpha_j^4\sigma_j + (-4c_3\alpha_j^4 + 1)\tau_j &= 0 \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (28)$$

Когда конец $z=1$ подперт, граничные условия будут

$$\begin{aligned} &[A_1 Y_1(\alpha_1) + A_2 Y_3(\alpha_1)] + [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_1 = 0 \\ &\sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_2 Y_3(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + \sigma_3 [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_2 = 0 \\ &\tau_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + \tau_2 [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + \tau_3 [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_3 = 0 \\ &[4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + [4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \\ &\sigma_1 [4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + \sigma_2 [4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + \sigma_3 [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \\ &\tau_1 [4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + \tau_2 [4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + \tau_3 [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что эти уравнения распадаются на частные системы такого вида:

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 &= 0 \\ 4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

и т. п., выписывать которых нет надобности, чтобы видеть, что определение постоянных $A_1, A_3, B_1, B_3, C_1, D_3$ никаких трудностей

не представляет, а после того как оно выполнено, вопрос¹ может считаться решенным.

Совершенно подобные же уравнения получаются и для того случая, когда конец $z=1$ заделан.

Г. Киль и три стрингера с каждого борта.

В этом случае уравнения равновесия будут вида

$$a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + c_1 y_3^{IV} + d_1 y_4^{IV} + y_1 = f_1 \quad (30)$$

и три подобных уравнения, которых для краткости не выписываем.

Здесь выкладку надо вести несколько в ином порядке: прежде всего надо предложенные уравнения решить относительно производных неизвестных функций, т. е. представить систему, написанную в символическом виде, так:

$$\begin{aligned} (m_1 - \delta^4) y_1 + n_1 y_2 + p_1 y_3 + q_1 y_4 &= g_1 \\ m_2 y_1 + (n_2 - \delta^4) y_2 + p_2 y_3 + q_2 y_4 &= g_2 \\ m_3 y_1 + n_3 y_2 + (p_3 - \delta^4) y_3 + q_3 y_4 &= g_3 \\ m_4 y_1 + n_4 y_2 + p_4 y_3 + (q_4 - \delta^4) y_4 &= g_4 \end{aligned} \quad (31)$$

Это преобразование, когда $a_1, b_1, \dots, f_4$ заданы численно затруднений не представит, и $m_1, n_1, \dots, q_4, g_1, g_2, g_3, g_4$ будут известные числа.

Характеристическое уравнение для этой системы будет

$$\begin{vmatrix} m_1 - s^4 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 - s^4 & p_2 & q_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 - s^4 & q_3 \\ m_4 & n_4 & p_4 & q_4 - s^4 \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

т. е. типа уравнения, называемого „вековым“.

Для вычисления корней этого уравнения Якоби предложил методу последовательных преобразований, при которой нет надобности развивать определитель, что потребовало бы большой работы,

ибо этот определитель состоял бы из 24 членов, а определитель приводится к виду

$$\begin{vmatrix} N_1 - s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 - s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 - s^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 - s^4 \end{vmatrix} \quad (33)$$

т. е. к произведению его элементов, стоящих по главной диагонали.¹

В нашем случае все числа N_1, N_2, N_3, N_4 будут отрицательные, так что, положив

$$N_1 = -\omega_1; \quad N_2 = -\omega_2; \quad N_3 = -\omega_3; \quad N_4 = -\omega_4$$

будем иметь:

$$(s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2)(s^4 + \omega_3)(s^4 + \omega_4) = 0$$

и, значит, сделав

$$\omega_1 = 4\alpha_1^4; \quad \omega_2 = 4\alpha_2^4; \quad \omega_3 = 4\alpha_3^4; \quad \omega_4 = 4\alpha_4^4$$

мы получим соответственно значениям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ четыре группы решений, имеющих единичную матрицу, после чего выкладка ничем не будет отличаться от предыдущих. Главная же трудность — решение векового уравнения — будет преодолена методом Якоби. (См. также статью „О численном решении уравнения“, стр. 238).

§ 4. Положим теперь, что в рассматриваемом трюме *пиллерсы имеются*, иными словами к балкам приложены в заданных местах сосредоточенные силы. Мы видели, что сосредоточенная сила является предельным случаем равномерно распределенной на бесконечно малом участке, поэтому положим, что на каждую продольную балку действует вообще переменная нагрузка, величина которой задается в функции абсциссы x , считаемой от одного из концов балки.

¹ См.: C. G. I. Jacobi. Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. Gesamelte Werke, Bd. 7.

Методу решения поясним на примере, когда по каждому борту имеется по одному стрингеру.

В этом случае уравнения упругого равновесия будут вида

$$\begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + y_1 &= f_1(z) \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + y_2 &= f_2(z), \end{aligned} \quad (34)$$

причем как и раньше a_1, b_1, a_2, b_2 известные постоянные, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — заданные функции переменной $z = \frac{x}{l}$.

Написав эти уравнения в символической форме

$$\begin{aligned} (a_1 \delta^4 + 1) y_1 + b_1 \delta^4 y_2 &= f_1(z) \\ a_2 \delta^4 y_1 + (b_2 \delta^4 + 1) y_2 &= f_2(z) \end{aligned} \quad (35)$$

получаем для определения их частного решения символические уравнения

$$\begin{aligned} [(a_1 \delta^4 + 1)(b_2 \delta^4 + 1) - a_2 b_1 \delta^8] y_1 &= (b_2 \delta^4 + 1) f_1(z) - b_1 \delta^4 f_2(z) \\ [(a_1 \delta^4 + 1)(b_2 \delta^4 + 1) - a_2 b_1 \delta^8] y_2 &= -a_2 \delta^4 f_1(z) + (a_1 \delta^4 + 1) f_2(z) \end{aligned}$$

Но мы видели, что

$$(a_1 \delta^4 + 1)(b_2 \delta^4 + 1) - a_2 b_1 \delta^8 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)$$

так что будет

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 + a_2 b_1) y_1 &= [(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)]^{-1} [(b_2 \delta^4 + 1) f_1(z) - b_1 \delta^4 f_2(z)] = \\ &= \frac{b_2 \delta^4 + 1}{(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)} f_1(z) - \frac{b_1 \delta^4}{(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)} f_2(z) \end{aligned}$$

Возьмем алгебраические дроби

$$\frac{b_2 s^4 + 1}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} \text{ и } \frac{-b_1 s^4}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)}$$

и разложим их на частные; пусть будет

$$\begin{aligned} \frac{b_2 s^4 + 1}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} &= \frac{A}{s^4 + 4\alpha_1^4} + \frac{B}{s^4 + 4\alpha_2^4} \\ \frac{-b_1 s^4}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} &= \frac{C}{s^4 + 4\alpha_1^4} + \frac{D}{s^4 + 4\alpha_2^4} \end{aligned} \quad (36)$$

так что коэффициенты A, B, C, D определяются уравнениями

$$\begin{aligned} A + B &= b_2 \\ 4\alpha_2^4 A + 4\alpha_1^4 B &= 1 \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} C + D &= -b_1 \\ 4\alpha_2^4 C + 4\alpha_1^4 D &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

тогда будет

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y_1 = A (\delta^4 + 4\alpha_1^4)^{-1} f_1(z) + B (\delta^4 + 4\alpha_2^4)^{-1} f_2(z)$$

обозначив первый член правой части через v , второй через w видим, что эти функции определяются уравнениями

$$(\delta^4 + 4\alpha_1^4) v = A f_1(z)$$

и

$$(\delta^4 + 4\alpha_2^4) w = B f_2(z)$$

т. е.

$$v^{IV} + 4\alpha_1^4 v = A f_1(z)$$

$$w^{IV} + 4\alpha_2^4 w = B f_2(z)$$

Положив в этих уравнениях соответственно

$$\alpha_1 z = \xi \text{ и } \alpha_2 z = \xi$$

видим, что они принимают вид

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} + 4v = \frac{1}{\alpha_1^4} A f_1\left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right) \quad (39)$$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = \frac{1}{\alpha_2^4} A f_2\left(\frac{\xi}{\alpha_2}\right)$$

и, значит, по формуле (60) гл. I искомые частные решения будут

$$\begin{aligned} v &= \frac{A}{\alpha_1^4} \int_0^\xi Y_4(\xi - \tau) f_1\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right) d\tau \\ w &= \frac{B}{\alpha_2^4} \int_0^\xi Y_4(\xi - \tau) f_2\left(\frac{\tau}{\alpha_2}\right) d\tau \end{aligned} \quad (40)$$

или, возвращаясь к переменной z

$$v = \frac{A}{\alpha_1^3} \int_0^z Y_4[\alpha_1(z-t)] f_1(t) dt; \quad w = \frac{A}{\alpha_2^3} \int_0^z Y_4[\alpha_2(z-t)] f_2(t) dt \quad (41)$$

Таким образом, положив

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta \quad (42)$$

видим, что частное решение для y_1 будет

$$\Phi_1(z) = \frac{A}{\alpha_1^3 \Delta} \int_0^z Y_4[\alpha_1(z-t)] f_1(t) dt + \frac{B}{\alpha_2^3 \Delta} \int_0^z Y_4[\alpha_2(z-t)] f_2(t) dt \quad (43)$$

т. е. формы, подобной той, как в гл. I для одной балки, значит и все частные виды этой общей формулы для различных случаев нагрузок, в том числе и для сосредоточенных сил, сами собою распространяются и сюда.

Очевидно, что для y_2 частное решение будет

$$\Phi_2(z) = \frac{C}{\alpha_1^3 \Delta} \int_0^z Y_4[\alpha_1(z-t)] f_1(t) dt + \frac{D}{\alpha_2^3 \Delta} \int_0^z Y_4[\alpha_2(z-t)] f_2(t) dt \quad (44)$$

Так как при $z=0$ функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ и их производные первых трех порядков равны нулю, то при составлении граничных условий, относящихся до $z=0$; они не войдут, и неизвестные y_1 и y_2 будут выражаться следующими формулами.

а) Когда конец $z=0$ подперт

$$\begin{aligned} y_1 &= A_2 Y_2(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z) + B_2 Y_2(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z) + \Phi_1(z) \\ y_2 &= \sigma_1 [A_2 Y_2(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_2 Y_2(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z)] + \Phi_2(z) \end{aligned} \quad (45)$$

ибо мы не предполагаем симметричной нагрузки.

б) Если же конец $z=0$ считается заделанным, то будет

$$\begin{aligned} y_1 &= A_3 Y_3(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z) + \Phi_1(z) \\ y_2 &= \sigma_1 [A_3 Y_3(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_3 Y_3(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z)] + \Phi_2(z) \end{aligned} \quad (46)$$

Граничные условия для конца $z=1$ будут, например:

в) Когда конец $z=1$ считается также заделанным

$$\begin{aligned} A_3 Y_3(\alpha_1) + A_4 Y_4(\alpha_1) + B_3 Y_3(\alpha_2) + B_4 Y_4(\alpha_2) + \Phi_1(1) &= 0 \\ \sigma_1 [A_3 Y_3(\alpha_1) + A_4 Y_4(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_3 Y_3(\alpha_2) + B_4 Y_4(\alpha_2)] + \Phi_2(1) &= 0 \\ A_3 Y_2(\alpha_1) + A_4 Y_3(\alpha_1) + B_3 Y_2(\alpha_2) + B_4 Y_3(\alpha_2) + \Phi'_1(1) &= 0 \\ \tau_1 [A_3 Y_2(\alpha_1) + A_4 Y_3(\alpha_1)] + \tau_2 [B_3 Y_2(\alpha_2) + B_4 Y_3(\alpha_2)] + \Phi'_2(1) &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Очевидно, что эта система четырех уравнений распадается на две системы из двух уравнений с двумя неизвестными каждая, чем решение значительно упрощается.

Отсюда ясно, что сколько бы ни было сосредоточенных сил (пиллерсов), как бы они расположены ни были, рассматривать отдельные участки нет надобности.

Само собою понятно, каким образом рассмотреть случай, когда днищевых стрингеров будет по два по обе стороны киля; ясно, что в этом случае нам придется определять шесть постоянных, но не придется решать системы шести уравнений с шестью неизвестными, а три отдельные системы каждая с двумя неизвестными и две системы, каждая из которых будет заключать по три неизвестных и по три уравнения, каково бы число пиллерсов ни было.

При обычной же методе даже для того случая, когда имеется по одному пиллерсу на киле и на каждом стрингере, расположенных в плоскости одного шпангоута, надо определять 24 постоянных по более сложным системам уравнений, как это, например, указывается на стр. 102 книги Шиллинга.

Но если бы пиллерсов был не один ряд, что редко бывает, а, например, два, по углам грузового люка, как обыкновенно, то по обычной методе пришлось бы определять 36 постоянных из довольно сложных систем уравнений, хотя и распадающихся на более простые.

Мы не будем здесь входить в специальные детали этого вопроса, так как наша цель состояла в изложении общих методов расчета, приложимых во всех частных случаях.

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

§ 1. В руководствах по сопротивлению материалов обыкновенно излагается данная Эйлером упрощенная теория продольного изгиба сжатых стоек и выводятся его формулы для величины предельной нагрузки, при которой прямолинейная форма равновесия теряет устойчивость. У техника и инженера сами собою возникают вопросы о том, что на самом деле произойдет со стойкой, когда нагрузка превысит Эйлеров предел, какова тогда форма или формы, если их несколько, равновесия, как велики будут „боковой прогиб“ и „усадка“ стойки, каковы будут эти величины, если нагрузка „весьма мало“ превысит предельную, будут ли тогда „малая“ усадка и „малый“ прогиб того же порядка малости, как и превышение нагрузки, или иного и какого имени?

Однако эти вопросы не находят освещения в известной мне технической литературе по кораблестроению и в обычных руководствах по сопротивлению материалов, в которых лишь иногда упоминается, что решение подобных вопросов требует применения теории эллиптических функций, которая в обычный объем курсов технических и инженерных училищ не входит.

Действительно, обращаясь к руководствам по теории эллиптических функций, мы, например в томе II знаменитого „*Traité des Fonctions elliptiques*“ Г. Халфена, находим подробное рассмотрение общей теории изгиба тонкого стержня, но главным образом не в смысле технических приложений, а как геометрической задачи, представляющей поучительный пример приложения эллипти-

ческих функций и притом в их Вейерштрассовой форме. При этом изложении предполагается, что читатель предварительно изучил весь громадный том I сочинения Халфена, в котором дается теория тех функций, которыми он пользуется.

В более элементарных руководствах, например Л. Леви (L. Levy. Précis élémentaire des Fonctions elliptiques) или П. Аппеля и Е. Лакура (P. Appell et E. Lacour. Principes de la théorie des Fonctions elliptiques), также излагается эта теория, в последнем даже весьма подробно, но опять-таки как геометрическая задача на применение главным образом функций Вейерштрасса, хотя в § 126 простейший случай изгиба решен и в функциях Якоби.

В классическом руководстве по теории упругости А. Лова (A. Love) задача о стойках решена в функциях Якоби, но формулы не приведены к удобному для численных вычислений и пользованию готовыми таблицами виду, и недостаточно освещена наиболее важная для приложений в технике сторона дела.

В руководстве И. Прескота (J. Prescott. Applied Elasticity) весьма подробно изложена теория Эйлера и в §§ 88—89 излагается общая теория упругой линии и показывается ее связь с задачей о колебаниях маятника, но вопрос не доводится до конца, так как не развиты формулы для вычисления координат точек кривой, представляющей формы равновесия стойки, хотя фиг. 48 и 49, изображающие две типичные формы, вычерчены правильно. Вместе с тем по разложению в ряд полного эллиптического интеграла первого рода получается значение критической нагрузки, данное Эйлером.

Таким образом, Прескот дает приблизительно то, что изложено в начале статьи Лагранжа „Sur les figures des colonnes“ (Oeuvres, t. II), так как именно в этой статье Лагранж выразил через эллиптический интеграл первого рода ординату первоначально прямой стойки при ее продольном изгибе. Еще более изящный прием интегрирования уравнения изгиба он дал в статье „Sur la force des ressorts pliés“ (Oeuvres, t. III).

Во времена Лагранжа таблиц эллиптических интегралов еще не было (они изданы Лежандром в 1826 г., т. е. через 12 лет после смерти Лагранжа и через 56 лет после его статьи о форме колонн), но теперь эти таблицы в сокращенных извлечениях общедоступны,¹ поэтому естественно для практических приложений задачу о формах равновесия стоек и задачу об упругой линии вообще решать в эллиптических интегралах, для которых есть готовые таблицы, а не в эллиптических функциях, для которых таблиц нет.

В этой статье я и показываю такое решение задачи о формах равновесия стоек при обычных в технике условиях закрепления концов. Решение это совершенно не требует сложного аппарата теории эллиптических функций, достаточно самого элементарного понятия об эллиптических интегралах, в сущности сводящегося к приведению их в простейшем случае к тому каноническому виду, для которого Лежандром сто лет тому назад составлены таблицы, и к пользованию этими таблицами.

Вместе с тем показывается простейший способ вычерчивания форм равновесия стойки, ибо для техника чертеж гораздо нагляднее всяких формул выясняет сущность дела.

§ 2. Итак, рассмотрим нашу задачу в технической ее постановке: дана первоначально прямолинейная стойка OA (фиг. 1), к верхнему концу которой приложена направленная вертикально вниз нагрузка P ; требуется определить, сохранит ли стойка свою прямолинейную форму (чистое сжатие) или вследствие неустойчивости этой формы примет криволинейную форму равновесия OCA и тогда какую именно.

Для полной определенности задачи необходимо еще указать способы закрепления концов стойки; обычные способы таковы:

1) нижний конец O подперт, верхний A удерживается на оси Ox (вертикальной) и может перемещаться лишь по этой оси;

¹ Таблицы Лежандра недавно полностью переизданы в Германии под заглавием: Legendr'es Tafeln der elliptischen Integrale, herausgegeben von. Fr. Emde. K. Wittwer, Stuttgart, 1931.

- 2) нижний конец O заделан, верхний A свободен;
- 3) оба конца заделаны;
- 4) один конец заделан, другой подперт.

§ 3. Начнем с простейшего первого случая и положим, что стойка приняла показанную на фиг. 1 форму равновесия, не имеющую точек перегиба и не пересекающую ось $O\zeta$.

Возьмем сечение N , определяемое длиной дуги $ON = \sigma$ нейтральной оси, форму которой только и рассматриваем. Сделаем следующие обозначения: ζ, η — координаты точки N ; l — длина стойки, I — наименьший момент инерции площади сечения ее, перпендикулярно к оси коего и возьмем плоскость чертежа; E — модуль упругости материала; ρ — радиус кривизны кривой ONA в точке N ; тогда уравнение равновесия будет

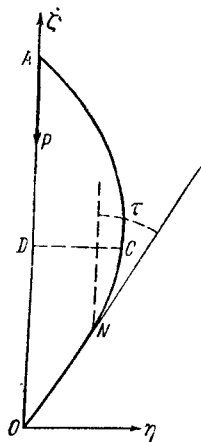
$$EI \frac{1}{\rho} = M \quad (*)$$

где M — изгибающий момент в точке N :

$$M = -P\eta$$

вместе с тем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta d\zeta - d^2\zeta d\eta}{d\sigma^3}$$



Фиг. 1.

$$d\eta^2 + d\zeta^2 = d\sigma^2$$

Введем вместо переменных $\zeta, \eta, \sigma, \rho$ переменные z, y, s, r , определяемые равенствами

$$\zeta = lz; \quad \eta = ly; \quad \sigma = ls; \quad \rho = lr$$

положим

$$\frac{Pl^2}{EI} = 2a^2$$

и будем производные по переменной s обозначать значками, тогда уравнение равновесия примет вид

$$y''z' - z''y' = -2a^2y \quad (1)$$

вместе с тем будет

$$z'^2 + y'^2 = 1 \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует

$$z'z'' + y'y'' = 0$$

отсюда имеем:

$$y'' = -\frac{z''z'}{y'}$$

и, подставив эту величину в уравнение (1), получим, на основании уравнения (2):

$$z'' = 2a^2yy' \quad (3)$$

и по интегрировании

$$z' = h + a^2y^2 \quad (4)$$

где h есть произвольная постоянная, геометрическое значение которой есть

$$h = z_0' = \cos \tau_0$$

где τ_0 есть наклонение касательной OT_0 к оси Oz . На основании уравнения (2) имеем:

$$y' = \sqrt{1 - z'^2} = \sqrt{1 - (h + a^2y^2)^2} = \sqrt{[1 - h - a^2y^2] \cdot [1 + h + a^2y^2]}$$

а так как

$$y' = \frac{dy}{ds}$$

то будет

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{(1 - h - a^2y^2)(1 + h + a^2y^2)}}$$

причем перед корнем взят знак плюс (+), ибо при возрастании дуги s ордината y также возрастает, пока мы не дойдем до вершины C , соответствующей значению $s = \frac{1}{2}$, ибо очевидно, что кривая имеет ось симметрии CD .

Так как $h < 1$, то положим

$$1 - h = f^2; \quad 1 + h = g^2$$

тогда будет

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(g^2 + a^2 y^2)(f^2 - a^2 y^2)}} \quad (5)$$

Чтобы привести этот интеграл к каноническому виду, полагаем

$$ay = f \cos \varphi \quad (6)$$

тогда

$$ady = -f \sin \varphi d\varphi$$

$$\sqrt{f^2 - a^2 y^2} = f \sin \varphi; \quad \sqrt{g^2 + a^2 y^2} = \sqrt{2 - f^2 \sin^2 \varphi}$$

положив

$$k^2 = \frac{f^2}{2} \quad (7)$$

получим:

$$\sqrt{2}as = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (5')$$

Лежандр, составляя свои таблицы, положил

$$k = \sin \theta \quad (8)$$

и с аргументами θ и φ от 0 до 90° составил таблицы функций

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}$$

и

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} d\varphi$$

называемых эллиптическими интегралами первого и второго вида.

При таком обозначении уравнение (5') напишется

$$\sqrt{2}as = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi) \quad (9)$$

Величины $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$, которые зависят, очевидно, только от k , обозначают через K и E , тогда уравнение (9) напишется так:

$$K - \sqrt{2}as = F(\varphi) \quad (10)$$

Пользуясь таблицами Лежандра, которые в извлечении можно найти, например, в книге Л. Леви, упомянутой выше, по известному значению „модуля“ k находится K , а затем по аргументу φ вычисляется величина y по формуле

$$y = \frac{f}{a} \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}k}{a} \cos \varphi \quad (11)$$

Чтобы найти z , обращаемся к уравнению (4), из которого следует

$$z' = h + f^2 \cos^2 \varphi = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$$

так что будет

$$z = \int_0^s (1 - 2k^2 \sin^2 \varphi) ds = s - 2k^2 \int_0^s \sin^2 \varphi ds$$

Но на основании уравнения (9)

$$ds = -\frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

следовательно,

$$z = s + \frac{\sqrt{2}}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{k^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Но, очевидно, будет

$$\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \int_0^{\varphi} \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = F(\varphi) - E(\varphi)$$

значит,

$$z = s - \frac{\sqrt{2}}{a} [F(\varphi) - E(\varphi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} = s - \frac{\sqrt{2}}{a} [K - E - (F(\varphi) - E(\varphi))]$$

Заменив s его величиною, следующей из уравнения (10), получим, на основании формулы (13), приведенной ниже:

$$z = \frac{1}{2K} [(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))] \quad (12)$$

Уравнениями (11) и (12) форма стойки вполне определяется, когда модуль k *известен*, ибо φ можно рассматривать как переменную независимую, границы изменяемости которой определяются по уравнению (10).

Остается определить значение модуля k по заданной нагрузке и элементам стойки.

§ 4. Для определения значения модуля k стоит только положить в уравнении (10) $s = \frac{1}{2}$, при каковом значении угол $\varphi = 0$, значит $F(\varphi) = F(0) = 0$, и мы получим:

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

по этому значению величина k непосредственно и найдется по таблице Лежандра.

Тогда уравнение (11) напишется так:

$$y = \frac{k}{K} \cos \varphi \quad (11')$$

Из формулы

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

очевидно, что при всяком k

$$K > \frac{\pi}{2}$$

и лишь при $k = 0$ будет

$$K = \frac{\pi}{2}$$

Значит, равенство (13) может иметь место лишь при условии

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$2a^2 > \pi^2 \quad (13')$$

но

$$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI} \quad (*)$$

следовательно, чтобы могла существовать криволинейная форма равновесия необходимо, чтобы было

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

как это следует из неравенства (13') и формулы (*).

В этом случае при $s=0$ будет

$$y=0 \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ибо k не равно нулю.

Если же будет

$$P \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (14)$$

то из условия, чтобы при $s=0$ было $y=0$, следует

$$k=0$$

и, значит, при всяком значении s будет

$$y=0 \text{ и } z=s$$

т. е. стойка сохраняет прямолинейную форму равновесия, в этом случае единственную.

Условие (14) и есть как раз условие Эйлера. Нетрудно видеть, что если к условию

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или, что то же,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

присовокупить

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < 2 \frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$P < 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

то рассматриваемая форма, не пересекающая в промежутке от $s=0$ до $s=1$ оси Ox , есть единственная криволинейная форма равновесия, которая тогда и есть форма устойчивая, прямолинейная же — не устойчивая.

Так как для нас представляет наибольший интерес лишь та форма равновесия, при которой нагрузка лишь „мало“ превышает Эйлерову, то мы и ограничимся случаем, когда

$$2 \frac{\pi}{2} > \frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

и форма равновесия определяется равенствами

$$K = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{k}{K} \cos \varphi \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2K} [(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))]$$

Координаты вершины C получаются, если положить

$$s = \frac{1}{2}$$

чему соответствует $\varphi=0$, так что

$$\begin{aligned} y_e &= \frac{k}{K} \\ z_e &= \frac{E}{K} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (II)$$

Значения y и z для s от $\frac{1}{2}$ до 1, т. е. для верхней половины стойки, следуют из (I) по условию симметрии относительно оси CD .

Заметим еще, что из формулы

$$dz = ds \cos \tau$$

следует

$$z' = \cos \tau$$

и из формулы

$$z' = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$$

следует

$$1 - \cos \tau = 2 \sin^2 \frac{\tau}{2} = 2k^2 \sin^2 \varphi$$

т. е.

$$\sin \frac{\tau}{2} = k \sin \varphi \quad (15)$$

что доставит значение угла наклона касательной в любой точке кривой, отсюда же видно, что при $s=0$, т. е. в точке 0, для которой $\varphi = \frac{\pi}{2}$, будет

$$\sin \frac{\tau_0}{2} = k = \sin \theta$$

т. е.

$$\tau_0 = 2\theta \quad (15')$$

Из формулы (II) видно, что для точки A будет

$$y_a = y_0 = 0$$

$$z_a = 2z_e = 2 \frac{E}{K} - 1$$

и, значит, „оседание“ верхнего конца стойки

$$m = 1 - z_a = 2 \left[1 - \frac{E}{K} \right] \quad (16)$$

Все эти величины представляют числа отвлеченные, чтобы получить по ним линейные размеры, т. е. величины η , ζ , η_c , ζ_c , μ , надо длину балки l умножить на числа y , z , y_c , z_c , m .

§ 5. Покажем теперь на примере порядок вычисления по формуле (I). Пусть будет

$$a = \frac{\pi}{2} 1.1 = 1.7279$$

так что

$$P = 1.21 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 1.21 P_e$$

т. е. P превышает на 21% Эйлерову нагрузку P_e .

В таблице значений K и E , соответствующих аргументу θ , находим:

θ	K	E
...	...	...
34°	1.7214	1.4397
35°	1.7313	1.4322

значит, при

$$K = 1.7279$$

будет

$$\theta = 34^\circ + 60' \frac{65}{99} = 34^\circ 39'$$

так что

$$|k| = \sin 34^\circ 39' = 0.5686$$

и при

$$\theta = 34^\circ 39'$$

будет

$$E = 1.4397 - \frac{39}{60} 75 = 1.4348$$

значит, координаты вершины суть

$$y_c = \frac{k}{K} = \frac{0.5686}{1.7279} = 0.329$$

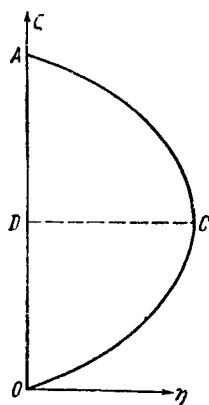
$$z_c = \frac{F}{K} - \frac{1}{2} = \frac{1.4318}{1.7279} - 0.5 = 0.330$$

Эти значения выражены в долях длины l , значит

$$\eta_c = 0.329l$$

$$\zeta_c = 0.330l$$

$$u = l - 2\zeta_c = 0.340l$$



Фиг. 2.

Чтобы получить координаты промежуточных точек, надо задавать значения угла φ от 90° до 0 и по таблицам Лежандра приискать при найденном θ соответствующие значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$, и применить формулу (I), присовокупив к ним формулу

$$\sin \frac{\tau}{2} = \sin \theta \sin \varphi = k \sin \varphi \quad (15)$$

чтобы иметь уклон касательной.

Таким образом, положив φ равным

$$15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$$

при $\theta = 30^\circ$ и 35° находим в сокращенных таблицах Лежандра, приведенных в книге Л. Леви, ниже показанные значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$, пользуясь которыми, по простой интерполяции составляем требуемые нам значения при угле $\theta = 34^\circ 39'$:

φ	F (φ)			E (φ)		
	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 35^\circ$	$\theta = 34^\circ 39'$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 35^\circ$	$\theta = 34^\circ 39'$
15°	0.2625	0.2628	0.2628	0.2611	0.2608	0.2608
30	0.5294	0.5313	0.5311	0.5179	0.5161	0.5163
45	0.8044	0.8109	0.8101	0.7672	0.7613	0.7618
60	1.0896	1.1049	1.1029	1.0076	0.9945	0.9962
75	1.3846	1.4134	1.4102	1.2399	1.2167	1.2197

По этим значениям и уже известным

$$y_c = 0.329; \quad K = 1.7279; \quad E = 1.4348$$

составляем такую сводную табличку:

φ	y	z	τ
90°	0	0	69°18'
75	0.085	0.032	66 30
60	0.165	0.073	56 20
45	0.232	0.138	46 30
30	0.285	0.185	33 00
15	0.318	0.255	16 50
0	0.329	0.330	0 0

Имея координаты этих точек и уклоны касательных в них, можем с большою точностью начертить форму кривой, которая и показана на фиг. 2.

Ввиду столь значительного прогиба и оседания

$$\eta_c = 0.329l; \quad m = 0.340l$$

когда нагрузка превышает Эйлерову всего на 21%, составим еще значения прогибов и оседания при

$$a = 1.01 \frac{\pi}{2}$$

и

$$a = 1.001 \frac{\pi}{2}$$

т. е. при нагрузках, превышающих Эйлерову на 2% и на 0.2%; получим совершенно подобно предыдущему:

a	P	η_c	z_c	m
$1.01 \frac{\pi}{2}$	$1.02P_e$	0.125	0.480	0.040
$1.001 \frac{\pi}{2}$	$1.002P_e$	0.039	0.49957	0.00086

Значительная величина прогиба и оседания при превышении всего на 2% Эйлеровой нагрузки показывает, насколько важно не превосходить ее, ибо если эта нагрузка превзойдена, то или сооружение разрушается, как это было, например, при знаменитом крушении моста через реку св. Лаврентия в Квебеке при постройке его, или же стойка, восприняв нагрузку, практически равную Эйлеровой, получит такую усадку, что остальной избыток нагрузки будет восприниматься не этой стойкой, а прочими более жесткими частями сооружения. Было бы слишком долго излагать здесь, как с этим обстоятельством считаются и как его учитывают в кораблестроении.

Нетрудно указать причину значительных прогибов балки при малом превышении Эйлеровой нагрузки и составить приближенные формулы для вычисления координат вершины и оседания, без пользования таблицами Лежандра.

При малых значениях модуля k величина K разлагается в следующий быстро сходящийся ряд, в котором достаточно удержать лишь первые члены:

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right)$$

поэтому, когда мы берем

$$P = (1 + 2\varepsilon) P_e$$

то соответствующее значение K при малом ε будет

$$K = (1 + \varepsilon) \frac{\pi}{2}$$

следовательно,

$$\frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 = \epsilon$$

значит,

$$k = 2\sqrt{\epsilon} \left(1 - \frac{9}{32}\epsilon\right)$$

следовательно,

$$y_c = \frac{k}{K} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\epsilon} \left(1 - \frac{41}{32}\epsilon\right) = 1.273 \sqrt{\epsilon} (1 - 1.28\epsilon)$$

Для величины E имеется разложение

$$E = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \dots \right]$$

поэтому будет приближенно

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{3}{16} k^4 = 1 - 2\epsilon - 3\epsilon^2$$

следовательно,

$$z_c = \frac{1}{2} - 2\epsilon - 3\epsilon^2$$

$$m = 4\epsilon - 6\epsilon^2$$

Так, например, при

$$\epsilon = 0.01$$

будет

$$y_c = 0.127 (1 - 0.0013) = 0.125$$

$$z_c = 0.500 - 0.020 = 0.480$$

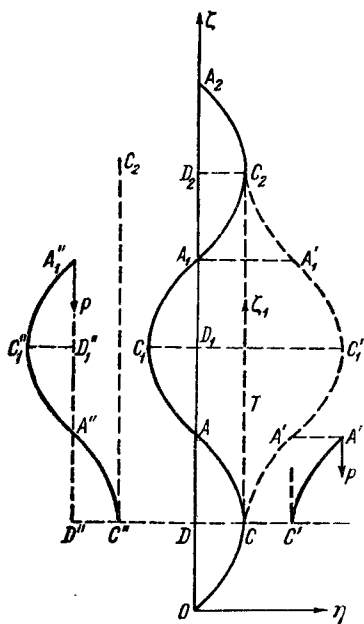
$$m = 1 - 0.960 = 0.040$$

что мы имели и по таблицам.

Из этих формул видно, что когда превышение нагрузки пропорционально малой величине ϵ , то прогиб, выражаясь формулой

$$y_c = 1.27 \sqrt{\epsilon} (1 - 1.28\epsilon)$$

пропорционален $\sqrt{\varepsilon}$, т. е. порядок „малости“ его есть половинный от порядка малости увеличения нагрузки; оседание же — одинакового с увеличением нагрузки порядка малости.



Фиг. 3.

§ 6. Начертив, на основании указанных в предыдущем параграфе вычислений, форму равновесия стойки при указанном закреплении ее концов и соответствующем действующей нагрузке значении параметра a , можно начертить без всяких вычислений формы равновесия стойки при всех прочих условиях закрепления концов.

В самом деле, пусть на фиг. 3 кривая OCA представляет форму заданной стойки длиной l под действием нагрузки P .

В точке A изгибающий момент равен нулю, к ней приложена вертикальная сила P , направленная вниз.

Проведем в точке C касательную CT и примем ее за новую

ось ζ_1 . В точке C изгибающий момент равен $P\eta_c$, этот момент вместе с реакцией — P представляет действие нижней части OC стойки на верхнюю ее часть CA , ясно, что если часть OC убрать, а в точке C приложить пару с моментом $P\eta_c$ и реакцию — P , то равновесие не нарушится, а тогда можно рассматривать, что стойка CA , длина коей $l_1 = \frac{l}{2}$, заделана в точке C вертикально и к свободному ее концу A приложена сила P . Значит, кривая CA или симметричная с нею кривая CA' представляет форму равновесия такой стойки. Эта форма, при наличии шаблона OCA , очевидно, сразу вычерчивается.

Заметив, что для стойки OA предельная нагрузка есть

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

видим, что эта же нагрузка есть предельная и для стойки CA' , длина коей $l_1 = \frac{1}{2}l$, поэтому, заменив l его величиною $2l_1$, имеем

$$P_e = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l_1^2}$$

в каковом виде обыкновенно эту формулу и приводят.

Само собою разумеется, что нетрудно простым преобразованием координат перейти от уравнения кривой OC , отнесенной к осям $O\eta$ и $O\chi$, к уравнению кривой CA' , но проще делать это прямо графически.

Нарастим нашу основную стойку OA еще двумя AC_1A_1 и $A_1C_2A_2$, перенесем нагрузку в точку A_2 и вообразим, что все три стойки в точках A , A_1 , A_2 скреплены, тогда имеем форму $OCA C_1A_1C_2A_2$ стойки OA_2 , длина которой $3l$; эта форма пересекает ось $O\chi$, по направлению которой действует нагрузка в точках A и A_1 , причем это суть точки перегиба нашей кривой, ибо в них изгибающий момент и кривизна равны нулю.

Проведем в точке C касательную, которая будет касательной и в точке C_2 .

В точках C и C_2 на участках CC_1C_2 от частей OC и A_2C_2 происходят реакции, равные P , и изгибающие моменты $M = Pl$, если части OC и A_2C_2 убрать, приложив в точках C и C_2 упомянутые реакции и изгибающие пары, то стойка $CAC_1A_1C_2$ останется в равновесии, — ясно что это есть форма равновесия стойки длиной $l_1 = 2l$, заделанной в точках C и C_2 и подверженной нагрузке P .

Очевидно, что и симметричная с нею кривая $CA'C_1A_1C_2$ есть такая же форма равновесия, вычерчивание этих форм, когда вычерчена форма OCA нашей основной стойки, настолько очевидно, что пояснений не требует.

Эйлерова нагрузка

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

предельная для основной стойки, является предельной и для произведенных от нее.

Заменяв в предыдущей формуле величину l ее значением $\frac{1}{2}l_1$, получим:

$$P_e = \frac{4\pi^2 EI}{l_1^2}$$

как величину Эйлеровой нагрузки для стойки, которая заделана в обоих концах своих и длина коей l_1 .

Вообразим нашу заделанную в обоих концах стойку $CAC_1A_1C_2$; в точке A_1 изгибающий момент равен нулю, в ней действует только вертикальная реакция P , поэтому, оставив точку C заделанной, уберем часть A_1C_2 стойки, приложив взамен в точке A_1 силу P , направленную вертикально вниз, стойка CAC_1A_1 будет в равновесии и, значит, эта кривая представит форму равновесия стойки, длина которой $l_1 = \frac{3}{2}l_1$, которая заделана в точке C , имеет свободный конец A , на который действует вертикальная сила P .

Предельная нагрузка для такой формы изгиба по-прежнему есть

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или, заменив l его величиной $\frac{2}{3}l_1$, получим:

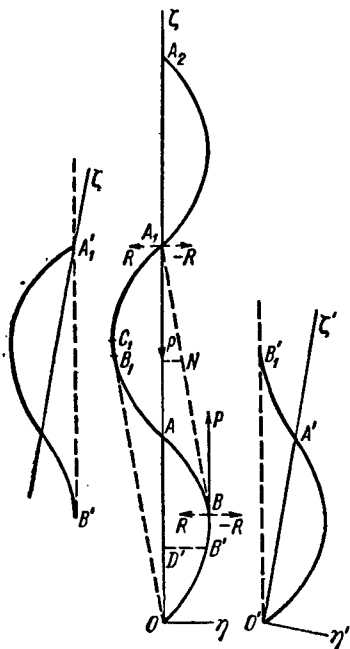
$$P_e = \frac{9}{4}\pi^2 \frac{EI}{l_1^2}$$

От формы равновесия $OCAC_1A_1$ можно перейти к определению формы равновесия, когда один конец стойки заделан, другой подперт.

Положим, что заделан нижний конец стойки. Возьмем точку A_1 , в этой точке приложена сила P по направлению A_2A и точка A_2

по предположению остается на этой прямой. Проведем через точку A_1 касательную к кривой $OCAC_1A_1$, пусть B есть точка касания, которая расположится близ точки C . Обозначим через α угол, составляемый этой касательной с осью $O\zeta$, приложим в точках A и B по две силы R и $-R$, направленные горизонтально в противоположные стороны, причем $R = P \operatorname{tg} \alpha$, равновесие системы не нарушится.

Обозначим ординату точки B через η_b , тогда изгибающий момент в точке B , $M_b = -P\eta_b$ и реакция от части AC_1 стойки равна $-P$. Вообразив, что в точке B приложены эта сила $-P$ и момент $P\eta_b$, можем часть OC убрать, точно так же вообразив, что в точке A_1 приложена сила P , можем часть стойки выше A_1 убрать и считать часть BAC_1A_1 свободной и находящейся в равновесии под действием приложенной системы сил и пары M , как это показано на фиг. 4. Очевидно, что можно всю эту фигуру, сохраняя взаимное расположение и величины сил, поворачивать как угодно в ее плоскости, повернем же ее так, чтобы прямая BA_1 стала вертикальной (фиг. 4), тогда, вообразив, что в точке A_1 стойка подперта и в точке B заделана по направлению BA , сложим силы P и R , в точке B приложенные, в одну силу N , которая будет направлена по BA , видим что кривая BC_1A_1 представляет форму равновесия стойки, подпертой в точке A и заделанной в точке B , под действием силы N , направленной по прямой BA .



Фиг. 4.

Совершенно так же увидим, что кривая $OCAB_1$, где B_1 есть точка касания касательной, проведенной через O , есть форма равновесия стойки, заделанной в B_1 и подпертой в точке O .

Длина l_1 стойки в этом случае есть $OBAB_1 = BC_1A_1 = \frac{3}{2}l - CB = l_1$, эта длина графически определяется просто и с достаточной точностью, аналитически же требует решения сложных трансцендентных уравнений.

Эйлера нагрузка в этом случае определяется формулой

$$P_e = \frac{\gamma^2 EI}{l^2} \quad (*)$$

где γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \mu$$

этот наименьший корень есть

$$\gamma = 4.4934$$

Заметив, что

$$\gamma^2 = (4.49)^2 = 20.19$$

$$2\pi^2 = 19.75$$

вместо формулы (*) по аналогии с прочими берут

$$P_e = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

таким образом, для этого случая должно иметь место равенство

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

из которого следует

$$l_1 = \sqrt{2l} = 1.414l$$

значит,

$$CB = (1.500 - 1.414)l = 0.086l$$

или более точно

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\gamma^2 EI}{l_1^2}$$

откуда

$$l_1 = \frac{\gamma}{\pi} l = 1.4303l$$

и

$$l = 0.6991 \approx 0.7l$$

т. е.

$$CB = (1.5000 - 1.4303)l = 0.0697l$$

или кругло

$$CB = 0.07l$$

Сопоставляя полученные результаты, имеем следующую табличку соотношений между длиной стойки l_1 и длиной l стойки, оба конца которой подперты и по форме которой сейчас же вычерчивается и форма равновесия стойки l_1 под действием заданной нагрузки:

1) оба конца подперты: $l = l_1$;

2) один конец свободен, другой заделан: $l = 2l_1$;

2а) один конец свободен, другой заделан, форма равновесия с точкою перегиба: $l = \frac{2}{3}l_1$;

3) оба конца заделаны $l = \frac{1}{2}l_1$;

4) один конец заделан, другой подперт: $l = 0.7l_1$.

Определив таким образом длину l , вычисляем по заданной нагрузке P величину a по формуле

$$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

если окажется, что

$$a < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.2214 \right)$$

то существует только прямолинейная форма равновесия.

Если окажется

$$2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} > a > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

то прямолинейная форма равновесия *неустойчива* и, кроме нее, существует одна криволинейная форма равновесия, вид и вычерчивание которой и показаны выше.

Если бы оказалось

$$a > \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

то, кроме упомянутой криволинейной формы, существуют другие формы равновесия, о которых мы ниже скажем лишь несколько слов, ибо эти формы равновесия технического значения не имеют.

Определение этих форм может быть выполнено подобно изложенному без пользования эллиптическими функциями, а лишь простейшими эллиптическими интегралами.

§ 7. Разберем несколько подробнее „основную“ форму равновесия при условии

$$a > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

предполагая, что a изменяется от величины, весьма мало превышающей его низший предел, и возрастает неопределенно.

Уравнения (I) упругой линии

$$K = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{k}{K} \cos \varphi \quad (I)$$

$$z = \frac{1}{2K} [(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))]$$

ввиду того, что постоянные

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{и} \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

суть функции модуля k , представляют семейство кривых, зависящих от одного параметра, за который можно принять k или a . Проще проследить за последовательной изменяемостью формы этих кривых, задавая модуль k или, точнее говоря, модулярный угол θ , а не величины a , ибо в таблицах функций $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ эти

функции даны с аргументами θ и φ через 1° у Лежандра, в сокращенном же извлечении Л. Леви углы θ даются через 5° , углы φ через 1° .

Мы будем пользоваться сокращенными таблицами и возьмем следующие значения угла θ :

$$5^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 89^\circ 54'$$

последнее число — потому, что оно есть наибольшее в таблицах Л. Леви.

Углы φ берем

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$$

и для последней кривой еще $\varphi = 87^\circ$, чтобы иметь для более точного ее очертания еще одну точку там, где эта точка нужна.

Вычисления, само собою разумеется, производимые с помощью логарифмической линейки, располагаются, как показано в следующих таблицах.

В этих таблицах вычисление всей серии восьми кривых по шесть точек на каждой половине кривой приведено полностью в том виде, как оно сделано для вычерчивания этих кривых, причем ни одной цифры не писалось где-либо особо.

1. Основные величины

θ	K	α	α^2	$P : P_e = n$	$k = \sin \theta$	$y_c = \frac{k}{K}$	τ_0
5°	1.5738	2.228	4.964	1.0059	0.0872	0.0554	10°
15	1.5981	2.25	5.06	1.023	0.2588	0.162	30
45	1.8541	2.62	6.86	1.39	0.7071	0.332	90
65	2.309	3.27	10.69	2.17	0.9063	0.392	130
75	2.768	3.91	15.29	3.20	0.9659	0.349	150
80	3.153	4.44	19.71	3.90	0.9848	0.312	160
85	3.832	5.38	28.94	5.88	0.9962	0.260	170
$89^\circ 54'$	7.737	10.40	108.2	21.90	1.0000	0.128	$179^\circ 48'$

2. $2E(\varphi)$

$\frac{0}{\varphi}$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54'
15°	0.5236	0.5232	0.5212	0.5188	0.5180	0.5178	0.5176	0.5176
30	1.0468	1.0442	1.0282	1.0088	1.0034	1.0014	1.0004	1.0000
45	1.5697	1.5612	1.5098	1.4446	1.4258	1.4194	1.4156	1.4142
60	2.0921	2.0736	1.9300	1.8084	1.7616	1.7456	1.7354	1.7320
75	2.6140	2.5822	2.3270	2.0954	1.9984	1.9628	1.9398	1.9318
90	3.1356	3.0883	2.7013	2.3277	2.1528	2.0802	2.0253	2.0000

3. $\dot{F}(\varphi)$

$\theta \backslash \varphi$	5°	15°	45°	65°	75	80°	85°	89°54'
15°	0.2618	0.2620	0.2633	0.2643	0.2646	0.2648	0.2648	0.2648
30	0.5238	0.5251	0.5356	0.5442	0.5474	0.5483	0.5491	0.5493
45	0.7859	0.7903	0.8260	0.8593	0.8727	0.8774	0.8804	0.8813
60	1.0184	1.0577	1.1424	1.2376	1.2837	1.3014	1.3129	1.3169
75	1.3110	1.3273	1.4879	1.7176	1.8715	1.9468	2.0050	2.0271
90	1.5738	1.5981	1.8541	2.3088	2.7681	3.1534	3.8317	7.7371

$$4. \quad 2E(\varphi) - F(\varphi)$$
[illegible]

5. $(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))$

$\theta \backslash \varphi$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54'
15°	1.3000	1.2284	0.5893	-0.2356	-0.8697	-1.3262	-2.0692	-5.7899
30	1.0388	0.9711	0.3556	-0.4457	-1.0713	-1.5263	-2.2677	-5.9878
45	0.7780	0.7193	0.1634	-0.5664	-1.1684	-1.6152	-2.3516	-6.0700
60	0.5181	0.4743	0.0596	-0.5519	-1.0932	-1.5174	-2.2389	-5.9522
75	0.2588	0.2353	0.0081	-0.3589	-0.7422	-1.0892	-1.7512	-5.4418
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	-3.8918

6. $z = \frac{1}{2K} [(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))]$

$\theta \backslash \varphi$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54'
0°	0.500	0.463	0.224	-0.0041	-0.1147	-0.1700	-0.2372	-0.357
15	0.416	0.381	0.156	-0.0510	-0.1621	-0.2143	-0.2700	-0.374
30	0.333	0.304	0.094	-0.0964	-0.1995	-0.2421	-0.2960	-0.387
45	0.249	0.225	0.0432	-0.1225	-0.2180	-0.2562	-0.3010	-0.392
60	0.166	0.148	0.0157	-0.1195	-0.2040	-0.2492	-0.2920	-0.384
75	0.033	0.073	0.0021	-0.0777	-0.1385	-0.1727	-0.2288	-0.352
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	-0.251
$2K$	3.1476	3.1962	3.7082	4.6176	5.5362	6.3068	7.6634	15.4742
$\frac{1}{2K}$	0.3201	0.3129	0.2643	0.2165	0.1865	0.1586	0.1305	0.0646

7. Вычисление $y = y_0 \cos \varphi$

θ φ	$\cos \varphi$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54'
0°	1.000	0.0554	0.162	0.332	0.392	0.349	0.312	0.260	0.129
15	0.966	0.0535	0.160	0.321	0.380	0.338	0.301	0.251	0.124
30	0.866	0.0480	0.140	0.287	0.338	0.302	0.270	0.225	0.122
45	0.707	0.0395	0.114	0.235	0.277	0.247	0.221	0.183	0.091
60	0.500	0.0277	0.081	0.166	0.196	0.175	0.156	0.130	0.065
75	0.259	0.0144	0.012	0.086	0.102	0.090	0.081	0.067	0.033
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

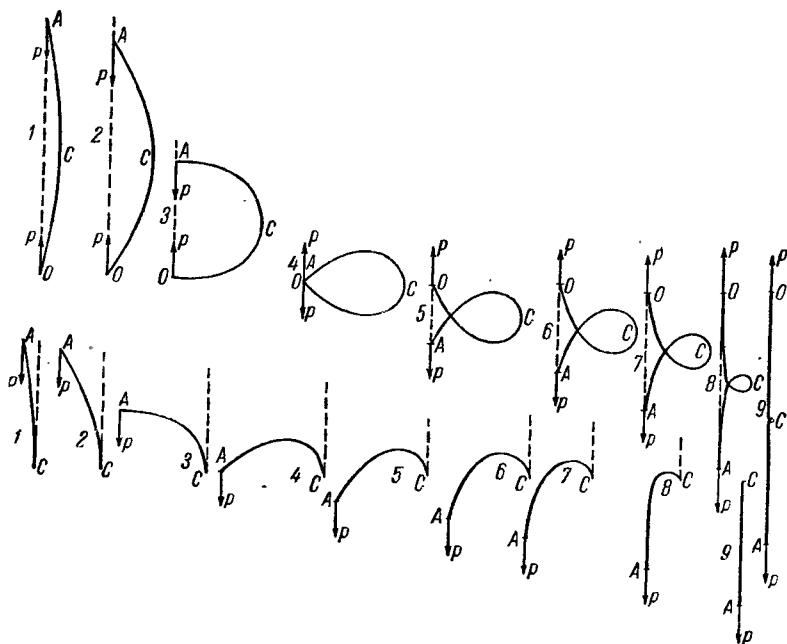
Отсюда простота вычисления по нашим формулам, которые непосредственно следуют из формул, данных Лагранжем 160 лет тому назад, ясна сама собою, между тем если обратиться к сочинениям по теории эллиптических функций, то, например, в книге П. Аппеля и Е. Лакура мы на стр. 270, снимок которой прилагается (фиг. 5), находим формулы, по которым определяются координаты x (наше z) и y упругой линии, причем в этих формулах наша величина $2a^2$ заменена величиною $\frac{2C}{a^2}$, и вместо нашей буквы τ написано θ . Величины $p(u)$ и $\zeta(u)$ суть эллиптические функции Вейерштрасса. Необходимо, однако, заметить, что для этих функций таблиц нет, да и составить их, например для функции $p(u)$, невозможно, ибо функция эта зависит еще от двух величин, так что таблица потребовалась бы трехходная, поэтому при численных вычислениях надо обращаться к таблицам Лежандра, а для этого надо применять последовательно целый ряд формул, показанных на стр. 100—104 книги Л. Леви.

Отсюда очевидно, что вычисление по этим формулам координат только одной точки потребовало бы во много раз больше работы, нежели приведенное нами вычисление всей серии восьми типичных кривых по шесть точек на каждой, понятно, почему решение, подобное приводимым в руководствах по теории эллиптических функций, отпугивает техника и инженера от столь простого

TABLEAU DE FORMULES. (Courbe élastique plane et sans pression.)

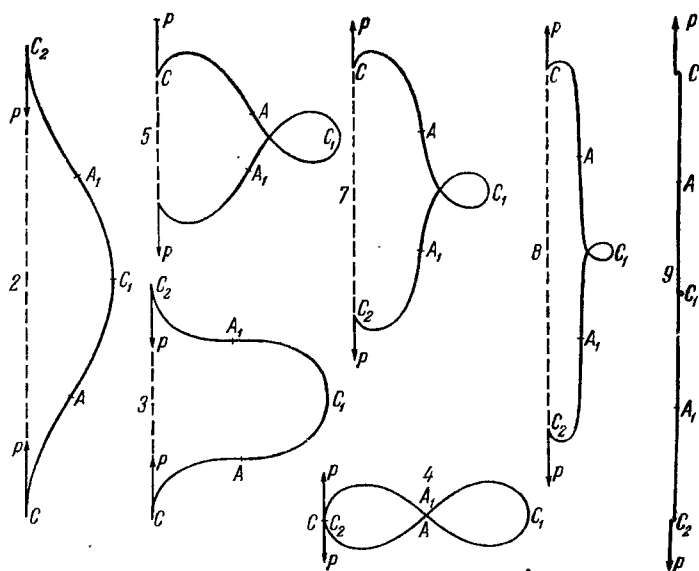
- (1)
$$\frac{1}{\rho} = 2G \frac{Y}{a^2},$$
- $$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} \sin \theta,$$
- (2)
$$\frac{dx}{ds} = G \frac{Y^2}{a^2} + D,$$
- (3)
$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(G \frac{Y^2}{a^2} + D\right)^2,$$
- (4)
$$\frac{Y}{a} = -\frac{1}{2} \frac{p' u}{p u - e_2},$$
- (5)
$$(p u - e_2)[p(u + \omega_2) - e_2] = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2),$$
- (6)
$$(p u - e_2) + [p(u + \omega_2) - e_2] = \frac{Y^2}{a^2} - 3e_2,$$
- (7)
$$\left(\frac{Y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_3 - e_1)(e_2 - e_1) = [p(u + \omega_2) - p u]^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$
- (8)
$$\left(\frac{Y^2}{a^2} + \frac{D}{G}\right)^2 + \frac{1}{G^2} = -\frac{1}{G^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$
- (9)
$$u du = G ds,$$
- (10) et (11)
$$\frac{i}{a} \frac{dx}{du} = \frac{Y^2}{a^2} - 3e_2 = p u + p(u + \omega_2) - 2e_2,$$
- (12)
$$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u + \omega_2) + 2u e_2] + \text{const.},$$
- (13)
$$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$
- (14)
$$a dt = C ds,$$
- (15)
$$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2 t,$$
- (16)
$$\frac{Y}{a} = -\frac{1}{2} \frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\omega_2},$$
- (17)
$$\frac{Y - Y_0}{a} = \frac{1}{2} \frac{p' \frac{\omega_2}{2}}{p(it) - p \frac{\omega_2}{2}}.$$

по существу вопроса, но это не может быть поставлено в упрек названным авторам, ибо они решали не технический вопрос, а имели в виду дать упражнение в применении излагаемых ими теорий.



Фиг. 6.

§ 8. По вычисленным координатам построены показанные на фиг. 6 и 7 кривые, представляющие формы упругого равновесия по мере возрастания нагрузки. Само собою разумеется, что лишь первые типы относятся к стойкам, дальнейшие типы представляют формы равновесия упругой проволоки, последовательность их ясно видна, начиная от слегка изогнутой и кончая формой 9 при бесконечно большой нагрузке, когда проволока, удерживаемая в точке O и нагруженная в точке A , приняла опять прямолинейную форму, но с „колышком“ в точке C .



Фиг. 7.

Нагрузки, которым соответствуют показанные на фигурах формы равновесия, приведены в таблице основных величин, послуживших для вычисления этих форм. Для ясности приводим их здесь:

№ формы равновесия	Нагрузки $P: P_e = n$	№ формы равновесия	Нагрузки $P: P_e = n$
1	1.0059	6	3.90
2	1.023	7	5.88
3	1.39	8	21.90
4	2.17	9	∞
5	3.20		

Вычерчивание этих фигур выполняется очень просто, если изготовить сперва картонные шаблоны, представляющие половину ОС каждой кривой.

Пользуясь теми же шаблонами, вычерчены серии форм равновесия для стойки, заделанной в одном конце, свободной в другом, который нагружен, а затем серия (фиг. 7) для случая, когда оба конца заделаны.

Заметим, что форма, соответствующая значению модулярного угла $\theta = 65^\circ$, почти замкнутая и напоминает лемнискату. Кривая смыкается при таком значении θ , при котором $2E = K$, т. е. при $\theta = 65^\circ 22.5'$, чему соответствует $\tau_0 = 130^\circ 45'$, для лемнискаты же этот угол равен 135° .

Совершенно так же, взяв с фиг. 6 части кривых CAC_1A_1 , получим формы равновесия стойки, заделанной в точке C , нагруженной в точке A_1 и имеющей точку перегиба в точке A . Вычерчивание их очевидно, и производить его нет надобности.

Наконец, проводя из точки O касательную OB , получаем формы равновесия стойки, подпертой в точке O и заделанной по направлению OB в точке B .

По поводу этих последних форм необходимо сделать следующее замечание: уже было упомянуто, что Эйлера нагрузка выражается в этом виде формулою

$$P_e = \gamma^2 \frac{EI}{l^2}$$

причем γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \mu$$

По симметрии и способу построения кривой фиг. 4 видно, что, отложив длину $CB' = CB$, мы получим точку B' , соответствующую значению $\varphi = \omega$, причем ω — небольшой угол; пусть τ есть уклон касательной в этой точке, тогда, как мы видели

$$\sin \frac{\tau}{2} = k \sin \omega$$

$$\cos \frac{\tau}{2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$$

$$\sin \tau = 2k \sin \omega \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$$

$$\cos \tau = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$$

Координаты точки B суть

$$\begin{aligned} z_b &= 2z_c + OD' = 2z_c + \frac{1}{2K} [2E - K - (2E(\omega) - F(\omega))] = \\ &= 3z_c - [2E(\omega) - F(\omega)] \\ y_b &= -D'B' = -\frac{k}{K} \cos \omega \end{aligned}$$

Уравнение касательной в точке B' есть

$$(Y - y_b) \cos \tau + (Z - z_b) \sin \tau = 0$$

Чтобы эта касательная проходила через точку O , необходимо условие

$$y_b \cos \tau + z_b \sin \tau = 0$$

Это условие распадается на два

$$1) k = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \cos \omega (1 - 2k^2 \sin^2 \omega) + 3(2E - K) - (2E(\omega) - \\ - F(\omega)) \sin \omega \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Первое имеет место, если левая часть уравнения $(*)$ не может равняться нулю и соответствует прямолинейной форме равновесия.

Положим

$$\omega = \frac{3\pi}{2} - \mu$$

тогда будет

$$E(\omega) = E\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3E - E(\mu)$$

$$F(\omega) = F\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3F - F(\mu)$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\sin \mu (1 - 2k^2 \cos^2 \mu) - (2E(\mu) - F(\mu)) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu} = 0 \quad (17)$$

Мы получим ближайшую к прямолинейной форму равновесия при весьма малых значениях k , тогда, отбрасывая члены с множителем k^2 , будем иметь:

$$E(\mu) = \mu, \quad F(\mu) = \mu$$

и наше уравнение примет вид

$$\sin \mu - \mu \cos \mu = 0$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \mu = \mu$$

Это и есть уравнение Эйлера для этого случая закрепления концов стойки и форм, весьма близких к прямолинейной.

Если же модуль k значительный, то величина μ определяется уравнением (17). Вычисление наименьшего корня этого уравнения, если найти сперва графически приближенное его значение по построению точки B и измерению длины $C_1B = CB' = s$, не представит затруднений.

В самом деле, для точки B' имеем, на основании уравнения (9), равенство

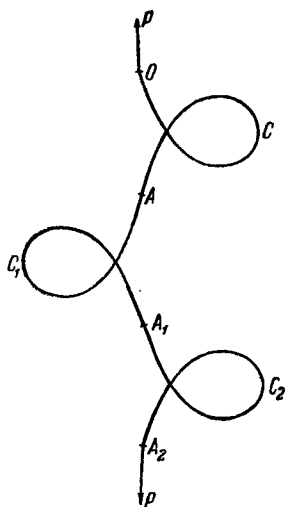
$$2K\left(\frac{1}{2} - s_1\right) = K - F(\omega) \quad (18)$$

иначе

$$2Ks_1 = F(\omega) \quad (18')$$

отсюда найдем приближенное значение ω и по нему — приближенное значение μ , после чего более точное легко находится, как обыкновенно, последовательными линейными приближениями.

Разбирать формы равновесия, которые получаются, кроме изображенных, мы не будем, ибо они представляют лишь соединения двух, трех, ... форм, уже начерченных, взятых в половинном, третьем и т. д. масштабе, причем это соединение всегда надо делать в точках перегиба. Так, например, форма 5 (фиг. 6), будучи повторена трижды, дает форму, представленную на фиг. 8, и относится к стойке длиной $3l$ при нагрузке $3.20Pe$, указанной выше.



Фиг. 8.

Все эти формы, возможные для упругой проволоки, не имеют технического значения, упомянуты же здесь, чтобы показать, насколько просто решается задача об упругой линии, не прибегая к эллиптическим функциям, а пользуясь лишь эллиптическими интегралами и готовыми для них таблицами Лежандра.

§ 9. Вопросы, как отражается на формах равновесия стойки ее начальная кривизна, сохраняются ли тогда условия Эйлера и какой смысл тогда надо им придавать, представляют некоторый интерес для техники. Изложение этих вопросов в обычных курсах является часто недостаточным.

Начнем с простейшего случая, когда начальная кривизна стойки „малая“, постоянная, и нагрузка такова, что стойка и после деформации имеет „малую“ кривизну.

К этому случаю относится упрощенная теория Эйлера.

Упрощение в этой теории состоит, как известно, в том, что наклон касательной к оси Ox считается настолько малым, что *квадратом* его можно пренебречь по сравнению с единицей, при той степени точности, с которою ведется расчет. Так, например, если наибольший уклон касательной не более 1° , то $\operatorname{tg} 1^\circ = 0.0175$, $\operatorname{tg}^2 1^\circ = 0.000306 = \frac{1}{3270}$, ясно, что практически ни нагрузка, ни момент инерции I , ни модуль упругости E с такою точностью известны не будут, и квадратом уклона в 1° можно пренебречь. Таким образом, когда расчет сделан при предположениях Эйлера, надо рассчитать уклон, чтобы иметь суждение об относительной точности этого расчета.

В том случае, когда квадратом уклона можно пренебречь, то будет

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = 1$$

Значит, за переменную независимую можно вместо σ принять ζ и вместо s принять z и полагать

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$$

и

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dz^2} = y''$$

и уравнение равновесия принимает упрощенную форму

$$EI\eta'' = M$$

или

$$EIy'' = M$$

Итак, положим, что имеем стойку, оба конца которой подперты, и начальная форма которой есть AC_0O , представляющая дугу круга радиуса ρ_0 со стрелкою $DC_0 = f_0$ и длиной $OC_0A = OA = l$ (фиг. 9).

Уравнение равновесия этой стойки будет

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = P\eta$$

но в данном случае при указанном расположении осей

$$\frac{1}{\rho} = -\eta''; \quad \frac{1}{\rho_0} = -\eta''_0$$

причем ρ и ρ_0 считаются величинами, представляющими некоторые длины, значит существенно положительными. Таким образом, будет

$$EI(\eta'' - \eta''_0) = -P\eta$$

иначе

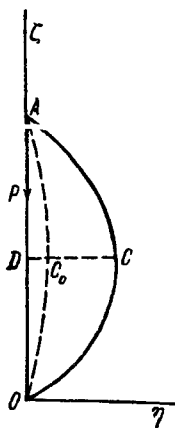
$$y'' + n^2 y = -c \quad (19)$$

причем положено

$$n^2 = \frac{Pl}{EI}; \quad y''_0 = -c$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$y = A \cos nz + B \sin nz - \frac{c}{n^2}$$



Фиг. 9.

Граничные условия суть:

$$\text{при } z=0 \text{ должно быть } y_0=0=A-\frac{c}{n^2}$$

$$\text{при } z=1 \text{ должно быть } y_1=0=A \cos n + B \sin n - \frac{c}{n^2}$$

Откуда следует

$$A = \frac{c}{n^2}; \quad B = \frac{c}{n^2} \operatorname{tg} \frac{n}{2}$$

$$y = \frac{c}{n^2} \left[\frac{\cos n \left(\frac{1}{2} - z \right)}{\cos \frac{n}{2}} - 1 \right] \quad (19')$$

Между начальным радиусом кривизны ρ_0 и стрелкою f_0 имеем соотношение

$$\frac{l^2}{4} = f_0 (2\rho_0 - f_0)$$

откуда следует приближенно

$$\rho_0 = \frac{l^2}{8f_0}$$

следовательно,

$$r_0 = \frac{l}{8f_0}; \quad c = \frac{8f_0}{l}$$

значит, будет

$$\eta = \frac{8f_0}{n^2} \left[\frac{\cos n \left(\frac{1}{2} - z \right)}{\cos \frac{n}{2}} - 1 \right]$$

и наибольший прогиб и наибольший уклон

$$\begin{aligned} \eta_{\max} &= \frac{8f_0}{n^2} \left(\sec \frac{n}{2} - 1 \right) = fl \\ \left(\frac{d\eta}{dz} \right)_{\max} &= \frac{8f_0}{nl} \operatorname{tg} \frac{n}{2} = \gamma \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы получить ясное представление, в каких пределах применимы эти формулы, проследим за изменяемостью множителей

$$\alpha = \frac{8}{n^2} \left(\sec \frac{n}{2} - 1 \right) \text{ и } \frac{8}{n} \operatorname{tg} \frac{n}{2} = \beta \quad (21)$$

при изменении n , получим следующую таблицу:

1	2	3	4	5	6
$\frac{n^\circ}{2}$	$\frac{P}{P_e} = \frac{n^2}{\pi^2}$	α	β	$f = \alpha \frac{f_0}{l}$	$\gamma = \beta \frac{f_0}{l}$
30°	0.111	1.13	4.40	1 : 530	1 : 136
60	0.445	1.66	6.62	361	91
75	0.694	3.35	11.40	179	53
80	0.790	4.89	19.20	122	31
85	0.894	9.53	30.80	63	19.5
87°5'	0.935	18.85	57.80	32	10.4

В двух последних столбцах этой таблицы показаны: в столбце 5 отношение стрелки прогиба к пролету, когда начальное значение этого отношения есть $\frac{1}{600}$, в столбце 6 величина наибольшего уклона. В столбце 2 показано отношение действующей нагрузки P к Эйлеровой, в столбце 3 — отношение наибольшей стрелки прогиба к начальной. Это последнее отношение от величины начальной стрелки прогиба не зависит.

Числа α , приведенные в этой таблице, особенно, если их представить графически в зависимости от нагрузки, ясно показывают, насколько быстро начинает возрастать прогиб, когда нагрузка превышает примерно 0.8 Эйлеровой, последний же столбец показывает, что y'^2 не превышает в этом случае $\frac{1}{1000}$, значит, упрощенным уравнением можно вполне пользоваться, если же нагрузка не превышает 0.5 Эйлеровой, то прогиб не превышает удвоенного начального прогиба.

Было бы, однако, неправильно заключить, что когда нагрузка равна Эйлеровой, то прогиб бесконечный, ибо тогда самое урав-

нение (19) неприменимо, и расчет для этого случая надо бы производить по полному уравнению.

Мы не будем останавливаться на других случаях закрепления концов, так как сущность дела достаточно выяснена на разобранном простейшем случае.

§ 10. Полное уравнение в нашем случае будет

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = P\tau_i$$

причем при сделанном расположении осей надо писать

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2\tau_i d\zeta - d^2\zeta d\tau_i}{ds^3}$$

или, вводя, как и раньше, переменные z , y , s , r и положив

$$2a^2 = \frac{P\rho^2}{EI}; \quad \frac{1}{2a^2 r_0} = -c$$

получим:

$$y''z' - z''y' = -2a^2(y+c)$$

откуда, подобно предыдущему, получим:

$$\begin{aligned} z'' &= 2a^2(y+c)y' \\ z' &= h + a^2(y+c)^2 \end{aligned}$$

Постоянная произвольная h определяется по условию

$$h = \cos \tau_0 - a^2 c^2$$

где через τ_0 обозначено наклонение касательной в точке, для которой $y=0$ и $s=0$.

Затем, по-прежнему имеем:

$$y' = \sqrt{[1-h-a^2(y+c)^2] \cdot [1+h+a^2(y+c)^2]} \quad (22)$$

причем

$$\begin{aligned} 1-h &= 1 - \cos \tau_0 + a^2 c^2 \\ 1+h &= 1 + \cos \tau_0 - a^2 c^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда видно, что всегда будет

$$1 - h > 0$$

но величина $1 + h$ может быть как положительной, так и отрицательной; эти два случая требуют отдельного рассмотрения.

Первый случай.

$$1 + h > 0$$

В этом случае полагаем

$$1 - h = f^2$$

$$1 + h = g^2$$

так что будет

$$y' = \sqrt{[g^2 + a^2(y+c)^2][f^2 - a^2(y+c)^2]}$$

Полагаем

$$a(y+c) = -f \cos \varphi$$

тогда будет

$$ady = f \sin \varphi d\varphi$$

$$a\sqrt{2}s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi) - F(\varphi_0)$$

$$k^2 = \frac{f^2}{2}$$

угол φ_0 определяется равенством

$$\cos \varphi_0 = -\frac{ac}{f} \quad (24)$$

угол же φ возрастает от значения φ_0 до значения $\varphi = \pi$ при $s = \frac{1}{2}$, таким образом, будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F(\pi) - F(\varphi_0) = 2K - F(\varphi_0)$$

Положим

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \omega$$

тогда для определения ω имеем уравнение

$$\sin \omega = \frac{ac}{f} = \frac{ac}{k\sqrt{2}} \quad (25)$$

вместе с тем будет

$$F(\varphi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2} + \omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

положив в этом интеграле

$$\pi - \varphi = \psi$$

получим:

$$F(\varphi_0) = - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2} - \omega} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \omega} = 2K - F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$$

и, следовательно, будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad (26)$$

При данных нагрузке, размерах и начальной кривизне балки величины

$$a = \sqrt{\frac{P}{2EI}} l$$

и

$$c = \left| \frac{1}{2a^2 r} \right|$$

известны, — уравнения (25) и (26) послужат для определения неизвестных k и φ_0 , и тогда по равенству

$$f = k\sqrt{2}$$

найдем наибольший прогиб

$$\eta_{\max} = l \left[\frac{f}{a} - c \right] \quad (27)$$

Величина z найдется по уравнению

$$z' = h + a^2 (y + c)^2$$

совершенно подобно тому, как в § 3, на чем останавливаться не будем.

По таблицам значений функции $F(\varphi)$ нахождение значений k и ω затруднений не представляет.

Второй случай.

$$1 + h < 0$$

В этом случае полагаем

$$1 - h = f^2$$

$$1 + h = -g^2$$

так что будет

$$y' = \sqrt{[a^2(y+c)^2 - g^2][f^2 - a^2(y+c)^2]}$$

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{[a^2(y+c)^2 - g^2][f^2 - a^2(y+c)^2]}}$$

Для приведения интеграла правой части к каноническому виду надо положить

$$a(c+y) = \frac{g}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$k^2 = \frac{f^2 - g^2}{f^2} = \frac{2}{f^2}$$

и получится

$$as \sqrt{2} = k \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = k[F(\varphi) - F(\varphi_0)]$$

причем угол φ_0 определяется уравнением

$$a^2 c^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) = g^2 = f^2 - 2 = \frac{2(1-k^2)}{k^2} \quad (28)$$

к этому уравнению надо еще присоединить следующее:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = k[K - F(\varphi_0)] \quad (29)$$

которое получается из (28), если положить в нем $s = \frac{1}{2}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Уравнения (28) и (29) послужат для определения величин k и φ_0 , после чего наибольший прогиб $\eta_{\max}$ найдется из равенства

$$\eta_{\max} = l \left[\frac{f}{a} - c \right] \quad (30)$$

совершенно того же вида, как и в первом случае.

Мы не будем выводить формул для вычисления координаты ζ , так как этот вывод не отличается существенно от изложенного в § 3, а вычислим для ясности значения прогибов по формуле (27), чтобы иметь наглядное представление о том, в какой мере точны результаты, даваемые упрощенной теорией Эйлера.

Для этого вычисления мы имеем следующие формулы:

$$1) \quad n^2 = 2a^2 = \frac{Pl^2}{EI}; \quad c = \left| \frac{1}{2a^2 r_0} \right|; \quad \frac{1}{r_0} = \frac{8f_0}{l}$$

$$2) \quad k^2 = \frac{f^2}{2}; \quad k = \frac{f}{\sqrt{2}}$$

$$3) \quad \sin \omega = \frac{ac}{f} = \frac{ac}{k\sqrt{2}}$$

$$4) \quad \frac{a}{\sqrt{2}} = F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$5) \quad \eta_{\max} = l \left[\frac{f}{a} - c \right] = lc [\operatorname{cosec} \omega - 1]$$

В том случае, когда кривизна стойки, а значит, и прогиб — малые, то модуль k будет малый, и если пренебрегать квадратом его величины, то будет

$$F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{\pi}{2} - \omega = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{n}{2}$$

и

$$\eta_{\max} = \frac{8f_0}{n^2} \left[\sec \frac{n}{2} - 1 \right]$$

т. е. получается формула (20) Эйлера, так что числа приведенной выше таблицы поправки не требуют.

При $n^2 = \pi^2$ формула (20) явно не применима и если бы рассчитать $\eta_{\max}$ по этой формуле, то получили бы $\eta_{\max} = \infty$, поэтому в этом случае расчет надо делать по точным формулам.

Очевидно, будет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx K - \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}}$$

ибо величины ω и k малые.

Но мы имели

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right]$$

$$\sin \omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k}$$

значит,

$$\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k} + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k} \right)^3 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{c}{k} + 0.41 \left(\frac{c}{k} \right)^3 \right]$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 \right] - \frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{k} + 0.41 \left(\frac{c}{k} \right)^3 \right) \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \right)$$

т. е.

$$0 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 - \frac{c}{k} - \frac{1}{2} ck$$

В первом приближении будет

$$k_1^3 = 4c$$

второе приближение будет

$$k = k_1 \left(1 - \frac{1}{48} k_1^2 \right)$$

В нашем примере

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{75} \cdot \frac{1}{\pi^2} = 0.00135095; & \lg c &= \bar{3}.130639 \\
 k_1 &= 0.175482; & \lg k_1 &= \bar{1}.244233 \\
 1 - \frac{1}{48} k_1^2 &= 0.999358; & \lg \left(1 - \frac{1}{48} k_1^2\right) &= \bar{1}.999721; \\
 & & \lg k &= \bar{1}.243954 = \lg \sin \theta \\
 & & \theta &= 10^\circ 6' 0''.5
 \end{aligned}$$

Затем имеем $\sin \omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k}$, поэтому будет

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \omega}{\sqrt{1-k^2}} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k} \sec \theta = \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} \\
 \lg \frac{\pi}{2} &= 0.196120 \\
 \lg c &= \bar{3}.130639 \\
 \text{clg } k &= 0.756046 \\
 \lg \sec \theta &= 0.006783 \\
 \hline
 2.089588 & \quad \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 0.01229 = 0^\circ 42' 15''
 \end{aligned}$$

В томе II упомянутого сочинения Лежандра помещены 12-значные таблицы логарифмов величин K и E для всех модулярных углов θ через $0^\circ 1'$, в этой таблице находим для $\theta = 10^\circ 6'$, взяв первые 6 знаков:

$$\begin{aligned}
 \lg K &= 0.199505 \\
 K &= 1.58309 \\
 \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} &= 0.01229 \\
 \hline
 K - \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} &= 1.57080 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

следовательно, найденные значения k и ω удовлетворяют уравнениям (25) и (26).

Затем имеем:

$$\begin{aligned} \lg k &= \bar{1}.243954 \\ \lg \sqrt{2} &= 0.150515 \\ \hline \lg f &= \bar{1}.394469 \\ f &= 0.248010 \end{aligned}$$

$$\eta_{\max} = 600f = 148.806f_0 \approx 149f_0 \approx \frac{1}{4} l$$

Этот результат и приведенная выше таблица наглядно показывают, какое сильное влияние оказывает даже малая начальная кривизна или малая погиб стойки на ее прогиб, когда нагрузка приближается к Эйлеровой для стойки прямолинейной, вот почему и не рекомендуется превосходить половины, а в важных случаях даже одной четверти Эйлеровой нагрузки.

В рассмотренном примере предполагается, что стойка имеет весьма малую, как бы случайную кривизну, но во многих случаях пользуются криволинейными балками, например в судостроении палубным бимсам придается определенная погиб или в строительном деле при сооружении разного рода арок. Но эти случаи не относятся к „продольному“ изгибу, в котором предполагается, что нагрузка действует по направлению хорды недеформированной стойки или балки, а в случае арки или бимса нагрузка действует перпендикулярно хорде. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения.

§ 11. В упомянутых выше сочинениях Халфена и Апеля приведено решение в эллиптических функциях Вейерштрасса и более общей задачи, когда на стойку, имеющую постоянную начальную кривизну, действует направленное по нормали давление.

Обозначим это давление, отнесенное на погонную единицу длины, через p и положим сперва, что оба конца стойки подперты. Пусть R и S — слагающие реакции в точке опоры O , S_1 — боковая реакция в точке A , удерживающая эту точку на оси Ox .

Условия статического равновесия стойки суть

$$-P + R - \int_0^l p \sin \tau d\sigma = 0$$

$$S + S_1 - \int_0^l p \cos \tau d\sigma = 0$$

$$S_1 \zeta_1 - \int_0^l p \eta \sin \tau d\sigma - \int_0^l p \zeta \cos \tau d\sigma = 0$$

но мы имеем:

$$d\zeta = d\sigma \cos \tau; \quad d\eta = d\sigma \sin \tau$$

то будет

$$\int_0^l \sin \tau d\sigma = \eta_1 - \eta_0 = 0$$

ибо

$$\eta_1 = 0$$

и

$$\eta_0 = 0$$

$$\int_0^l \eta \sin \tau d\sigma = \frac{1}{2} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \eta_0^2 = 0$$

$$\int_0^l \zeta \cos \tau d\sigma = \frac{1}{2} \zeta_1^2 - \frac{1}{2} \zeta_0^2 = \frac{1}{2} \zeta_1^2$$

Таким образом, предыдущие уравнения дают

$$R = P$$

$$S = S_1 = \frac{P}{2} \zeta_1 \quad (31)$$

Возьмем сечение в точке $N(\zeta, \eta)$, тогда изгибающий момент в этой точке будет

$$M = -S\zeta + R\eta + p \int_0^\sigma (\zeta - \alpha) \cos \tau d\sigma_1 + p \int_0^\sigma (\eta - \beta) \sin \tau d\sigma_1 \quad (32)$$

где α и β суть координаты переменной точки H , лежащей между O и N , соответствующей дуге $OH = \sigma$, так что

$$d\sigma \cos \tau = d\alpha; \quad d\sigma \sin \tau = d\beta$$

Значит, будет

$$M = R\eta - S\zeta + \frac{P}{2}(\zeta^2 + \eta^2)$$

ибо при $\sigma_1 = 0$ будет

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0$$

при $\sigma_1 = \sigma$ будет

$$\alpha = \zeta; \quad \beta = \eta$$

так как значению $\sigma_1 = 0$ соответствует точка O , значению $\sigma_1 = \sigma$ соответствует точка N .

Уравнение равновесия будет

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = M$$

причем при избранном направлении осей и счете дуги σ будет

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 \eta d\zeta - d^2 \zeta d\eta}{d\sigma^3} = - \frac{d\tau}{d\sigma}$$

Положим

$$\zeta = lz; \quad \eta = ly; \quad \rho = lq; \quad \rho_0 = lq_0; \quad \zeta_1 = lz_1$$

тогда будет

$$M = Ply - \frac{Pl^2}{2} z_1 z + \frac{Pl^2}{2} (z^2 + y^2)$$

и пусть

$$P = m \frac{Pl}{2}$$

тогда

$$M = \frac{Pl^2}{2} [z^2 + y^2 + my - z_1 z] = \frac{Pl^2}{2} \left[\left(z - \frac{z_1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{m}{2} \right)^2 - \frac{z_1^2 + m^2}{4} \right]$$

Необходимо здесь же заметить, что хотя величина z_1 и постоянная, но не заданная, а неизвестная, значение которой подлежит определению. Нетрудно вперед предвидеть, что расчет возможно будет вести только последовательными приближениями, приписывая z_1 различные частные значения и таким путем определяя то из них, которое будет удовлетворять тем трансцендентным уравнениям, какие получатся для определения z_1 и других постоянных, которые войдут при решении задачи, поэтому мы будем считать, что величине z_1 приписано такое частное значение.

Положим

$$u = z - \frac{z_1}{2} = r \sin \tau; \quad v = y + \frac{m}{2} = r \cos \tau$$

тогда будет

$$M = \frac{p l^2}{2} \left[r^2 - \frac{m^2 + z_1^2}{4} \right] \quad (33)$$

и уравнение равновесия примет вид

$$\frac{EI}{l} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right] = M$$

Положим для краткости

$$\frac{p l^3}{2EI} = 2a^2; \quad \frac{m^2 + z_1^2}{4} = b_1$$

тогда получим:

$$\frac{1}{q} = 2a^2 [r^2 - b_1] + \frac{1}{q_0}$$

пусть будет

$$\frac{1}{q_0} - 2a^2 b_1 = 2a^2 c$$

тогда уравнение равновесия примет вид

$$\frac{1}{q} = 2a^2 [r^2 + c] \quad (34)$$

Дальнейшее интегрирование этого уравнения основано на следующем преобразовании, данном М. Леви: имеем равенство

$$r^2 d\tau = u dv - v du = (u \cos \tau - v \sin \tau) ds$$

значит,

$$r^2 \frac{d\tau}{ds} = u \cos \tau - v \sin \tau$$

Отсюда следует

$$d\left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right) = -(u \sin \tau + v \cos \tau) d\tau = -(u \sin \tau + v \cos \tau) \frac{d\tau}{ds} = r dr \frac{1}{q}$$

значит,

$$\frac{1}{q} = \frac{d\left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right)}{r dr}$$

так что уравнение (34) будет

$$d\left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right) = 2a^2 (r^2 + c) r dr$$

Откуда по интегрировании получаем:

$$r^2 \frac{d\tau}{ds} = h + a^2 (r^2 + c)^2 \quad (35)$$

где h есть произвольная постоянная, которая определяется по условию, что при $s=0$, т. е. в точке O , момент $M=0$, значит, кривизна равна $\frac{1}{q_0}$; таким образом, будет

$$h = \left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right)_0 - a^2 (r_0^2 + c)^2 = -r_0^2 \frac{1}{q_0} - a^2 (r_0^2 + c)^2$$

причем

$$r_0^2 = \frac{z_1^2 + m_1^2}{4}$$

Но в полярных координатах

$$ds^2 = r^2 d\tau^2 + dr^2 \quad (36)$$

из уравнений (35) и (36) следует

$$\left(r \frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{[h + a^2 (r^2 + c)^2]^2}{r^2} = 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

поэтому будет

$$\left(\frac{rdr}{ds}\right)^2 = r^2 - [h - a^2(r^2 + c)^2]^2$$

Положив

$$r^2 + c = \lambda \quad (37)$$

получим:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \lambda - c - (h - a^2\lambda^2)^2 \quad (37')$$

Откуда следует

$$2ds = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - c - (h - a^2\lambda^2)^2}}$$

и

$$2s = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h - a^2\lambda^2)^2}} \quad (37'')$$

причем

$$\lambda_0 = r_0^2 + c$$

По правилам, излагаемым в курсах интегрального исчисления, интеграл в уравнении (37'') приведет к каноническому виду, и мы получим:

$$2s = \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

где μ , k , φ_0 будут выражены через λ_0 , c , h , a , т. е. в нашем предположении, когда величине z_1 приписано частное значение, это будут известные числа.

Для вершины C будет

$$z = \frac{1}{2} z_1; \tau = 0$$

обозначая ординату вершины через y_1 , будем иметь:

$$y_1 + \frac{m}{2} = r_1$$

соответственно чему для вершины C будет

$$\lambda = \lambda_1 = r_1^2 + c$$

С другой стороны, для вершины C значение s есть $s = \frac{1}{2}$, поэтому будет

$$\frac{1}{2} = \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (38)$$

причем φ_1 выражается через λ_1 совершенно так же, как φ_0 через λ_0 , так что должно бы иметь равенство

$$\frac{1}{2} - \mu [F(\varphi_1) - F(\varphi_0)] = 0 \quad (39)$$

если бы значения z_1 и y_1 были истинные.

Для дальнейшего интегрирования имеем уравнение (35), из которого следует

$$(\lambda - c) \frac{d\tau}{ds} = h + a^2 \lambda^2$$

или, на основании (37):

$$d\tau = \frac{h + a^2 \lambda^2}{2(\lambda - c)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}}$$

т. е.

$$2\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{h + a^2 \lambda^2}{\lambda - c} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}} \quad (40)$$

Ввиду наличия в знаменателе множителя $\lambda - c$, интеграл в этой формуле приведет к эллиптическим интегралам первого и второго рода, с которыми мы имели дело выше, но и к интегралу третьего рода, который зависит от трех аргументов и для которого таблиц нет.

Интегралы третьего рода надо для численных вычислений или приводить к Якобиевым функциям Z и Θ , или же вычислять непосредственно по приближенным формулам квадратур. Упомянутое

приведение довольно сложно, оно подробно изложено в руководстве Дюрежа (H. Durège. Theorie der elliptischen Functionen).

Практически расчет проще вести по приближенным формулам квадратур, не делая никаких приведений к нормальному виду, а беря интегралы (37'') и (40) в том виде, как они есть.

Этот расчет ведется тогда в следующей последовательности.

1. По заданным элементам стойки, нагрузке, начальной кривизне и нормальному давлению вычисляются постоянные a и m .

2. Задаются для пробы значения $\frac{1}{2} z_1$ и y_1 координат вершины и вычисляются величины

$$c, h, \lambda_0 \text{ и } \lambda_1$$

3. По одной из формул квадратур, лучше всего Гаусса, взяв пять ординат, надо вычислить интегралы

$$H = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} - \frac{1}{2}$$

$$L = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{h + a^2\lambda}{\lambda - c} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} \quad (41)$$

Если [бы оказалось $H=0$ и $L=0$, то принятые значения $\frac{1}{2} z_1$ и y_1 суть истинные, если же H и L окажутся не равными нулю, то надо, сохранив значение z_1 , принять другое значение y_1 и вычислить величины H и L , затем, сохранив первое значение y_1 , взять другое значение z_1 и, повторив вычисление, найти соответствующие H и L и, продолжая действовать таким образом, применять „линейное приближение“, по которому и найти те значения y_1 и z_1 , при которых $H=0$ и $L=0$; эти значения и дадут координаты вершины.

4. В вершине угол $\tau=0$, поэтому как только координаты вершины найдены и, значит, численные значения параметров, входящих в интеграл (40), известны, задаем ряд последовательных равноотстоящих значений λ между λ_0 и λ_1 и по одной из формул

квадратур вычисляем, по уравнению (40), значения угла τ , а так как формула (37) дает и соответствующие значения r , то форма равновесия и будет определена.

Хотя такое вычисление и представляется довольно продолжительным, но оно будет во много раз проще и короче, нежели по Вейерштрассовым функциям, как то изложено в руководствах Халфена или Аппеля. Необходимо при этом еще заметить, что там рассматривается не стойка, для которой заданы длина и условия закрепления концов, а упругая проволока, к концам которой приложены *заданные силы и пары*, находящиеся в равновесии, для стойки же реакции опор и пары закрепления *неизвестны*. Таким образом, задача для проволоки становится значительно проще, нежели для стойки, ибо для проволоки в интегралах (37") и (40) *все* постоянные известны, тогда как для стойки в определении этих постоянных и заключается главная трудность.

Если методу Халфена применить к стойке, то для определения неизвестных постоянных параметров пришлось бы вести процесс последовательных приближений, гораздо более сложный, нежели изложенный выше.

Рассмотренная задача не имеет большого технического значения, поэтому нет надобности пояснять ее численным примером, тем более что вычисления, кроме некоторой длинноты и утомительного однообразия, затруднений не представляют.

О ДИНАМИЧЕСКОМ УРАВНОВЕШИВАНИИ РОТОРОВ ГИРОСКОПОВ

§ 1. Гироскоп, изобретенный Л. Фуко в 1852 г., лишь через 40 лет нашел себе важное техническое применение в виде прибора Обри, направляющего курс мины Уайтхеда. Затем в 1905 г. Шлик предложил применять гироскоп для успокоения качки судов, что и было осуществлено сперва им самим в Германии, затем в гораздо большем виде Сперри в Америке. К этому же времени относится применение гироскопа как компаса после того, как сперва Аншютц, а затем Сперри выпустили на рынок изобретенные ими гироскопы, получившие вскоре широкое распространение на военных судах всех держав, а затем и на лучших коммерческих.

После мировой войны, с развитием авиации, гироскоп получил множество самых разнообразных применений в авиационном и артиллерийском деле.

Соответственно своему назначению гироскопы делаются или малого размера с ротором в 1—20 кг, как в гироскопах, или с роторами от 1 до 100 т, когда они должны служить успокоителями качки судов.

Роторы гироскопов делают весьма большое число оборотов (от 20 тыс. об./мин. для малых до 900 об./мин. для самых больших¹). При таких больших числах оборотов развиваются весьма большие

¹ Число оборотов берется такое, чтобы окружная скорость составляла 150—200 м/сек.

центробежные силы, и роторы требуют весьма тщательного уравнивания.

О величине этих сил можно судить по следующим примерам: ротор гироскопаса Аншютца при диаметре 12 см и весе 2500 г делает 20 тыс. об./мин., и центробежная сила, происходящая от какой-либо массы, помещенной на его ободе, превышает вес этой массы в 25 тысячи раз.

Ротор гироскопического успокоителя Сперри на пароходе „Конте ди Савойа“ при диаметре 4 м весит 110 т и делает 900 об./мин.; на его ободе центробежная сила превышает вес какой-либо массы в 2 тысяч раз.

Отсюда ясно, что статическое уравнивание роторов гироскопов недостаточно, ибо остающиеся погрешности такого уравнивания при быстром вращении ротора увеличиваются по своему действию в несколько тысяч раз и, постоянно изменяя свое направление, вызывают вибрацию, расстраивающую механизм, следовательно требуется „динамическое уравнивание роторов“.

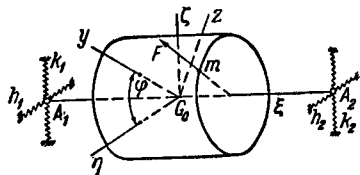
Необходимо иметь в виду, что всякий маховик, всякий якорь динамомашин есть по существу ротор, не говоря уже о „роторах“ паровых турбин, так что и здесь, в особенности для турбин, тщательное уравнивание существенно необходимо.

Для динамического уравнивания существуют разного рода машины, но обыкновенно теория их связывается с частностями их устройства (в большей части случаев патентованного) и не излагается в достаточно общем виде, в котором главное внимание было бы обращено на самую сущность дела, так чтобы при надобности любой инженер мог спроектировать машину или приспособление, соответствующее этой надобности.

В настоящей статье дается изложение такой общей теории, причем главным образом имеются в виду роторы малых гироскопов, предназначенных для гироскопаса или авиационных приборов.

§ 2. Теория всякого приспособления или всякой машины для динамического уравнивания сводится к решению следующего

вопроса: имеется вполне уравновешенный ротор, т. е. такой, что центр тяжести его лежит на оси фигуры, около которой происходит вращение ротора и которая есть главная полярная ось инерции его; в этом случае подшипники ротора при вращении его испытывают то же самое давление, как и при покое. В данной точке ротора к нему прикрепляется грузик p , масса которого $m = \frac{p}{g}$ весьма мала по сравнению с массой M ротора. Требуется определить малые колебания ротора, предполагая, что концевые подшипники его вала подвешены на пружинах заданной жесткости.



Фиг. 1.

Возьмем две системы координат (фиг. 1), начало первой из них, неподвижной в пространстве, поместим в точке G_0 — центре тяжести ротора без добавочного грузика; пусть $G_0\xi\zeta$ — эти неподвижные оси; вторая система осей $Gxyz$ имеет свое начало в точке G — центре тяжести ротора, при покое его совпадающей с точкою G_0 , эта система осей неизменно связана с ротором, и концы осей Gy и Gz отмечаются кернами на поверхности ротора, оси же Gx и $G_0\xi$ при покое ротора совпадают как между собою, так и с осью вала, т. е. осью фигуры ротора.

Подшипники ротора A_1 и A_2 подвешены, как уже сказано, на пружинах, из коих одна пара с жесткостью h_1 и h_2 работает в горизонтальной плоскости, другая пара с жесткостью k_1 и k_2 работает в плоскости вертикальной, как это помечено на фиг. 1.

Координаты подшипников (для осей $Gxyz$):

$$A_1(-l_1, 0, 0); A_2(l_2, 0, 0)$$

При весе ротора P и покое его давления на подшипники

$$Z_{10} = P_{10} = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2}; P_{20} = Z_{20} = \frac{Pl_1}{l_1 + l_2} \quad (1)$$

$$H_{10} = E_{10} = 0; H_{20} = E_{20} = 0 \quad (2)$$

Эти давления уравниваются начальным натяжением пружин. Положим, что в точке

$$x=a; y=b; z=c \quad (3)$$

к ротору прикреплена весьма малая масса m , размерами которой по сравнению с размерами ротора можно пренебречь и принимать ее за материальную точку.

Вместо того, чтобы рассматривать ротор с прикрепленной к нему массой как одно твердое тело, будем ввиду малости массы m рассматривать ротор как уравновешенный, но находящийся под действием силы F , представляющей реакцию связи, крепящей массу m к ротору. Эта реакция есть так называемая "центробежная сила", направленная по радиусу наружу и равная

$$F = m\omega^2 \sqrt{b^2 + c^2} = m\omega^2 \rho \quad (4)$$

так что проекции этой силы на оси подвижных координат следующие:

$$F_x=0; F_y=m\omega^2 b; F_z=m\omega^2 c \quad (5)$$

В момент времени t положение ротора определяется:

1) координатами его центра тяжести G

$$\xi_0 = \xi_0(t); \eta_0 = \eta_0(t); \zeta_0 = \zeta_0(t) \quad (6)$$

причем величины η_0 и ζ_0 при всяком значении t весьма малы по сравнению с размерами ротора, величина же $\xi_0=0$, как показано ниже;

2) весьма малыми углами поворотов:

около оси $G_0\eta$

$$\theta = \theta(t)$$

около оси $G_0\zeta$

$$\psi = \psi(t) \quad (7)$$

3) углом поворота φ около оси $G_0\xi$, причем $\varphi = \omega t$, ибо это вращение происходит равномерно. Такое определение положения

ротора применимо ввиду малости величин η_0 , ζ_0 , θ и ψ , ибо мы ограничиваемся лишь членами первого порядка относительно их.

Вследствие перемещений η_0 и ζ_0 центра тяжести G и поворотов θ и ψ координаты точек A_1 и A_2 будут:

точки A_1

$$\xi_1 = -l_1; \eta_1 = \eta_0 - l_1\psi; \zeta_1 = \zeta_0 + l_1\theta$$

точки A_2

$$\xi_2 = l_2; \eta_2 = \eta_0 + l_2\psi; \zeta_2 = \zeta_0 - l_2\theta$$

(8)

ограничиваясь членами первого порядка, как это и во всем дальнейшем предполагается и чего мы больше оговаривать не будем.

Вследствие этих перемещений подвесные пружины получают добавочные натяжения:

Для A_1

$$E_1 = 0; H_1 = -h_1(\eta_0 - l_1\psi); Z_1 = -k_1(\zeta_0 + l_1\theta)$$

для A_2

$$E_2 = 0; H_2 = -h_2(\eta_0 + l_2\psi); Z_2 = -k_2(\zeta_0 - l_2\theta)$$

(9)

Проекции силы F на оси координат $\xi\eta\zeta$:

$$F_\xi = 0; F_\eta = m\omega^2\rho \cos(\omega t + \alpha); F_\zeta = m\omega^2\rho \sin(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

причем положено

$$b = \rho \sin \alpha; c = \rho \cos \alpha; \rho = \sqrt{b^2 + c^2} \quad (11)$$

следовательно, уравнения движения центра тяжести ротора будут

$$M_1 \ddot{\xi}_0 = -kP_1 \xi_0$$

$$M_1 \ddot{\eta}_0 + h_1(\eta_0 - l_1\psi) + h_2(\eta_0 + l_2\psi) = m\omega^2\rho \cos(\omega t + \alpha) \quad (12)$$

$$M_1 \ddot{\zeta}_0 + k_1(\zeta_0 + l_1\theta) + k_2(\zeta_0 - l_2\theta) = m\omega^2\rho \sin(\omega t + \alpha)$$

где M_1 — масса ротора вместе с массой подшипников, статора и приведенной массой пружин; $P_1 = M_1 g$ и k — некоторая постоянная.

Уравнения (12) можно писать так:

$$\ddot{\xi}_0 + k g \xi_0 = 0$$

$$M_1 \eta_0'' + (h_1 + h_2) \eta_0 + (h_2 l_2 - h_1 l_1) \psi = m \omega^2 p \cos(\omega t + \alpha) \quad (13)$$

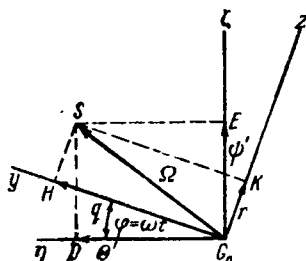
$$M_1 \zeta_0'' + (k_1 + k_2) \zeta_0 + (k_1 l_1 - k_2 l_2) \theta = m \omega^2 p \sin(\omega t + \alpha)$$

§ 3. Для составления уравнений вращательного движения надо несколько преобразовать уравнения Эйлера, которые в нашем случае будут

$$p = \omega = \varphi'$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - B) \omega r = M_y = \Sigma (zX - xZ) \quad (14)$$

$$B \frac{dr}{dt} + (B - A) \omega q = M_z = \Sigma (xY - yX)$$



Фиг. 2.

при обычных обозначениях.

Составим чертеж на плоскости $G_0 \eta \zeta$ (фиг. 2). Пусть вектор $G_0 S = \Omega$ представляет проекцию мгновенной угловой скорости на плоскость $G_0 \eta \zeta$, совпадающую с плоскостью $G_0 y z$, тогда будет

$$\Omega_\eta = G_0 D = \theta'$$

$$\Omega_\zeta = G_0 E = \psi'$$

Проекция же угловой скорости Ω на оси $G_0 y$ и $G_0 z$ будут

$$\begin{aligned} \Omega_y = q = G_0 H &= \theta' \cos \omega t + \psi' \sin \omega t \\ \Omega_z = r = G_0 K &= -\theta' \sin \omega t + \psi' \cos \omega t \end{aligned} \quad (15)$$

Из этих формул следует

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \theta'' \cos \omega t + \psi'' \sin \omega t + \omega (-\theta' \sin \omega t + \psi' \cos \omega t) = \\ &= \theta'' \cos \omega t + \psi'' \sin \omega t + \omega r \\ \frac{dr}{dt} &= -\theta'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t - \omega (\theta' \cos \omega t + \psi' \sin \omega t) = \\ &= -\theta'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t - \omega q \end{aligned} \quad (15')$$

и уравнения Эйлера будут

$$p = \varphi' = \omega$$

$$B(\theta'' \cos \omega t + \psi'' \sin \omega t) + A\omega r = M_y \quad (16)$$

$$B(-\theta'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t) - A\omega q = M_x$$

но, заметив, что совершенно подобно формулам (15) будет

$$M_y = M_y \cos \omega t - M_x \sin \omega t \quad (17)$$

$$M_x = M_y \sin \omega t + M_x \cos \omega t$$

где

$$M_y = \Sigma (\zeta \Xi - \xi Z); \quad M_x = \Sigma (\xi H - \eta \Xi) \quad (18)$$

мы из двух последних уравнений (16) получим:

$$B\theta'' + A\omega\psi' = M_y \quad (19)$$

$$B\psi'' - A\omega\theta' = M_x$$

Но, на основании формул (9) и (10), будет при $\xi_0 = 0$

$$M_y = -l_1 k_1 (\zeta_0 + l_1 \theta) + l_2 k_2 (\zeta_0 - l_2 \theta) - m\omega^2 \rho a \sin(\omega t + \alpha) \quad (19')$$

$$M_x = l_1 h_1 (\eta_0 - l_1 \psi) - l_2 h_2 (\eta_0 + l_2 \psi) + m\omega^2 \rho a \cos(\omega t + \alpha)$$

К правым частям равенств (19') необходимо еще присовокупить величины $-B_1\theta''$ и $-B_1\psi''$, представляющие силы инерции статора, подшипников и прочих частей, увлекаемых в колебательном движении системы, но не участвующих во вращении ротора, поэтому, положив $B + B_1 = B_2$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} B_2\theta'' + A\omega\psi' - (l_2 k_2 - l_1 k_1) \zeta_0 + (l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2) \theta &= \\ &= -m\omega^2 \rho a \sin(\omega t + \alpha) \\ B_2\psi'' - A\omega\theta' - (l_1 h_1 - l_2 h_2) \eta_0 + (l_1^2 h_1 + l_2^2 h_2) \psi &= \\ &= m\omega^2 \rho a \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (13) и (20) и определяют малые колебания ротора, подвешенного на пружинах.

Величины l_1 и l_2 надо считать заданными и неизменными, величинами же h_1 , h_2 , k_1 , k_2 мы можем распоряжаться по произволу надлежащим подбором пружин.

Очевидно, что уравнения (13) и (20) упрощаются, если взять h_1 , h_2 , k_1 , k_2 так, чтобы было

$$\begin{aligned} h_2 l_2 - h_1 l_1 &= 0 \\ k_1 l_1 - k_2 l_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

предполагая h_1 и k_1 заданными, определяем из уравнений (21) h_2 и k_2 , а именно:

$$h_2 = h_1 \frac{l_1}{l_2}; \quad k_2 = k_1 \frac{l_1}{l_2} \quad (22)$$

Тогда будет

$$\begin{aligned} h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2 &= h_1 l_1^2 + h_1 l_1 l_2 = h_1 l_1 (l_1 + l_2) = h_1 l_1 l \\ k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 &= k_1 l_1^2 + k_1 l_1 l_2 = k_1 l_1 (l_1 + l_2) = k_1 l_1 l \end{aligned} \quad (23)$$

причем положено

$$l = l_1 + l_2$$

Точно так же будет

$$h_1 + h_2 = \frac{h_1 l}{l_2}; \quad k_1 + k_2 = \frac{k_1 l}{l_2} \quad (24)$$

Очевидно, что уравнения (13) и (20) еще упростятся, если взять

$$h_1 = k_1 \quad (25)$$

Тогда, положив

$$\begin{aligned} \frac{h_1 l_1}{M_1 l_2} = \frac{k_1 l_1}{M_1 l_2} &= \lambda^2; \quad \frac{m}{M_1} \rho = \mu \\ \frac{h_1 l_1 l}{B_2} = \frac{k_1 l_1 l}{B_2} &= n^2; \quad \frac{A}{B_2} = f; \quad \frac{m \rho a}{B_2} = s \end{aligned} \quad (26)$$

получим:

$$\begin{aligned} \xi_0'' + k g \xi_0 &= 0 \\ \eta_0'' + \lambda^2 \eta_0 &= \omega^2 \mu \cos(\omega t + \alpha) \\ \zeta_0'' + \lambda^2 \zeta_0 &= \omega^2 \mu \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\ddot{\theta} + n^2\theta + f\omega\dot{\psi} = -\omega^2 s \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{\psi} + n^2\psi - f\omega\dot{\theta} = \omega^2 s \cos(\omega t + \alpha)$$

Эти уравнения имеют место, когда нет сопротивления колебательному движению, на деле оно всегда есть, хотя бы весьма малое, но даже и малое сопротивление быстро погашает свободные колебания, так что устанавливаются только вынужденные, именно:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha) \\ \zeta_0 &= \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{\omega^2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \sin(\omega t + \alpha) \\ \psi &= \frac{\omega^2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (29)$$

пренебрегая влиянием сопротивления, предполагаемого малым, на величину размахов.

На основании формулы (8) имеем следующие конечные уравнения движения точек A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 I_1 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \right] \cos(\omega t + \alpha) \\ \zeta_1 &= \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 I_1 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \right] \sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 I_2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \right] \cos(\omega t + \alpha) \\ \zeta_2 &= \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 I_2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2} \right] \sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (31)$$

Отсюда видно, что при соблюдении условий (21) и (25) траектории точек G , A_1 , A_2 — круги, радиусы которых соответственно будут

$$r_0 = \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}$$

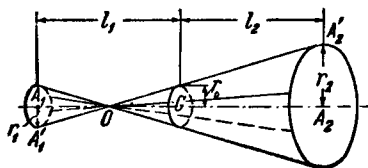
$$r_1 = r_0 - \frac{l_1}{n^2 + (f-1)\omega^2} \omega^2 s = r_0 - l_1 \sigma \quad (32)$$

$$r_2 = r_0 + \frac{l_2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \omega^2 s = r_0 + l_2 \sigma$$

Из формулы (32) видно, что точки A'_2 , G , A'_1 лежат на одной прямой, которая пересекает ось $A_1 O A_2$ в такой точке O (фиг. 3), что

$$O A_1 : O A_2 = r_1 : r_2$$

Эта точка остается неподвижной, и, значит, прямая $A'_1 A'_2$, представляющая ось фигуры ротора, вращается равномерно с угловой скоростью ω , описывая коническую поверхность с вершиною в точке O .



Фиг. 3.

§ 4. На основании сделанных обозначений (32) уравнения движения точек G , A_1 , A_2 напишутся соответственно

$$\begin{aligned} \eta_0 &= r \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_0 &= r_0 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_1 &= r_1 \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_1 &= r_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_2 &= r_2 \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_2 &= r_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (33)$$

или иначе

$$\begin{aligned} \eta_0 &= r_0 \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_0 &= r_0 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_1 &= \eta_0 - l_1 \sigma \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_1 &= \zeta_0 - l_1 \sigma \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_2 &= \eta_0 + l_2 \sigma \cos(\omega t + \alpha); & \zeta_2 &= \zeta_0 + l_2 \sigma \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (34)$$

Положим теперь, что имеется несколько неуравновешенных масс

$$m_1, m_2, \dots, m_k$$

координаты которых

$$(a_1, \rho_1, \alpha_1) (a_2, \rho_2, \alpha_2) \dots (a_k, \rho_k, \alpha_k)$$

тогда по принципу наложения получим:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \sum r_0^{(i)} \cos(\omega t + \alpha_i) = \cos \omega t \sum r_0^{(i)} \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum r_0^{(i)} \sin \alpha_i \\ \zeta_0 &= \sum r_0^{(i)} \sin(\omega t + \alpha_i) = \sin \omega t \sum r_0^{(i)} \cos \alpha_i + \cos \omega t \sum r_0^{(i)} \sin \alpha_i\end{aligned}\quad (35)$$

Совершенно так же будет

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_0 - l_1 [\cos \omega t \sum \sigma_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum \sigma_i \sin \alpha_i] \\ \zeta_1 &= \zeta_0 - l_1 [\sin \omega t \sum \sigma_i \cos \alpha_i + \cos \omega t \sum \sigma_i \sin \alpha_i]\end{aligned}\quad (35')$$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \eta_0 + l_2 [\cos \omega t \sum \sigma_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \sum \sigma_i \sin \alpha_i] \\ \zeta_2 &= \zeta_0 + l_2 [\sin \omega t \sum \sigma_i \cos \alpha_i + \cos \omega t \sum \sigma_i \sin \alpha_i]\end{aligned}\quad (35'')$$

Таким образом, все дело свелось к вычислению сумм

$$\begin{aligned}\sum r_0^{(i)} \cos \alpha_i; & \quad \sum r_0^{(i)} \sin \alpha_i \\ \sum \sigma_i \cos \alpha_i; & \quad \sum \sigma_i \sin \alpha_i\end{aligned}$$

На основании формулы (26) будет

$$\begin{aligned}\sum r_0^{(i)} \cos \alpha_i &= \frac{1}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sum m_i \rho_i \cos \alpha_i = \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} c_0 \\ \sum r_0^{(i)} \sin \alpha_i &= \frac{1}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sum m_i \rho_i \sin \alpha_i = \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} b_0\end{aligned}\quad (36)$$

причем положено

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 + \dots + m_k &= m_0 \\ \sum m_i c_i &= m_0 c_0; \quad \sum m_i b_i = m_0 b_0\end{aligned}\quad (37)$$

т. е. m_0 — полная неуравновешенная масса; b_0 , c_0 — координаты центра тяжести ее.

Положив

$$\begin{aligned}m_0 \rho_0 \cos \alpha_0 &= m_0 c_0 = \sum m_i \rho_i \cos \alpha_i \\ m_0 \rho_0 \sin \alpha_0 &= m_0 b_0 = \sum m_i \rho_i \sin \alpha_i\end{aligned}\quad (38)$$

получим:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \rho_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \\ \zeta_0 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \rho_0 \sin(\omega t + \alpha_0)\end{aligned}\quad (39)$$

Эти уравнения показывают, что и в рассматриваемом случае центр тяжести G ротора описывает около среднего своего положения G_0 круговую орбиту, для которой радиус ρ_0 и начальная фаза α_0 определяются формулами (38).

На основании формулы (26) будет

$$\begin{aligned}\sum \sigma_i \cos \alpha_i &= \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \sum m_i a_i \rho_i \cos \alpha_i = \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} I_{xs} \\ \sum \sigma_i \sin \alpha_i &= \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \sum m_i a_i \rho_i \sin \alpha_i = \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} I_{xy}\end{aligned}$$

причем положено

$$\begin{aligned}I_{xs} &= \sum m_i a_i \rho_i \cos \alpha_i = \sum m_i a_i c_i \\ I_{xy} &= \sum m_i a_i \rho_i \sin \alpha_i = \sum m_i a_i b_i\end{aligned}\quad (38')$$

т. е. I_{xs} и I_{xy} — центробежные моменты неуравновешенных масс.

Таким образом, движение точек A_1 и A_2 определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[c_0 \cos \omega t - b_0 \sin \omega t \right] - \\ &- l_1 \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \left[\frac{I_{xs}}{B_2} \cos \omega t - \frac{I_{xy}}{B_2} \sin \omega t \right] \\ \zeta_1 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[c_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t \right] - \\ &- l_1 \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \left[\frac{I_{xs}}{B_2} \sin \omega t + \frac{I_{xy}}{B_2} \cos \omega t \right] \\ \eta_2 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[c_0 \cos \omega t - b_0 \sin \omega t \right] + \\ &+ l_2 \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \left[\frac{I_{xs}}{B_2} \cos \omega t - \frac{I_{xy}}{B_2} \sin \omega t \right] \\ \zeta_2 &= \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[c_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t \right] + \\ &+ l_2 \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \left[\frac{I_{xs}}{B_2} \sin \omega t + \frac{I_{xy}}{B_2} \cos \omega t \right]\end{aligned}\quad (40)$$

Нетрудно видеть, что орбиты этих точек также круги.

§ 5. Положим теперь, что прибавлением или отнятием некоторых добавочных масс мы хотим уравновесить ротор. Спрашивается, как велики должны быть эти массы и где их надо к ротору прикрепить.

Легко видеть, что прибавлением или отнятием одной массы уравновесить ротор нельзя. В самом деле, положим, что в точке (x_1, y_1, z_1) мы помещаем добавочную массу q_1 . Чтобы ротор стал уравновешенным, надо, чтобы по присоединении этой массы все три центробежных момента равнялись нулю, ибо в этом предположении выведены наши уравнения, и чтобы при всяком значении t было

$$\eta_0 = 0; \zeta_0 = 0$$

$$\theta = 0; \psi = 0$$

Положив по аналогии с равенствами (38') $I_{xy} = \Sigma m_i b_i c_i$, мы видим, что высказанные условия выражаются следующими равенствами:

$$\left. \begin{array}{l} 1) q_1 x_1 y_1 + I_{xy} = 0 \\ 2) q_1 x_1 z_1 + I_{xz} = 0 \\ 3) q_1 z_1 y_1 + I_{yz} = 0 \end{array} \right\} \text{ равенство нулю центро-} \\ \text{бежных моментов}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4) q_1 y_1 + m_0 b_0 = 0 \\ 5) q_1 z_1 + m_0 c_0 = 0 \end{array} \right\} \eta_0 = 0; \zeta_0 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 x_1 y_1 + I_{xy} = 0 \\ q_1 x_1 z_1 + I_{xz} = 0 \end{array} \right\} \theta = 0; \psi = 0$$

Как видно, последние два уравнения тождественны с первыми двумя, поэтому остаются только первые пять уравнений, между тем в нашем распоряжении только четыре произвольные величины q_1, x_1, y_1, z_1 , следовательно нужно, чтобы между известными величинами $m_0 b_0, m_0 c_0, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ существовало некоторое соотношение, чего не предполагается.

Таким образом, присоединение одной массы для уравнивания недостаточно, и надо присоединять по крайней мере две массы; обозначая их через q_1 и q_2 и координаты их через x_1, y_1, z_1 и

x_2, y_2, z_2 , будем иметь в нашем распоряжении восемь произвольных величин, которые должны удовлетворять пяти уравнениям:

$$\begin{aligned} q_1 x_1 y_1 + q_2 x_2 y_2 + I_{xy} &= 0 \\ q_1 x_1 z_1 + q_2 x_2 z_2 + I_{xz} &= 0 \\ q_1 y_1 z_1 + q_2 y_2 z_2 + I_{yz} &= 0 \\ q_1 y_1 + q_2 y_2 + m_0 b_0 &= 0 \\ q_1 z_1 + q_2 z_2 + m_0 c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Очевидно, что к этим пяти уравнениям можно присовокупить еще три любых уравнения, обусловленных лишь тем, чтобы полученная система допускала решение относительно наших неизвестных, т. е. чтобы уравнения были совместны, например:

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ q_1 &= q \\ q_2 &= q \end{aligned} \quad (\text{II})$$

причем q — заданная величина, положительная или отрицательная.

Система уравнений (I) тогда напишется так:

$$\begin{aligned} q(y_1 - y_2)x_1 + I_{xy} &= 0 \\ q(z_1 - z_2)x_1 + I_{xz} &= 0 \\ q(y_1 z_1 + y_2 z_2) + I_{yz} &= 0 \\ q(y_1 + y_2) + m_0 b_0 &= 0 \\ q(z_1 + z_2) + m_0 c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I}')$$

Решение этих уравнений затруднений не представляет, ибо оно приводится к решению квадратного уравнения относительно x_1 и уравнений первой степени для остальных неизвестных.

Отсюда видно, что присоединением двух равных между собою масс произвольно избранной величины, при которой корни x_1 вещественные, симметрично расположенных относительно плоскости zCy , может быть достигнуто полное динамическое уравнивание ротора.

Так как вместо системы (II) три уравнения могут быть избираемы по произволу, то уравнивание может быть осуществлено на бесчисленное множество манеров.

Как видно, при этом уравнивании будет достигнуто:

- а) центр тяжести ротора будет лежать на оси вала,
- б) ось вала будет главной осью инерции,
- в) оси Gy и Gz , лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вала, будут также главными осями инерции,
- г) давление на концевые подшипники вала будет равно статическому, имеющему место в отсутствие вращения вала [это следует из выражений (8)].

Эти результаты, а также уравнения (1)–(5) можно было бы написать и сразу на основании известной теоремы динамики, но все предыдущие выкладки были необходимы для установления соотношений между движением точек A_1 и A_2 при неуровновешенном роторе, чтобы по наблюдению этого движения получить с требуемой степенью точности величины $m_0 b_0$, $m_0 c_0$, I_{xy} , I_{xz} , которые нужны для расчета добавочных масс и положения их, ибо иначе пришлось бы делать множество попыток, прежде чем уравнивание было бы достигнуто.

В первом приближении принимается $I_{xy} = 0$.

§ 6. Чтобы отдать себе отчет о порядке тех величин, с которыми здесь приходится иметь дело, положим, что надо уравновесить ротор гироскопа, элементы которого таковы:

Вес ротора	2500 г
Диаметр ротора	12 см
Вес статора и камеры .	1000 г
Масса M_1	$\frac{3500}{980} = 3.6$
Момент инерции A . . .	56
" " B . . .	30
" " B_2 . . .	36
Отношение $\frac{A}{B} = f$	$= 1.87$

Как бы возмущающие массы расположены ни были, но, вообразив, что они сосредоточены в одной точке вблизи наружной поверхности ротора (на самом деле они могут происходить лишь от вделанного в ротор индуктора, диаметр которого — около половины диаметра ротора), мы значительно увеличим центробежные моменты и в меньшем размере статические моменты; таким образом, взяв $m = m_0$ и положив $a = 3$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\rho = 5$ см и приняв вес грузика $p = 1$ г, так что $m \approx \frac{1}{1000}$, мы будем иметь:

$$m_0 \rho_0 < m \rho;$$

$$I_{xy} < tab; I_{xz} < mac; I_{yz} < mbc$$

Обозначив через $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ положительные правильные дроби так, что

$$0 < \epsilon_1 < 1; 0 < \epsilon_2 < 1; 0 < \epsilon_3 < 1; 0 < \epsilon_4 < 1$$

мы можем писать

$$m_0 \rho_0 = \epsilon_1 m \rho$$

$$I_{xy} = \epsilon_2 tab; I_{xz} = \epsilon_3 mac; I_{yz} = \epsilon_4 mbc$$

причем будет

$$\epsilon_1 > \epsilon_2; \epsilon_1 > \epsilon_3; \epsilon_1 > \epsilon_4$$

значит, будет

$$m_0 \rho_0 = 0.005 \epsilon_1$$

$$\frac{m_0 \rho_0}{M_1} = \frac{0.005}{3.6} \epsilon_1 = \frac{1}{720} \epsilon_1 \approx 0.0014 \epsilon_1$$

$$I_{xy} = 0.009 \epsilon_2; I_{xz} = 0.012 \epsilon_3; I_{yz} = 0.012 \epsilon_4$$

Положим, что дробь $\epsilon_3 > \epsilon_2$, тогда будет

$$\sqrt{I_{xy}^2 + I_{xz}^2} < 0.015 \epsilon_3 = 0.015 \epsilon$$

Входящие в уравнение (40) величины

$$\frac{I_{xz}}{B_2} \cos \omega t - \frac{I_{xy}}{B_2} \sin \omega t \text{ и } \frac{I_{xz}}{B_2} + \frac{I_{xy}}{B_2} \cos \omega t$$

если положить

$$I_{xz} = r \cos \beta; \quad I_{xy} = r \sin \beta$$

так что

$$r = +\sqrt{I_{xy}^2 + I_{xz}^2}$$

могут быть написаны так:

$$\frac{r}{B_2} \cos(\omega t + \beta); \quad \frac{r}{B_2} \sin(\omega t + \beta)$$

причем будет

$$\frac{r}{B_2} = \frac{0.015}{36} \varepsilon \approx 0.0004\varepsilon$$

Для рассматриваемого ротора

$$l_1 = 3 \text{ см}, \quad l_2 = 4 \text{ см}$$

Таким образом, уравнения (40) в нашем случае будут

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0.0014\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha_0) - 0.0012\varepsilon \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \cos(\omega t + \beta) \\ \zeta_1 &= 0.0014\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha_0) - 0.0012\varepsilon \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \sin(\omega t + \beta) \\ \eta_2 &= 0.0014\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha_0) + 0.0016\varepsilon \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \cos(\omega t + \beta) \\ \zeta_2 &= 0.0014\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \alpha_0) + 0.0016\varepsilon \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (40')$$

при этом отношение $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \approx \frac{1}{4}$.

Эти уравнения имеют место в отсутствие сопротивления колебательному движению системы, в этом случае множитель $\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}$ изменением угловой скорости ω может быть доведен до сколь угодно большой величины, но на практике всегда есть сопротивление, а тогда указанный множитель заменяется следующим:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \quad (41)$$

где γ — величина, зависящая от сопротивления.

При резонансе, т. е. когда $\lambda = \omega$, множитель N достигает наибольшего своего значения

$$N_{\max} = \frac{1}{\gamma} \quad (42)$$

и, так как γ вообще величина очень малая (скажем, $1/50$) и так как

$$\frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} < \frac{1}{f-1} < 1.2$$

то амплитуда колебаний, представляемых первым членом уравнений (40'), будет приблизительно в 200 раз больше амплитуды колебаний, представляемых вторым членом этих уравнений, пока же резонанса нет, то отношение этих величин составляет около $1/4$.

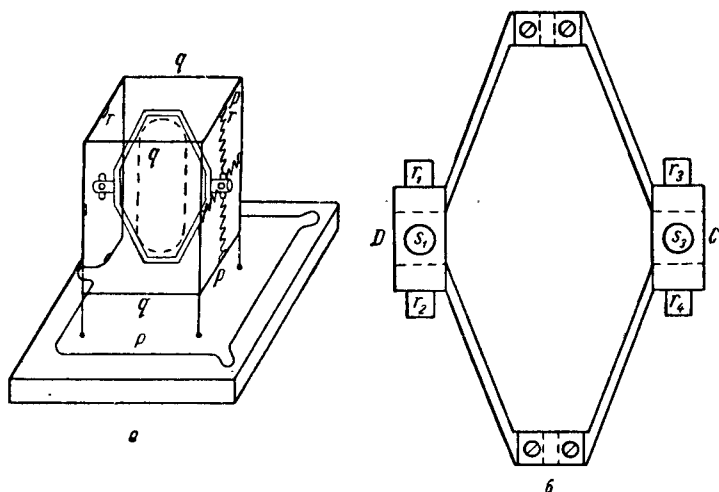
Это обстоятельство позволяет определять из наблюдений начальные фазы α_0 и β в отдельности, как сказано ниже, а после того как эти фазы определены, уравнивание ротора совершается весьма просто.

§ 7. Как видно в нашем примере, даже при резком резонансе, когда $N_{\max} = 50$, амплитуда колебаний составляет всего 0.7 мм, поэтому измерение их требует специальных приспособлений, а именно: а) балансировочный станок, б) искровой прибор, в) визирная труба с окулярным микрометром и позиционным кругом, г) обыкновенные визирные трубы большого (25—40) увеличения для производства зеркальных отсчетов по шкалам, д) стробоскоп.

а. *Балансировочный станок* изображен схематически на фиг. 4, а в предположении, что мы имеем дело с малыми роторами, приблизительно тех размеров, которые указаны выше.

Устройство этого станка таково: на фундаментной плите P , снабженной тремя установочными винтами, закрепляются четыре колонки, неизменно и прочно скрепленные между собою поперечинами p и продольными связями q , а если окажется нужным, то и кницами по углам, заменяющими диагонали, которые ставить не следует, ибо они мешали бы визированию.

Поперечины p снабжаются прочными захватами r , к которым укрепляются концы подвесных пружин, обделанные подобно тому, как обделываются пружины индикаторов, служащих для снятия диаграмм работы пара в цилиндре паровой машины.



Фиг. 4.

Совершенно такие же захваты ставятся и на колонке посредине между поперечинами для закрепления горизонтальных пружин.

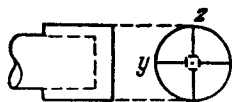
К станку же принадлежит рамка, в которую закрепляется камера, заключающая в себе вполне собранный ротор, статор, подшипники и пр. Эта рамка отливается целиком из легкого металла; горизонтальные ее стороны снабжаются подцапфенниками, в которые зажимаются цапфы камеры (фиг. 4, б). Боковые вертикальные ее стороны снабжаются полыми (с отверстием диаметром около 20 мм) цапфами C и D с закрепами r_1, r_2, r_3, r_4 для вертикальных и с такими же закрепами s_1, s_2, s_3, s_4 для горизонтальных пружин.

Из этой схемы само собою видно, что описанным устройством осуществляется тот способ пружинного подвеса ротора, который

схематически изображен на фиг. 1 и к которому относятся все изложенные здесь расчеты.

Подвесных пружин, которые должны быть строго калиброваны и различной жесткости, изготавливается целый ассортимент, подобно тому, как это делается для индикаторов.

б. *Визирная труба* делается специального устройства, так чтобы при визировании на предмет в расстоянии 50—60 см можно было давать установку окуляру, снабженному микрометром с одной неподвижной и одной подвижной нитью; увеличение самого окуляра должно быть около 20, фокусное расстояние объектива — около 30 см, диаметр объектива — около 50 мм. Труба снабжается позиционным кругом, отсчет до 0.5° . Установка трубы — на штативе или треноге.



Фиг. 5.

в. *Искровой прибор* должен давать весьма яркую искру в тот момент, когда весьма нежный и легкий замыкатель, укрепленный на одном из концов вала ротора, проходит через определенное положение, давая короткий и резкий контакт. Общее устройство искрового прибора подобно тому, которое применяется для фотографирования полета пули, но главная искра должна быть более продолжительной и следовать непрерывно одна за другой при всяком замыкании.

г. *Обыкновенные визирные трубы* со шкалами для зеркального отсчета не требуют описания.

д. *Стробоскоп* должен быть снабжен электрическим мотором, который можно было бы налаживать на то же самое число оборотов, как и ротор, причем это число оборотов должно удерживаться в точности в течение приблизительно 1 мин., чтобы успеть произвести надлежащие отсчеты.

е. Кроме этого, надо изготовить несколько шляпок (муфт), в точности пригнанных к концам валика ротора, на который они плотно надеваются. Днище этих шляпок делается или черным, или матовым. В первом случае на него наносятся два взаимно перпендикулярных строго центрованных ярких штриха (фиг. 5), шириною около 0.02—0.03 мм, из которых один вблизи центра

помечается черточкой. Во втором случае штрихи должны быть черные, ширину около 0.01 мм. Эти штрихи представляют оси Gy и Gz ротора, которым они ставятся параллельно.

§ 8. Наблюдения и измерения, производимые при помощи этих приборов, должны доставить значения величин

$$\alpha_0 \text{ и } \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \rho_0$$

или, точнее говоря, $\frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{1}{\gamma} \rho_0$, а также величины β и r при втором члене формулы (40').

Формулы (8) показывают, что первые члены происходят от орбитального движения центра тяжести ротора, а значит, и общего с ним орбитального движения всей системы, и при настройке „в резонанс“ вторые члены формулы (40') ничтожно малы по сравнению с первыми.

С другой стороны, вторые члены этих формул происходят от вращательных перемещений θ и ψ системы и при l_1 и l_2 малых (3—4 см) линейные перемещения лишь в небольшое (около 4) число раз меньше первых членов, когда *резонанса нет*. При неизменных значениях *угловых* перемещений θ и ψ при помощи „оптических“ рычагов (зеркальный отсчет) линейные перемещения могут быть увеличены против вышеуказанных в сотни раз, причем первые члены на эти перемещения практически не влияют. Эти измерения доставят значения r и β .

Таким образом, измерения сами собою распадаются на две серии, друг от друга не зависящие.

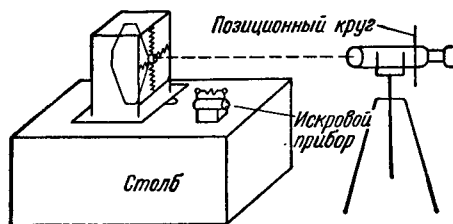
Серия первая. Расположение аппаратов для производства наблюдений этой серии может быть двоякое, смотря по тому, применяется ли искровой прибор, т. е. попеременное мгновенное освещение, или стробоскоп и постоянное освещение.

1. Расположение аппаратов при пользовании искровым прибором показано на фиг. 6, и порядок наблюдений следующий:

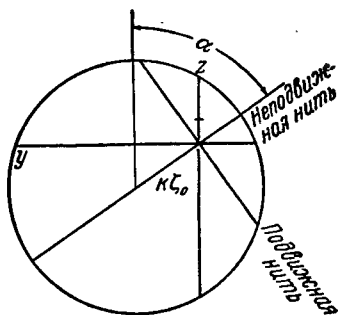
а. Камера с гироскопом подвешивается в станок на избранных для наблюдений пружинах (о выборе пружин см. ниже).

6. Позиционный круг ставят на отсчет 0° , наводят трубу на нить отвеса и, поворачивая трубу около ее продольной оси, приводят неподвижную нить микрометра в совпадение с изображением отвесной линии и закрепляют трубу в ее лагерах.

Ставят подвижную нить микрометра в среднее положение, и при покое ротора наводят образовавшееся перекрестье нитей на центр конца вала и производят отсчет по барабану микрометра.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

в. Выверяют контакт искрового прибора так, чтобы замыкание происходило, когда ось Gz , нанесенная на шляпке, проходит через вертикальное положение, и главная искра проскакивала бы при этом положении.

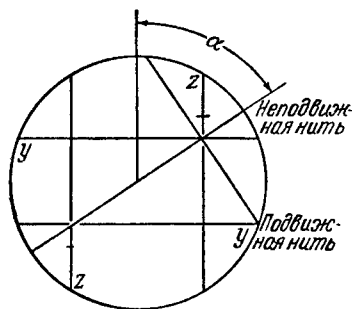
г. Пускают ротор в ход и настраивают число оборотов в резонанс, т. е. на наибольшую вибрацию.

д. Включают искровой прибор, тогда в поле зрения трубы валик будет казаться неподвижным, но центр его — смещенным с перекрестья нитей, ось же Gz будет вертикальна и Gy горизонтальна.

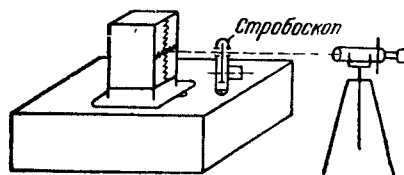
Поворачивают микрометр так, чтобы неподвижная его нить проходила через изображение центра валика, после чего подвижную нить наводят на центр валика, тогда в поле зрения трубы получится картина, представленная на фиг. 7. Производят отсчет по позиционному кругу — это будет начальная фаза α_0 , отсчет же по барабану будет пропорционален величине ρ_0 .

Чтобы учесть этот коэффициент пропорциональности и влияние сопротивления, укрепляют на роторе в определенной точке, например в конце оси z , точно взвешенный грузик. Приводят в резонанс, определяют новое значение фазы α' и отсчета по барабану, после чего легко находится величина γ и влияние сопротивления на изменение фазы, т. е. поправка в фазе.

Это наблюдение можно производить и несколько иначе, если при каждом обороте ротора полу-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

чать не одну искру, а две, т. е. в моменты прохождения оси Gz через верхнее и через нижнее вертикальные положения, тогда в поле зрения трубы будет дано два симметрично расположенных изображения конца валика, как показано на фиг. 8. Обмеры этих положений очевидны и пояснений не требуют. Способ этот предпочтительнее, ибо при нем исключается влияние смещения трубы с первоначальной ее наводки на центр валика и наводка точнее.

2. Расположение приборов при наблюдении стробоскопом показано на фиг. 9. Здесь картина, получаемая в поле зрения трубы, будет иная, именно ось Gz не будет направлена вертикально.

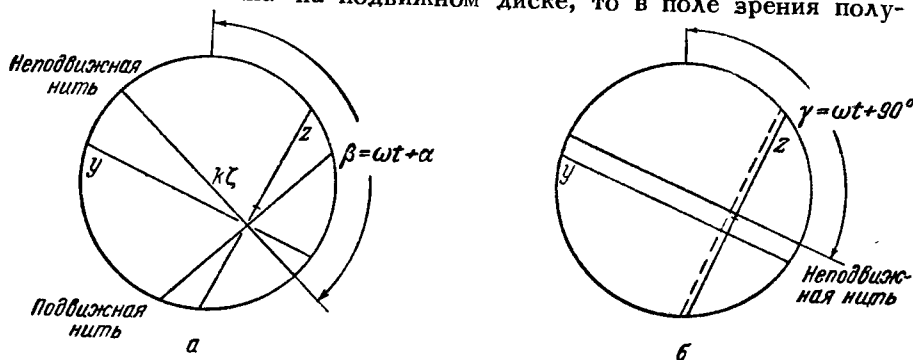
Измерение здесь надо производить в два приема, а именно:

а. Повернуть микрометр так, чтобы неподвижная его нить проходила через изображение центра валика, после чего навести подвижную нить на эту точку и произвести отсчеты по барабану (это даст $k\rho$) и по позиционному кругу, что даст величину $\beta = \omega t + \alpha$ (фиг. 10, а).

6. Повернуть микрометр так, чтобы подвижная нить стала параллельно оси Gz , произвести отсчет по позиционному кругу, что даст величину $\gamma = \omega t + 90^\circ$ (фиг. 10, б). По отсчетам β и γ начальная фаза α находится по формуле

$$\alpha = 90^\circ + \beta - \gamma$$

Если в стробоскопе сделать не одно, а два диаметрально противоположных окна на подвижном диске, то в поле зрения полу-



Фиг. 10.

чатся два изображения, симметрично расположенных, как показано на фиг. 11. Производство обмера само собой понятно.

Примечание. Если в устройстве искрового прибора или в синхронизации стробоскопа встретится затруднение, то можно воспользоваться неоновой лампой, дающей при каждом контакте вспышку.

Серия вторая. Для производства наблюдений этой серии к камере или к несущей ее рамке прикрепляют два небольших зеркала, причем плоскость одного из них устанавливается перпендикулярно к оси $G_0\eta$, другого — перпендикулярно к оси $G_0\zeta$; так, при нормальном положении плоскость первого зеркала вертикальна, второго — горизонтальна.

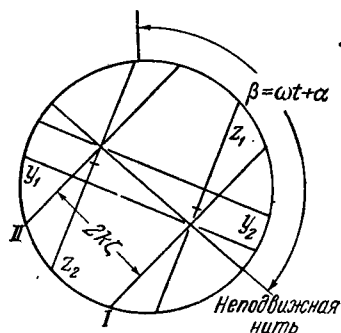
Первое зеркало будет показывать углы поворотов около оси ζ , т. е. углы ψ , второе будет показывать повороты около оси η ,

т. е. углы θ , иными словами, будут получаться показания, пропорциональные второму члену формул (40') в значительно увеличенном виде, т. е. величины

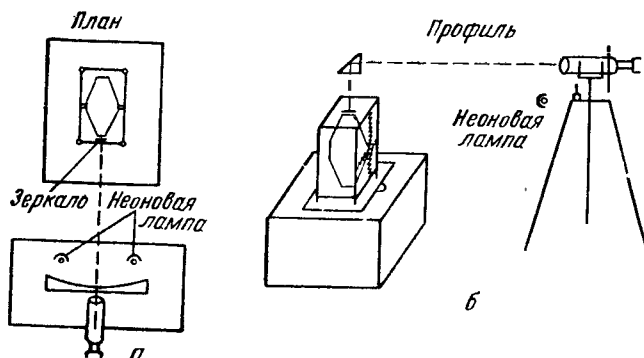
$$S_1 \cos(\omega t + \beta) \text{ и } S_1 \sin(\omega t + \beta)$$

так что все дело опять приведено к измерению амплитуд и фаз.

Расположение приборов показано на рис. 12, а и б. Здесь удобнее пользоваться искровым прибором или неоновой лампой, которыми будет освещаться шкала в моменты прохождения оси Gz через верхнее или нижнее положение или через то и другое, сделав два диаметрально противоположных контакта, т. е. шкала будет освещаться или в моменты, когда $\omega t = 2k\pi$, где k — любое целое число, или в моменты, когда $\omega t = k\pi$.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Таким образом, первое зеркальце доставит величину, пропорциональную $S_1 \cos \beta$, второе зеркальце — величину, пропорциональную $S_1 \sin \beta$, причем коэффициенты пропорциональности опреде-

ляются геометрически, по соответствующим обмерам расположения зеркал и шкал, значит, вторые члены в уравнениях (40) будут известны, а по ним найдутся I_{xy} и I_{xz} .

Фазовый угол β может быть получен и независимо от расчетных данных и геометрических обмеров следующим образом. Возьмем наблюдения по первому зеркальцу и, убрав искровой прибор или неоновую лампу, будем освещать шкалу обыкновенной лампой; тогда, ведя по шкале указатель и визируя в трубу, легко измерить элонгацию, которая и доставит величину S_1 , а значит, по сопоставлению с первым наблюдением получим $\cos \beta$ независимо от коэффициента пропорциональности. Совершенно так же по показаниям второго зеркальца найдем $\sin \beta$, — отсюда угол β .

Величины I_{xy} и I_{xz} нужны нам, чтобы рассчитать величину и координаты добавочных грузиков, которые надо присоединить к ротору, чтобы уравновесить его; но после того как фазовые углы α_0 и β определены, гораздо проще, а главное надежнее, чем пользоваться расчетными данными, определить положение и вес этих грузиков чисто экспериментальным путем.

В самом деле, настроив вибрацию в резонанс, вынимаем ротор и, отметив на нем радиус, соответствующий фазовому углу α_0 , наклеиваем в избранном месте этого радиуса кусочек воска и затем подбираем вес этого кусочка так, чтобы вибрация при резонансе исчезала; определив вес этого кусочка воска, заменяем его постоянным грузиком.

Совершенно так же, изменив число оборотов так, чтобы резонанса не было, приклеиваем к ротору кусочек воска на радиусе с фазовым углом β , подгоняем его вес так, чтобы вибрация исчезла.

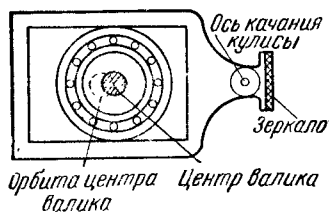
Чтобы не разбирать постоянно камеры, надо к самой рамке укрепить концевые подшипники ротора и статор.

§ 9. Нетрудно видеть, что применением зеркальных отсчетов (оптический рычаг) может быть достигнуто увеличение линейных перемещений в 500 и 1000 раз, тогда как настройкой в резонанс едва ли удастся достигнуть увеличения более чем в 50 раз по причине, указанной в § 6, и сам собою является вопрос, нельзя ли

для определения величин η_0 и ζ_0 соединить оба метода, т. е. настройки в резонанс и зеркальных отсчетов.

Возможность к этому создается соединением методы, механического и оптического увеличения.

В самом деле, положим, что на конец валика вместо шляпки надет весьма тщательно изготовленный шариковый подшипник (в подшипниках гироскопических люфт меньше $1/2000$ мм). Ясно, что орбитальное движение центра C валика около среднего его положения O совершенно подобно движению центра эксцентрика, скажем золотниковой тяги паровой машины, значит, он сейчас же преобразуется в попеременно-возвратное движение, а это последнее — в колебательное движение зеркала по схеме, изображенной на фиг. 13, соответствующей простейшему эксцентриковому механизму, причем очевидно, что зеркало будет совершать колебательное движение около центра вращения кулисы.



Фиг. 13.

Способ наблюдений с искровым прибором или неоновой лампой описан выше.

§ 10. Мы предполагали в наших выводах, что величина $I_{yz} = 0$, и у нас решена задача о малых колебаниях такого тела, у которого главные моменты инерции суть A, B, B , и все три центробежных момента $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, нам же надо теперь рассмотреть движение такого тела, у которого $I_{xy} = I_{xz} = 0$, центробежный же момент I_{yz} не равен нулю, а есть весьма малая величина по сравнению с B , которую мы обозначим через ε , так что

$$I_{yz} = \varepsilon$$

В первом случае живая сила была

$$2T = Ap + Bq + Br^2$$

и уравнения вращательного движения были

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= M_x = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - B)pr &= M_y = \sum (zX - xZ) \\ B \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z = \sum (xY - yX) \end{aligned} \quad (41')$$

и нами получены решения этих уравнений, которые мы обозначим так:

$$\begin{aligned} p &= p_0 = \omega \\ q &= q_0(t); \quad r = r_0(t) \end{aligned} \quad (42')$$

Во втором случае живая сила будет

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Br^2 - 2\epsilon qr \quad (43)$$

и нам надо рассмотреть движение такого тела.

Уравнения движения составляются по следующей схеме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial p} \right) + q \frac{\partial T_1}{\partial r} - r \frac{\partial T_1}{\partial q} &= M_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial q} \right) + r \frac{\partial T_1}{\partial p} - p \frac{\partial T_1}{\partial r} &= M_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + p \frac{\partial T_1}{\partial q} - q \frac{\partial T_1}{\partial p} &= M_z \end{aligned} \quad (44)$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + \epsilon(r^2 - q^2) &= M_x \\ B \frac{dq}{dt} + (A - B)pr + \epsilon \left(pq - \frac{dr}{dt} \right) &= M_y \\ B \frac{dr}{dt} + (B - A)pq - \epsilon \left(pr + \frac{dq}{dt} \right) &= M_z \end{aligned} \quad (45)$$

Так как при $\epsilon = 0$ должно быть

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0 \quad (46)$$

причем p_0 , q_0 , r_0 нам известны, то полагаем

$$p = p_0 + \frac{\varepsilon}{B} p_1; \quad q = q_0 + \frac{\varepsilon}{B} q_1; \quad r = r_0 + \frac{\varepsilon}{B} r_1 \quad (47)$$

(делитель B введен для того, чтобы p_1 , q_1 , r_1 представляли угловые скорости так же, как p , q , r) и определяем p_1 , q_1 , r_1 так, чтобы величины (47) удовлетворяли уравнениям (45); ограничиваясь в них членами первого порядка относительно ε , мы применим для решения этого вопроса метод разыскания возмущенного движения.

В соответствии с выражениями (47) мы положим

$$\theta = \theta_0 + \frac{\varepsilon}{B} \theta_1; \quad \psi = \psi_0 + \frac{\varepsilon}{B} \psi_1$$

и, заметив, что выражения M_y и M_z суть функции θ и ψ , притом линейные, мы положим

$$M_y = M_y^0 + \frac{\varepsilon}{B} M_y'; \quad M_z = M_z^0 + \frac{\varepsilon}{B} M_z'$$

так что M_y^0 и M_z^0 получаются, если заменить в выражениях M_y и M_z буквы θ и ψ на θ_0 и ψ_0 , и величины M_y' и M_z' получатся, если заменить в тех же выражениях θ и ψ на θ_1 и ψ_1 . То же относится и к выражениям M_η и M_ζ , даваемым формулой (19').

Таким образом, по подстановке и упрощении, удерживая лишь члены, содержащие ε в первой степени, получим:

$$A \frac{dp_0}{dt} + \varepsilon \left[\frac{A}{B} \cdot \frac{dp_1}{dt} + r_0^2 - q_0^2 \right] = 0$$

$$B \frac{dq_0}{dt} + (A-B)p_0 r_0 - M_y^0 + \varepsilon \left[\frac{dq_1}{dt} + \frac{A-B}{B} (p_1 r_0 + r_1 p_0) + p_0 q_0 - \frac{dr_0}{dt} - \frac{M_y'}{B} \right] = 0 \quad (48)$$

$$B \frac{dr_0}{dt} + (B-A)p_0 q_0 - M_z^0 + \varepsilon \left[\frac{dr_1}{dt} + \frac{B-A}{B} (p_1 q_0 + q_1 p_0) - p_0 r_0 - \frac{dq_0}{dt} - \frac{M_z'}{B} \right] = 0$$

Но ввиду того, что $p = p_0 = \omega$, $q = q_0$, $r = r_0$ суть решения уравнений (41'), члены, не содержащие множителя ε , равны нулю, так что первое уравнение (48) будет

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{dp_1}{dt} + r_0^2 - q_0^2 = 0$$

но величины q_0 и r_0 суть малые того же порядка, как ϵ , поэтому это уравнение будет

$$\frac{dp_1}{dt} = 0 \quad (49)$$

откуда следует¹

$$p_1 = 0$$

и два последние уравнения будут

$$\begin{aligned} B \frac{dq_1}{dt} + (A - B) \omega r_1 &= M'_y + B \left(\frac{dr_0}{dt} - \omega q_0 \right) \\ B \frac{dr_1}{dt} + (B - A) \omega q_1 &= M'_z + B \left(\frac{dq_0}{dt} + \omega r_0 \right) \end{aligned} \quad (50)$$

Сделаем

$$\frac{dr_0}{dt} - \omega q_0 = F(t); \quad \frac{dq_0}{dt} + \omega r_0 = H(t)$$

Очевидно, что если бы этих членов не было, то уравнения (50) были бы совершенно одинаковы с уравнениями (14), и из них получили бы, поступая подобно тому, как в § 3, уравнения

$$\begin{aligned} B\theta''_1 + A\omega\psi'_1 &= M'_\zeta \\ B\psi''_1 - A\omega\theta'_1 &= M'_\zeta \end{aligned} \quad (50')$$

подобные уравнениям (19).

¹ Здесь может представиться такое возражение: величины q_0^2 и r_0^2 будут заключать не просто множитель s^2 , который мал, но и множитель ω^2 , который весьма велик, так что произведение этих множителей может быть и большим. Но здесь надо иметь в виду следующее обстоятельство: указанный множитель $\omega^2 s^2$ умножается на линейную функцию с коэффициентом нулевого порядка относительно ω , синусов и косинусов аргументов разной кратности ωt . По интегрировании во все члены войдет делитель ω , так что p_1 будет представляться произведением ωs^2 на упомянутую периодическую функцию. Величина p_1 нам нужна лишь для составления членов в квадратных скобках второго и третьего уравнений (48), а здесь наряду с членами $p_1 r_0$ и $p_1 q_0$, содержащими множитель $\omega^2 s^2$, стоят члены $p_0 q_0$ и $p_0 r_0$, содержащие множитель $\omega^2 s$. Величина s есть весьма малое отвлеченное число, значит, члены $p_1 r_0$ и $p_1 q_0$ будут весьма малы по сравнению с $p_0 q_0$ и $p_0 r_0$ и могут быть отброшены, а это равносильно тому, чтобы положить $p_1 = 0$.

Но

$$M'_1 = \frac{\partial M_1}{\partial \theta} \theta_1 + \frac{\partial M'_1}{\partial \psi} \psi_1 = -(I_1^2 k_1 + I_2^2 k_2) = -n^2 \theta_1$$

$$M'_2 = \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \theta_1 + \frac{\partial M_2}{\partial \psi} \psi_1 = -(I_1^2 h_1 + I_2^2 h_2) = -n^2 \psi_1$$

Мы имели формулы (29), которые дают

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} s \sin(\omega t + \alpha) \\ \psi_0 &= \frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} s \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (29')$$

и которые следуют из уравнения (27). Здесь надо обратить внимание на то обстоятельство, что хотя в уравнениях (27) правые части — второго порядка относительно ω , в уравнениях (29') они нулевого порядка, и при возрастании ω коэффициенты приближаются к определенному конечному пределу.

На основании формул (15) и (16) мы видим, что выражения $F(t)$ и $H(t)$ будут вида

$$F(t) = \omega^2 s F_1(t); \quad H(t) = \omega^2 s H_1(t)$$

причем $F_1(t)$ и $H_1(t)$ суть функции, представляющие суммы членов с коэффициентами нулевого порядка относительно ω при синусах и косинусах разных аргументов.

Подобные же выражения мы получим и для величин

$$\begin{aligned} F(t) \cos \omega t - H(t) \sin \omega t \\ F(t) \sin \omega t + H(t) \cos \omega t \end{aligned}$$

которые прибавляются к правым частям уравнений (49). Обозначим эти величины через

$$\omega^2 s F_2(t) \text{ и } \omega^2 s H_2(t)$$

Функции $F_2(t)$ и $H_2(t)$ будут состоять из суммы членов периодических с коэффициентами нулевого порядка относительно ω , и для определения θ_1 и ψ_1 мы получим уравнения вида

$$\theta_1'' + n^2\theta_1 + f\omega\psi_1' = \omega^2 s F_2(t)$$

$$\psi_1'' + n^2\psi_1 - f\omega\theta_1' = \omega^2 s H_2(t)$$

Решения этих уравнений будут вида

$$\theta_1 = s F_3(t)$$

$$\psi_1 = s H_3(t)$$

причем функции $F_3(t)$ и $H_3(t)$ — того же вида, как $F_2(t)$ и $H_2(t)$, т. е. периодические и нулевого порядка относительно ω .

Отсюда следует, что „возмущения“

$$\frac{\varepsilon}{B} \theta_1 \text{ и } \frac{\varepsilon}{B} \psi_1$$

будут *второго* порядка, ибо величина s есть малая того же порядка, как $\frac{\varepsilon}{B}$, и по своей малости эти возмущения будут вне пределов не только достижимой точности наблюдений и изготовления самого ротора, но даже и изготовления шариковых подшипников его, значит, эти возмущения могут быть отброшены, а это равносильно тому, чтобы в выражении живой силы (43) положить $\varepsilon = 0$, иначе $I_{yx} = 0$, как это и сделано в нашей статье.

§ 11. В предыдущих параграфах рассмотрен самый общий случай устройства приспособлений для уравнивания роторов на основе наблюдений таких колебаний, при которых ротор обладает всеми *шестью* степенями свободы. Очевидно, что можно вообразить бесчисленное множество таких приспособлений, где число степеней свободы будет меньше шести, — все они явятся частными случаями рассмотренного.

Дадим ряд примеров, поясняющих сущность дела.

1. Положим, что ротор может колебаться только в горизонтальной плоскости, следовательно, при всяком значении времени t будет

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 0 \\ \theta_0 &= 0\end{aligned}$$

чтобы перейти от общих уравнений к этому частному случаю, стоит только вообразить, что жесткость вертикальных пружин бесконечно большая, но что пружины эти не препятствуют движению в горизонтальной плоскости, т. е. что $k_1 = \infty$; $k_2 = \infty$. Величины же h_1 и h_2 — конечные, иными словами, надо принять, что $k_1 = K_1$ и $k_2 = K_2$, причем величины K_1 и K_2 неопределенно возрастают *независимо одна от другой*, величины же h_1 и h_2 сохраняют свои постоянные конечные значения.

В этом случае надо исходить из общих уравнений (13) и (20), которые будут

$$\xi_0'' + kg\xi_0 = 0$$

$$\left. \begin{aligned}\zeta_0 &= 0 \\ \theta_0 &= 0\end{aligned} \right\} \text{ по условию}$$

$$M_1 \eta_0'' + (h_1 + h_2) \eta_0 + (h_2 l_2 - h_1 l_1) \psi = \omega^2 m p \cos(\omega t + \alpha)$$

$$B_2 \psi'' - (h_1 l_1 - h_2 l_2) \eta_0 + (h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2) \psi = \omega^2 m p a \cos(\omega t + \alpha)$$

Эти уравнения, очевидно, упрощаются, если взять (21)

$$h_1 l_1 - h_2 l_2 = 0$$

так что будет (24)

$$h_1 + h_2 = \frac{h_1 l}{l_2}$$

Положив, как в уравнениях (26),

$$\frac{h_1 l_1}{M_1 l_2} = \lambda^2; \quad \frac{m}{M_1} = \mu_1$$

$$\frac{h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2}{B_2} = \frac{h_1 l_1 l}{B_2} = n^2; \quad \frac{m p a}{B_2} = s$$

мы получим уравнения

$$\eta_0'' + \lambda^2 \eta_0 = \omega^2 \mu_1 \rho \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\psi'' + \pi^2 \psi = \omega^2 s \cos(\omega t + \alpha)$$

пренебрегая по-прежнему сопротивлением; отсюда, как и раньше, следует

$$\xi = 0$$

$$\eta_0 = \frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\psi = \frac{\omega^2}{\pi^2 - \omega^2} s \cos(\omega t + \alpha)$$

так что будет для концов валика

$$\eta_1 = \left(\frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho - \frac{\omega^2}{\pi^2 - \omega^2} L_1 s \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\eta_2 = \left(\frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho + \frac{\omega^2}{\pi^2 - \omega^2} L_2 s \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

т. е. концы валика совершают простое гармоническое колебание с различной амплитудой, но одинаковой фазой.

От одной массы m с координатами

$$a, \rho \sin \alpha = b \quad \text{и} \quad \rho \cos \alpha = c$$

сейчас же переходим к случаю любого числа масс

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$$

с координатами

$$(a_1, \rho_1, \alpha_1); (a_2, \rho_2, \alpha_2); \dots; (a_k, \rho_k, \alpha_k)$$

иначе

$$(a_1, b_1, c_1); (a_2, b_2, c_2); \dots; (a_k, b_k, c_k)$$

и, заметив, что

$$s = \frac{1}{B_2} m \rho a \quad \text{и} \quad \mu_1 = \frac{m}{M_1}$$

так что

$$s \sin \alpha = \frac{1}{B_2} mba$$

$$s \cos \alpha = \frac{1}{B_2} mca$$

мы получим, подобно тому, как в § 4:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} c_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_1 \right] \cos \omega t - \\ &\quad - \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_1 \right] \sin \omega t \\ \eta_2 &= \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} c_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_2 \right] \cos \omega t - \\ &\quad - \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_2 \right] \sin \omega t \end{aligned}$$

Здесь необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства.

а. Резонанс здесь имеет место не только, когда $\omega^2 \approx \lambda^2$, но и при другой угловой скорости, именно, когда $\omega^2 \approx n^2$. В первом случае достигает значительной величины поступательное колебание центра тяжести, во втором случае — вращательное.

б. Если наблюдения производить с искровым прибором или неоновой лампой и замыкание производить в те моменты, когда ось z проходит через вертикальное положение, т. е. когда фаза $\omega t = 2k\pi$ (k — целое число), то будет

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0 c_0}{M_1} - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_1 \\ \eta_2 &= \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0 c_0}{M_1} + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_2 \end{aligned}$$

Значит, настроив в резонанс $\lambda^2 \approx \omega^2$, получим по наблюдению величину, пропорциональную $m_0 c_0$; если же настроить в резонанс $n^2 \approx \omega^2$, то получим величину I_{xz} .

в. Если замыкание искрового прибора или неоновой лампы производить, когда ось z проходит через горизонтальное положение, т. е. когда

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

то будет $\cos \omega t = 0$ и $\sin \omega t = 1$, мы будем измерять величины

$$\eta_1 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_1$$

$$\eta_2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_2$$

причем настройкой в резонанс можем наблюдать каждое из слагаемых в отдельности и получим величины, пропорциональные $m_0 b_0$ и I_{xy} , т. е. все то, что дает и прибор с шестью степенями свободы.

Для определения или исключения коэффициентов пропорциональности надо повторить наблюдения, прикрепив к ротору в данном месте известный точно взвешенный грузик. Этот прием „пользования вспомогательным грузиком“ подробнее изложен ниже.

Схема прибора настолько очевидна, что нет надобности ее здесь приводить.

2. Устраним еще две степени свободы, установив такие связи:

$$\xi_0 = 0 \quad \text{и} \quad \eta_0 - l_1 \psi = 0$$

что соответствует тому, что ротор со своей камерой может только поворачиваться около вертикальной оси, проходящей через подшипник A_1 . Здесь проще, не вводя неизвестной реакции связи, сразу написать очевидное уравнение движения

$$(B_2 + M_1 l_1^2) \psi'' + h_2 l_1^2 \dot{\psi} = \omega^2 m r (a + l_1) \cos(\omega t + \alpha)$$

Полагая

$$B_2 + M_1 l_1^2 = B_3; \quad \frac{h_2 l_1^2}{B_3} = n_2^2$$

имеем уравнение

$$\ddot{\psi} + n_2^2 \psi = \frac{\omega^2 l_1}{B_3} m p \cos(\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{B_3} m p a \cos(\omega t + \alpha)$$

и вынужденные колебания будут

$$\psi = \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{l_1}{B_3} m p \cos(\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{m p a}{B_3} \cos(\omega t + \alpha)$$

Подобно предыдущему для случая многих масс получим:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{l_1}{B_3} [m_0 c_0 \cos \omega t - m_0 b_0 \sin \omega t] + \\ & + \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \left[\frac{I_{xx}}{B_3} \cos \omega t - \frac{I_{xy}}{B_3} \sin \omega t \right] \end{aligned}$$

Наблюдая с помощью зеркальных отсчетов и искрового прибора угол ψ в моменты, когда $\omega t = 2k\pi$ и когда

$$\omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

получим величины, пропорциональные значениям

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{B_3} [l_1 m_0 c_0 + I_{xx}]$$

и

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{B_3} [l_1 m_0 b_0 + I_{xy}]$$

Наблюдение наибольшего отклонения дает значение, пропорциональное количеству

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{B_3} [(l_1 m_0 c_0 + I_{xx})^2 + (l_1 m_0 b_0 + I_{xy})^2]^{1/2}$$

Как видно, мы получаем лишь комбинации

$$(l_1 m_0 c_0 + I_{xx}) \quad \text{и} \quad (l_1 m_0 b_0 + I_{xy})$$

неизвестных, а не сами величины

$$m_0 c_0, \quad m_0 b_0, \quad I_{xz}, \quad I_{xy}$$

в отдельности, вместе с тем и коэффициент пропорциональности нельзя считать точно известным, ибо если учитывать сопротивление, то более точное выражение этого коэффициента пропорциональности содержит не множитель

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2}$$

а множитель

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{n_2^2}{\omega^2}\right) + \gamma^2 \frac{n_2^2}{\omega^2}}}$$

причем величина γ неизвестна и может быть определена на основании наблюдений колебаний, когда к ротору прикреплен известный добавочный грузик в заданном месте.

Так что эти уравнения будут вида

$$\begin{aligned} l_1 m_0 c_0 + I_{xz} + \frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \cos \alpha_i &= K E_i \\ l_1 m_0 b_0 + I_{xy} + \frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \sin \alpha_i &= K F_i \end{aligned} \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots, 7)$$

где K есть пока неизвестный коэффициент пропорциональности, E_i и F_i — наблюдаемые величины.

Таким образом, у нас получатся две группы уравнений, по восемь уравнений в каждой.

Первая группа будет

$$\begin{aligned} (l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) - K E_0 &= -\frac{q}{g} l_1 \rho - \frac{q}{g} a \rho \\ (l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) - K E_1 &= -\frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \cos 45^\circ \\ &\dots \dots \dots \\ (l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) - K E_7 &= -\frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \cos 315^\circ \end{aligned} \quad (I)$$

Вторая группа будет

$$\begin{aligned}
 (l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_0 &= 0 \\
 (l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_1 &= -\frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \sin 45^\circ \\
 &\dots \dots \dots \\
 (l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_7 &= -\frac{q}{g} (l_1 + a) \rho \sin 315^\circ
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

Решение этих уравнений по методу наименьших квадратов даст значения

$$(l_1 m_0 c_0 + I_{xz}); (l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) \text{ и } K$$

Величина K в нашем вопросе непосредственного интереса не представляет и дает лишь суждение о сопротивлении, считая его пропорциональным угловой скорости ψ' , нам же нужны в отдельности значения $m_0 c_0$, $m_0 b_0$, I_{xz} , I_{xy} .

Эти значения мы можем получить, повторив всю серию наблюдений, произведя качания около вертикальной же оси, но не проходящей через точку A_1 ; проще всего перенести ось так, чтобы она проходила через точку G_0 , тогда в предыдущих уравнениях надо положить $l_1 = 0$, и мы получим системы

$$\begin{aligned}
 I_{xz} - K_1 E'_0 &= -\frac{q}{g} a \rho \\
 I_{xz} - K_1 E'_1 &= -\frac{q}{g} a \rho \cos 45^\circ \\
 &\dots \dots \dots \\
 I_{xz} - K_1 E'_7 &= -\frac{q}{g} a \rho \cos 315^\circ
 \end{aligned}
 \tag{I'}$$

и

$$\begin{aligned}
 I_{xy} - K_1 F'_0 &= 0 \\
 I_{xy} - K_1 F'_1 &= -\frac{q}{g} a \rho \sin 45^\circ \\
 &\dots \dots \dots \\
 I_{xy} - K_1 F'_7 &= -\frac{q}{g} a \rho \sin 315^\circ
 \end{aligned}
 \tag{II'}$$

Решение этих уравнений по методу наименьших квадратов доставит значения I_{xz} и I_{xy} , так что вместе с предыдущими мы получим все величины, нужные для расчета компенсационных грузов и их положения.

Для получения же таких уравнений, которые давали бы возможность находить величины $m_0 c_0$, $m_0 b_0$, I_{xz} , I_{xy} в отдельности, надо применять прием переноса оси вращения.

Для ясности изложим эти приемы подробнее. Положим, что взят точно взвешенный грузик q , масса которого $\frac{q}{g}$, и укреплен на роторе в точке (размерами грузика пренебрегаем), координаты которой a , b , c , причем эти величины известны по обмерам, тогда упомянутые выше наблюдения углов ψ доставят значения, пропорциональные количествам

$$\frac{1}{B_3} \cdot \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \left[(l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) + \frac{q}{g} (l_1 + a) c \right]$$

и

$$\frac{1}{B_3} \cdot \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \left[(l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) + \frac{q}{g} (l_1 + a) b \right]$$

Понятно, что, помещая грузик в разных местах, мы можем получить таких уравнений сколько угодно.

Практически удобно поступать следующим образом: на одной из торцевых поверхностей ротора, для которой координата a обмеряется, чертится круг заданного радиуса ρ и, начиная от оси z , разделяется на несколько равных частей (скажем, 8); соответствующие этим точкам деления углы при центре (считая их от оси z к оси y) будут

$$0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$$

Координата a для всех точек деления одна и та же; координаты c и b будут соответственно $c = \rho \cos \alpha_i$, $b = \rho \sin \alpha_i$, где α_i принимает одно из вышеуказанных значений, сообразно тому, в которой из точек укрепляется грузик q .

Каждая пара наблюдений доставит два уравнения, из которых одно содержит неизвестные $l_1 m_0 c_0 + I_{xz}$, другое — неизвестные $l_1 m_0 b_0 + I_{xy}$.

3. Положим, что вибрационный прибор устроен так, что колебания происходят около горизонтальной оси, проходящей через точку A_1 , в точке же A_2 ставится вертикальная пружина, жесткость которой есть k_z .

В этом случае будет

$$\zeta_0 = -l_1 \theta$$

и уравнение движения будет

$$(B_4 + l_1^2 M_1) \theta'' + kl^2 \theta = -\omega^2 m p (a + l_1) \sin(\omega t + \alpha)$$

Очевидно, что решение этого уравнения будет подобно предыдущему, а значит, и наблюдения и их обработка будут подобны рассмотренным, так что повторять их описание нет надобности.

§ 12. Само собою разумеется, что можно изменять устройство вибрационных приборов на множество различных манеров, теория их действия сейчас же получится из общей теории, здесь изложенной.

На основании этой теории и рассмотренных примеров тотчас же устанавливаются способы наблюдений и обработки их результатов, нетрудно также применительно к каждому частному случаю спроектировать наиболее подходящий прибор.

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОДОЛГОВАТОГО СНАРЯДА.

Меткость стрельбы всецело зависит от правильности полета снаряда, правильность же полета обеспечивается правильностью того вращательного движения, которое сообщается снаряду нарезами.

В настоящей статье дается решение вопроса о вращательном движении снаряда и на численном примере показывается, каким образом вычислить движение оси снаряда по отношению к касательной к траектории его центра тяжести. Приведение этого вопроса к вычислению вносит полную определенность в производство необходимых для установления всякого нового типа снаряда опытов и в выработку таблиц стрельбы пристрелкою, избавляя, таким образом, от излишней траты снарядов, стоимость которых для современных орудий весьма высока.

Статья эта представляет извлечение из намеченной к изданию Научно-техническим комитетом Морских сил СССР книги автора, посвященной подробному изучению поставленного вопроса. В этой книге дается вместе с тем критический обзор главнейших работ, относящихся к этому предмету, почему в этой статье ни этого обзора, ни ссылок на литературу предмета не приводится.

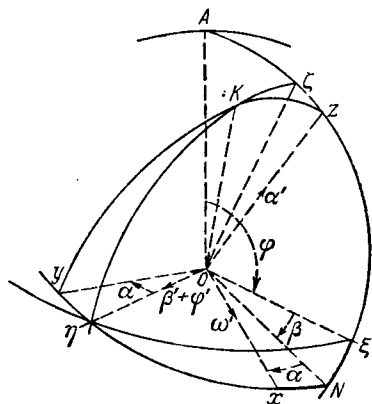
§ 1. По почину Маиевского, положение оси снаряда в любой момент времени относительно касательной к траектории определяется двумя углами δ и γ , из которых первый, который мы будем называть углом *нутаии*, есть угол между касательной и осью

снаряда, второй угол, который мы будем называть углом *прецессии*, есть угол между вертикальною плоскостью стрельбы (траектория центра тяжести снаряда предполагается плоской) и плоскостью, проведенной через касательную и ось. Этот выбор углов перешел от Маиевского в большую часть руководств по внешней баллистике и удержался и поныне.

При правильном полете снаряда угол нутации для настильных траекторий вообще не велик (не более $10-12^\circ$), но понятно, что угол прецессии изменяется или в круговую, или в широких пределах, что составляет значительное неудобство при аналитическом рассмотрении вопроса, ибо всегда выгодно иметь в уравнениях дело с такими неизвестными, для которых заранее можно наметить тесные пределы изменчивости. Ввиду этого мы для определения положения оси снаряда из-

берем углы α и β следующим образом: угол α (фиг. 1) есть угол между осью снаряда в какой-либо момент времени t и плоскостью стрельбы, угол β есть угол между касательной к траектории центра тяжести снаряда и проекцией оси его на плоскость стрельбы.

Чтобы составить уравнения вращательного движения снаряда, которое нас только и интересует, берем, как обыкновенно, вспомогательную сферу и пусть большой круг $oA\xi N$ (фиг. 1) этой сферы соответствует плоскости стрельбы, пусть радиус $o\xi$ параллелен касательной к траектории центра тяжести снаряда в рассматриваемый момент, oA отвесная линия; положение касательной $o\xi$ определяется углом $Ao\xi = \varphi$, который можно считать заданной (таблично или графически) функцией времени t , известной из вычисления траектории центра тяжести снаряда, затем берем связанные с касательной оси: $o\xi$, лежащую в плоскости стрельбы, и $o\eta$, перпендикулярную к этой плоскости. Таким образом, мы получаем



Фиг. 1.

в пространстве систему осей координат $\zeta o \xi \eta$. В самом снаряде берем за ось ox его ось симметрии, которую мы для краткости именуем просто осью снаряда, за плоскость $хоу$ берем плоскость, проведенную через ox перпендикулярно к плоскости $\zeta o \xi$, очевидно, что эта плоскость будет постоянно проходить через ось $o\eta$; прямую ее пересечения с плоскостью $\zeta o \xi$ обозначим через oN , в плоскости $хоу$ берем ось ou перпендикулярно к ox ; и, наконец, ось oz , перпендикулярная к плоскости $хоу$, будет лежать в плоскости $\zeta o \xi$. Обе системы осей координат выбираем так, чтобы счет углов совершался по часовой стрелке (левые оси).

Очевидно, что оси $хоу$ будут осями, не только подвижными по отношению к осям $\xi o \zeta \eta$, но и в самом снаряде. Так как снаряд есть тело вращения около своей оси ox , то как эта ось, так и оси ou и oz суть его главные оси инерции, какое бы положение две последние оси ни занимали в своей плоскости.

Момент инерции относительно оси ox обозначим через A , моменты же инерции относительно осей ou и oz , равные между собою, обозначим через B .

Положение оси ox определяется углом $Nox = \alpha$ и углом $o\xi N = \beta$, собственное вращение снаряда около оси ox — углом ω , который будет входить в наши уравнения лишь своею производною ω' .

§ 2. Заметив, что при всяких значениях углов α и β угол

$$\xi Nx = \frac{\pi}{2}$$

получаем следующую таблицу косинусов углов между осями:

	x	y	z
ξ	$\cos \alpha \cos \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
η	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
ζ	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \beta$

Обозначая через α' , β' , ω' , φ' производные по времени углов α , β , ω и φ , получаем следующие выражения проекций угловой скорости:

$$\begin{aligned} \text{на ось } ox & \quad p = \omega' + (\beta' + \varphi') \sin \alpha \\ \text{на ось } oy & \quad q = (\beta' + \varphi') \cos \alpha \\ \text{на ось } oz & \quad r = \alpha' \end{aligned}$$

соответственно коим живая сила вращательного движения снаряда будет

$$2T = A[\omega' + (\beta' + \varphi') \sin \alpha]^2 + B(\beta' + \varphi')^2 \cos^2 \alpha + B\alpha'^2 \quad (1)$$

Из сил, действующих на снаряд, лишь сопротивление воздуха дает так называемую опрокидывающую пару, изображаемую вектором OK , перпендикулярным к плоскости $хо\xi$ и равным, согласно Маиевскому:

$$K = hR\rho \sin \delta$$

причем h есть постоянный для данного типа снаряда численный множитель, R — полукалибр снаряда, ρ — сопротивление воздуха, рассчитываемое в зависимости от скорости движения центра тяжести снаряда при вычислении траектории его; таким образом, ρ есть слагающая сопротивления воздуха по касательной к траектории.

Мы уже упоминали, что угол

$$\delta = \xi_{ox}$$

так что

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta \quad (1')$$

Элементарная работа пары K есть

$$Kd\delta = hR\rho \sin \delta d\delta$$

но из формулы (1') следует

$$\sin \delta d\delta = \cos \beta \sin \alpha d\alpha + \cos \alpha \sin \beta d\beta$$

следовательно, в выражении элементарной работы

$$dU = Q_1 d\alpha + Q_2 d\beta \quad (2)$$

будет

$$Q_1 = hRp \sin \alpha \cos \beta; \quad Q_2 = hRp \sin \beta \cos \alpha \quad (2')$$

Пользуясь выражениями (1) и (2'), составляем уравнения движения снаряда во второй Лагранжевой форме.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega'} = A[\omega' + (\beta' + \varphi') \sin \alpha]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0; \quad Q = 0$$

так что первое уравнение будет

$$\frac{d}{dt} \{A[\omega' + (\beta' + \varphi') \sin \alpha]\} = 0$$

откуда следует

$$\omega' + (\beta' + \varphi') \sin \alpha = p_0 = \text{пост.} \quad (3)$$

Второе уравнение получим по схеме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_1$$

и, воспользовавшись (3), будем иметь:

$$B\alpha'' - Ap_0(\beta' + \varphi') \cos \alpha + B(\beta' + \varphi')^2 \sin \alpha \cos \alpha = hRp \sin \alpha \cos \beta \quad (4)$$

Совершено так же по схеме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_2$$

воспользовавшись тем же уравнением (3), получим:

$$\begin{aligned} & B(\beta'' + \varphi'') - B(\beta'' + \varphi'') \sin^2 \alpha + \\ & + Ap_0 \cos \alpha \alpha' - 2B(\beta' + \varphi') \alpha' \sin \alpha \cos \alpha = hRp \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (5)$$

§ 3. Как обыкновенно, начнем рассмотрение с простейшего случая, т. е. с движения снаряда вблизи дула на малом участке траектории, который можно считать прямолинейным. Это рассмотрение необходимо потому, что для такого участка имеется воз-

возможность, которую и пользуются, определять действительное движение оси снаряда по виду пробойн в близко расположенных один за другим картонных щитах.

Для такого участка будет

$$\varphi' = 0 \quad \text{и} \quad \rho = \rho_0 = \text{пост.}$$

вместе с тем углы α , β , и их производные α' и β' можно считать величинами малыми и ограничиваться членами первого порядка, тогда уравнения движения будут

$$\begin{aligned} B\alpha'' - Ap_0\beta' - hR\rho_0\alpha &= 0 \\ B\beta'' + Ap_0\alpha' - hR\rho_0\beta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ибо при таком приближении в разложениях $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ достаточно удерживать лишь первый член 1 и в разложениях $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ — члены α и β .

Положив для сокращения

$$l = \frac{hR\rho_0}{B}; \quad m = \frac{Ap_0}{B}$$

напишем эти уравнения так:

$$\begin{aligned} \alpha'' - l\alpha - m\beta' &= 0 \\ m\alpha' + \beta'' - l\beta &= 0 \end{aligned} \quad (6')$$

и будем искать их решение под видом

$$\alpha = C \cos(\lambda t + \varepsilon)$$

$$\beta = C \sin(\lambda t + \varepsilon)$$

причем C и ε — произвольные постоянные, тогда λ определяется из уравнения

$$\lambda^2 + m\lambda + l = 0 \quad (6'')$$

которое, по замене m и l их величинами, дает

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_1 &= -\frac{Ap_0 + \sqrt{A^2 p_0^2 - 4hR\rho_0 B}}{2B} \\ \lambda = \lambda_2 &= -\frac{Ap_0 - \sqrt{A^2 p_0^2 - 4hR\rho_0 B}}{2B}\end{aligned}\quad (6''')$$

Отсюда следует, что λ будет вещественное и, значит, углы α и β будут выражаться через синус и косинус аргументов, пропорциональных времени, когда

$$A^2 p_0^2 - 4hR\rho_0 B > 0 \quad (7)$$

Это есть известное условие, которым определяется наименьшая допустимая крутизна нарезов у дула, иначе — угловая скорость собственного вращения снаряда, обеспечивающая устойчивость его движения.

На основании соображений, в которые мы здесь входить не будем, нарезам придают такую крутизну, чтобы было

$$Ap_0 = 2k\sqrt{hR\rho_0 B}$$

причем приблизительно

$$k = 1.075$$

Предполагая, таким образом, что условие (7) выполнено, имеем:

$$\begin{aligned}\alpha &= C_1 \cos(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2 \cos(\lambda_2 t + \varepsilon_2) \\ \beta &= C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2)\end{aligned}\quad (8)$$

где C_1 , C_2 , ε_1 , ε_2 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям.

Заметим, что при сделанном приближении уравнение

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta$$

равносильно формуле

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

так что будет

$$\delta^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_1)t + \varepsilon_2 - \varepsilon_1]$$

Положив

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\sqrt{A^2 p_0^2 - 4kR p_0 B}}{B} = n$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \gamma$$

получим:

$$\delta^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(nt + \gamma) \quad (8')$$

Из этой формулы видно, что наибольшая величина δ есть

$$\delta_{\max} = C_1 + C_2$$

и наименьшая

$$\delta_{\min} = C_1 - C_2$$

причем δ колеблется между этими крайними значениями с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{n}$$

Этот результат был в сущности получен еще Маиевским, если исправить некоторые недочеты в его выкладках и допущениях.

§ 4. Формулы (8) имеют то значение, что, пользуясь ими, легко анализировать результаты опытов над вращательным движением снаряда, стреляя по картонным мишеням, подобно тому, как описано в т. 221 „Philosophical Transactions of the Royal Society of London“.

В самом деле, по виду пробойн получатся величины $\delta_{\max}$ и $\delta_{\min}$, а по положению мишеней и скорости снаряда получается время, протекшее от $\max$ до $\min$. По этим данным сейчас же находятся C_1 и C_2 , а также n , ибо промежуток времени от $\max$ до $\min$ равен полупериоду, т. е. $\frac{\pi}{n}$.

Так как Ap_0 и B известны по конструкции орудия и снаряда и по начальной скорости, то из уравнения

$$n^2 = \frac{A^2 p_0^2 - 4hR p_0 B_0}{B^2}$$

найдется $hR p_0$ и, если по потере скорости определить непосредственно из опыта и p_0 , то найдется h .

Кроме того, зная n и $\frac{Ap_0}{B}$, найдем в отдельности λ_1 и λ_2 , тогда в формулах (8) C_1 , C_2 , λ_1 , λ_2 будут известны, и по паре наблюдаемых значений α и β найдутся ε_1 и ε_2 , следовательно, когда для данного выстрела имеется целый ряд значений α и β (щитов ставят подряд 10—15), то, сличая вычисленные величины с наблюдаемыми, получим суждение о том, в какой мере сделанное предположение, т. е. формула Маиевского

$$K = hR p_0 \sin \delta$$

соответствует действительности.

Мы не будем входить в дальнейшие чисто артиллерийские подробности, скажем лишь, что, по-видимому, это согласие — удовлетворительное.

§ 5. Перейдем теперь к рассмотрению движения снаряда на всей его криволинейной траектории. В начале движения у дула ось снаряда обыкновенно близка к совпадению с касательной к траектории, но по мере удаления снаряда от дула орудия угол, составляемый касательной с отвесною линией, постепенно возрастает (как говорят, касательная понижается).

Для правильности полета снаряда необходимо, чтобы его ось следовала или, как говорят, „средила“ за касательной и сохраняла бы возможно малый угол нутации.

При тех же допущенных относительно малости величин

$$\alpha, \beta, \alpha', \beta', \varphi'$$

ограничиваясь в уравнениях (4) и (5) членами первого порядка, будем иметь:

$$\begin{aligned} B\beta'' - hR\rho\beta + Ap_0\alpha' &= -B\varphi'' \\ -Ap_0\beta' + B\alpha'' - hR\rho\alpha &= Ap_0\varphi' \end{aligned} \quad (9)$$

Разделим эти уравнения на $hR\rho_0$, где ρ_0 — сопротивление, соответствующее начальной скорости, и введем вместо переменной t переменную s , определяемую уравнением

$$s = t \sqrt{\frac{hR\rho_0}{B}} \quad (10)$$

Эта переменная s будет отвлеченным числом, независимым от выбора единиц; положив

$$2k = \frac{Ap_0}{\sqrt{hR\rho_0 B}}$$

мы видим, что

$$s = \frac{1}{2k} \cdot \frac{Ap_0}{B} t \quad (10')$$

и наши уравнения будут

$$\begin{aligned} \beta'' - \frac{\rho}{\rho_0} \beta + 2k\alpha' &= -\varphi'' \\ -2k\beta' + \alpha'' - \frac{\rho}{\rho_0} \alpha &= 2k\varphi' \end{aligned} \quad (9')$$

причем значками обозначены производные, взятые по переменной независимой s . Все величины, входящие в эти уравнения, суть числа *отвлеченные*, независимые от выбора единиц.

Величина k , как мы видели, около 1.075, отношение $\frac{\rho}{\rho_0}$ изменяется в широких пределах, — так, в том численном примере, который приведен ниже, это отношение изменяется от 1 до 0.05 за время полета снаряда, ρ предполагается заданным таблично или графически в функции переменной s , так же как φ' и φ'' .

Положим

$$z = \alpha + i\beta$$

тогда система уравнений (9') заменится одним уравнением

$$z'' + 2ikz' - \frac{\rho}{\rho_0} z = 2k\varphi' - i\varphi''$$

положив

$$z = e^{-iks} u \quad (11)$$

получим для определения u уравнение

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) u = e^{iks} (2k\varphi' - i\varphi'')$$

Заметив, что

$$e^{iks} = \cos ks + i \sin ks$$

и положив

$$u = v_1 + w_1 i$$

$$2k\varphi' \cos ks + \varphi'' \sin ks = f(s)$$

$$2k\varphi' \sin ks - \varphi'' \cos ks = g(s) \quad (12)$$

мы получим для определения неизвестных функций v_1 и w_1 уравнения

$$v_1'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) v_1 = f(s)$$

$$w_1'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) w_1 = g(s) \quad (13)$$

Оба уравнения — одинакового вида, оба — линейны, но величина $k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$, хотя и остается все время положительной, не есть постоянная, а некоторая функция переменной независимой s , заданная таблично или графически, на основании расчета траектории центра тяжести снаряда.

Понятно, что достаточно рассмотреть одно из уравнений (13), например первое, ибо все, о нем сказанное, будет относиться и ко второму.

Итак, положив

$$k^2 - \frac{\rho}{\rho_0} = \mu^2 \quad (14)$$

мы имеем уравнение

$$v_1'' + \mu^2 v_1 = f(s) \quad (13')$$

Соответствующее ему уравнение без последнего члена есть

$$v'' + \mu^2 v = 0 \quad (13'')$$

и если q_1 и q_2 — два его линейно независимых решения, то общий интеграл уравнения (13') будет

$$v_1 = C_1 q_1 + C_2 q_2 + \frac{1}{D} q_1 \int_0^s q_2(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{D} q_2 \int_0^s q_1(\xi) f(\xi) d\xi \quad (15)$$

как то следует из метода изменения произвольных постоянных.

Здесь

$$D = q_1 q_2' - q_1' q_2 = \text{пост.}$$

ибо, на основании уравнения (13''),

$$q_1'' + \mu^2 q_1 = 0$$

$$q_2'' + \mu^2 q_2 = 0$$

следовательно,

$$q_1 q_2'' - q_1'' q_2 = 0$$

но

$$q_1 q_2'' - q_1'' q_2 = (q_1 q_2' - q_1' q_2)' = 0$$

значит,

$$D = q_1 q_2' - q_1' q_2 = \text{пост.}$$

которая и найдется, если придать переменной s какое-либо частное значение.

§ 6. Таким образом, все дело свелось к интегрированию уравнения (13''), которое, полагая

$$\frac{p}{p_0} = p(s)$$

пишут обыкновенно в виде

$$v'' + [k^2 - p(s)]v = 0. \quad (13''')$$

Этому уравнению посвящено множество исследований знаменитейших математиков. В этих исследованиях, весьма общих, обыкновенно предполагается, что функция $p(s)$ задана аналитически и что переменная независимая s изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, или даже, что эта переменная — комплексная и изменяется или неограниченно, или по данному контуру на комплексной плоскости, и изучаются свойства функции v , определяемой уравнением (13''').

Наша задача совершенно иного рода: функция

$$\frac{p}{p_0} = p(s)$$

задана таблично или графически, область изменения переменной s ограничена сравнительно кратким временем полета снаряда, но зато нам надо получить простой и достаточно точный способ вычисления значений функции v в данном промежутке изменемости s , причем это вычисление должно укладываться в простую удобную схему, которую можно вручить вычислительному бюро.

Необходимо помнить, что для вычисления значений p , а значит и $p(s)$, служат эмпирические формулы, точность которых едва ли превышает 1%; поэтому, если вычертить функцию

$$\mu^2(s) = k^2 - p(s)$$

то в сущности, как говорил Ф. Клейн, надо бы причертить по обе стороны от этой кривой две кривые, ей „параллельные“, которыми и ограничилась бы „полоса“, в которой лежит функция $\mu^2(s)$, и если мы, не выходя из границ этой полосы, заменим кривую $\mu^2(s)$ какою-нибудь „близкою“ кривой или ломаной, составленной из прямолинейных или криволинейных отрезков, то точность расчета от этого не пострадает.

В этом замечании Клейна заключается, можно сказать, основание всякого рода приближенных вычислений.

Понятно, что как выбор подразделений кривой $\mu^2(s)$ на участки, так и замена ее на этих участках отрезками кривых или прямых линий допускает широкий простор.

Прежде всего представляется как бы обобщение правила трапеций, т. е. замена $\mu^2(s)$ ломаной.

Для этого надо заданный промежуток изменямости s подразделить на несколько равных или неравных частей, выбранных так, чтобы стороны соответствующей ломаной, вписанной в кривую $\mu^2(s)$, не выходили из упомянутой выше полосы.

В таком случае для каждого участка уравнение (13'') примет вид

$$v'' + (a + bs)v = 0 \quad (16)$$

где a и b для данного участка — постоянные, но при переходе от одного участка к следующему меняются скачками.

Уравнение (16) приводится к уравнению Бесселя и интегрируется в функциях Бесселя индекса $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$. Хотя для этих функций и существуют таблицы, но пользование ими недостаточно просто и удобно.

Гораздо проще, разбив, как сказано ниже, кривую $\mu^2(s)$ на участки, положить на каждом участке

$$\mu^2(s) = \frac{1}{(a - bs)^2} \quad (17)$$

где a и b — постоянные.

Само собою разумеется, что это равносильно замене кривой $\frac{1}{\mu(s)}$ ломаной, поэтому для выбора сказанных участков вычерчиваем кривую $\frac{1}{\mu(s)}$ и вписываем в нее ломаную, „достаточно близкую“.

Так, для того численного примера, который приведен ниже, оказывается, что достаточно взять 10 промежутков, как показано в следующей таблице:

№ промежу- тка	Значения s		a	b	$\frac{1}{\mu} = a - bs$
	от	до			
1	0	10.00	2.540	0.04150	$2.540 - 0.04150s$
2	10.00	28.15	2.325	0.02035	$2.325 - 0.02035s$
3	28.15	47.30	2.034	0.01002	$2.034 - 0.01002s$
4	47.30	73.00	1.860	0.00631	$1.860 - 0.00631s$
5	73.00	105.00	1.675	0.00374	$1.675 - 0.00374s$
6	105.0	162.5	1.501	0.00207	$1.501 - 0.00207s$
7	162.5	213.5	1.362	0.00122	$1.362 - 0.00122s$
8	213.5	388.5	1.213	0.000520	$1.213 - 0.000520s$
9	388.5	980.0	1.047	0.0000930	$1.047 - 0.0000930s$
10	980	1495.0	0.868	-0.0000874	$0.868 + 0.0000874s$

На каждом из этих участков уравнение (16) принимает вид

$$(a - bs)^2 v_1'' + v_1 = (a - bs)^2 f(s) \quad (16')$$

Положив

$$a - bs = e^x$$

мы приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} - \frac{dv_1}{dx} + \frac{1}{b^2} v_1 = \frac{1}{b^2} e^{2x} F(x)$$

где через $F(x)$ обозначена та функция, в которую обратится $f(s)$, когда переменная s будет заменена через

$$\frac{e^x - a}{b}$$

Положив в этом уравнении

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x} u_1$$

и обозначая для краткости производные по переменной x значками, мы получим для определения u уравнение

$$u_1'' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4} \right) u_1 = \frac{1}{b^2} e^{\frac{3}{2}x} F(x) \quad (16'')$$

Наименьшее значение $\frac{1}{b^2}$ в нашем численном примере есть 580, поэтому с тою степенью точности, с которою расчеты наши производятся, можно вместо $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}$ брать $\frac{1}{b^2}$ и вместо уравнения (16'') рассматривать уравнение

$$u_1'' + \frac{1}{b^2} u_1 = \frac{1}{b^2} e^{\frac{3}{2}x} F(x) \quad (18)$$

общий интеграл которого есть

$$u_1 = C_1 \cos \frac{x}{b} + C_2 \sin \frac{x}{b} - \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin \frac{\xi-x}{b} d\xi$$

следовательно, будет

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos \frac{x}{b} + C_2 \sin \frac{x}{b} \right] - \frac{1}{b} e^{\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin \frac{\xi-x}{b} d\xi \quad (19)$$

Положив

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \cos \frac{\xi}{b} d\xi \\ K_2 &= \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin \frac{\xi}{b} d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

напишем предыдущую формулу так:

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos \frac{x}{b} + C_2 \sin \frac{x}{b} \right] + e^{\frac{1}{2}x} \left[K_1 \sin \frac{x}{b} - K_2 \cos \frac{x}{b} \right] \quad (21)$$

Совершенно так же, при само собою понятном обозначении, положив

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} G(\xi) \cos \frac{\xi}{b} d\xi \\ L_2 &= \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} G(\xi) \sin \frac{\xi}{b} d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

будем иметь:

$$w_1 = e^{\frac{1}{2}x} \left[C_3 \cos \frac{x}{b} + C_4 \sin \frac{x}{b} \right] + e^{\frac{1}{2}x} \left[L_1 \sin \frac{x}{b} - L_2 \cos \frac{x}{b} \right] \quad (23)$$

Таким образом, все дело сведено к вычислению интегралов K_1 , K_2 , L_1 , L_2 , постоянные же произвольные определяются по начальным условиям для первого промежутка, а при переходе от одного промежутка к следующему — по условию непрерывности как самих функций ψ_1 и w_1 , так и их производных ψ'_1 и w'_1 .

§ 7. Обычные формулы квадратур не могут быть применены к вычислению интегралов K_1 , K_2 , L_1 , L_2 , ибо аргумент $\frac{\xi}{b}$ в пределах интегрирования пробегает множество полных периодов косинуса и синуса, а так как для каждого периода пришлось бы брать, по меньшей мере, 16 подразделений (ординат), то число этих потребных частных значений подинтегральной функции составило бы десятки тысяч, что практически невыполнимо.

Для этого вычисления мы применим следующий способ: положим, что требуется найти интеграл

$$J_1 = \int_0^x \omega'(\xi) \cos \xi d\xi \quad (24)$$

причем $\omega'(\xi)$ остается все время положительной, так что сама функция $\omega(\xi)$ есть функция монотонная. Положим, что наибольшее значение верхнего предела x заключает большое число раз 2π (в нашем примере около 250 раз), так что, если построить график функции $\omega(x)$ и брать абсциссы через 2π , то соответствующие участки $\omega(x)$ можно принять прямолинейными (в нашем случае это имеет место гораздо точнее, чем самый точный и тонкий чертеж); в таком случае можно применить такой прием.

Интегрируя по частям, имеем:

$$J_1 = -\omega(0) + \omega(x) \cos x + \int_0^x \omega(\xi) \sin \xi d\xi$$

Но так как функция $\omega(x)$ задана лишь своею производною, то мы можем положить $\omega(0) = 0$, так что будет

$$J_1 = \omega(x) \cos x + \int_0^x \omega(\xi) \sin \xi d\xi$$

Пусть будет

$$x = 2k\pi + \alpha$$

тогда пишем

$$\int_0^x = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \dots + \int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} + \dots + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\alpha}$$

Обозначим через

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$$

значения функции ω при x , равном

$$0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2k\pi$$

Полагаем затем в промежутке от $(2j-2)\pi$ до $2j\pi$

$$\xi = (2j-2)\pi + z$$

и, на основании сказанного о характере функции ω ,

$$\omega(\xi) = \omega_{j-1} + \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2\pi} z$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} &= \int_0^{2\pi} \left(\omega_{j-1} + \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2\pi} z \right) \sin z dz = \\ &= -\omega_{j-1} [\cos z]_0^{2\pi} + \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2\pi} [-z \cos z + \sin z]_0^{2\pi} = -(\omega_j - \omega_{j-1}) \end{aligned}$$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\alpha} = \int_0^{\alpha} \left(\omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} z \right) \sin z dz =$$

$$\begin{aligned}
&= -\omega_k [\cos z]_0^\alpha + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} [-z \cos z + \sin z]_0^\alpha = \\
&= \omega_k (1 - \cos \alpha) - \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \alpha \cos \alpha + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \sin \alpha = \\
&= \omega_k - \left[\omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \alpha \right] \cos \alpha + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \sin \alpha
\end{aligned}$$

но с принятой степенью приближения

$$\omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \alpha = \omega(x)$$

$$\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} = \omega'(x)$$

вместе с тем

$$\cos \alpha = \cos x; \quad \sin \alpha = \sin x$$

Таким образом, получим:

$$\int_0^x \omega(\xi) \sin \xi d\xi = -[(\omega_1 - \omega_0) + (\omega_2 - \omega_1) + \dots + (\omega_k - \omega_{k-1})] +$$

$$+ \omega_k - \omega(x) \cos x + \omega'(x) \sin x = -\omega(x) \cos x + \omega'(x) \sin x$$

ибо

$$\omega_0 = \omega(0) = 0$$

Следовательно, будет

$$J_1 = \int_0^x \omega'(\xi) \cos \xi d\xi = \omega'(x) \sin x \quad (25)$$

Совершенно так же найдем интеграл

$$J_2 = \int_0^x \omega'(\xi) \sin \xi d\xi$$

именно будет

$$J_2 = \int_0^x \omega'(\xi) \sin \xi d\xi = \omega(x) \sin x - \int_0^x \omega(\xi) \cos \xi d\xi$$

$$\begin{aligned}
x &= \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \dots + \int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} + \dots + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\alpha} \\
\int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} &= \int_0^{2\pi} \left(\omega_{j-1} + \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2\pi} z \right) \cos z dz = \\
&= \omega_{j-1} [\sin z]_0^{2\pi} + \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2\pi} [z \sin z + \cos z]_0^{2\pi} = 0 \\
\int_{2k\pi}^{2k\pi+\alpha} &= \int_0^{\alpha} \left(\omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} z \right) \cos z dz = \omega_k \sin \alpha + \\
&+ \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} [z \sin z + \cos z]_0^{\alpha} = \left(\omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} \alpha \right) \sin \alpha - \\
&- \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2\pi} (1 - \cos \alpha) = \omega(x) \sin x - (1 - \cos x) \omega'(x)
\end{aligned}$$

Следовательно, будет

$$J_2 = \int_0^x \omega'(\xi) \sin \xi d\xi = (1 - \cos x) \omega'(x) \quad (26)$$

Само собою разумеется, что эти формулы (25) и (26) не являются общими и применимы лишь для таких функций ω и в таких пределах, о которых было сказано выше.

§ 8. Прежде чем выполнить вычисление интегралов K_1, K_2, L_1, L_2 , необходимо обратить внимание, что к этим интегралам нельзя применять непосредственно формулы (25) и (26), ибо функции $F(\xi)$ и $G(\xi)$ произошли от преобразования функций (12)

$$f(s) = 2k\varphi'(s) \cos ks + \varphi''(s) \sin ks$$

$$g(s) = 2k\varphi'(s) \sin ks - \varphi''(s) \cos ks$$

которые содержат множители $\cos ks$ и $\sin ks$ и не только не сохраняют своего знака, но имеют своим периодом величину, близкую к периоду

$$\cos \frac{\xi}{b} \text{ и } \sin \frac{\xi}{b}$$

Величина $\varphi''(s)$ — весьма малая по сравнению с $2k\varphi'(s)$, поэтому, чтобы не усложнять напрасно формул, мы можем положить

$$\begin{aligned} f(s) &= 2k\varphi'(s) \cos ks \\ g(s) &= 2k\varphi'(s) \sin ks \end{aligned} \quad (27)$$

Возьмем для примера интеграл

$$K_1 = \frac{1}{b} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \cos \frac{\xi}{b} d\xi$$

Положив

$$\frac{\xi}{b} = \eta$$

имеем:

$$K_1 = \int_0^{\frac{x}{b}} e^{\frac{3}{2}b\eta} F(b\eta) \cos \eta d\eta$$

и преобразуем этот интеграл обратно к переменной σ , связанной с переменной η уравнением

$$a - b\sigma = e^{b\eta}$$

Так как

$$e^{\sigma} = a - b\sigma$$

то при

$$\eta = \frac{\sigma}{b}$$

переменная σ принимает значение s и, значит, пределами интеграла будут

$$0 \text{ и } s.$$

$F(b\eta)$ произошло от преобразования функции

$$f(\sigma) = 2k\varphi'(\sigma) \cos k\sigma$$

следовательно, и обратно $F(b\eta)$ обратится в $2k\varphi'(\sigma) \cos k\sigma$, когда мы вернемся к переменной σ , наконец

$$\eta = \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma)$$

$$d\eta = -\frac{d\sigma}{a - b\sigma}$$

Значит, будет

$$K_1 = -2k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos k\sigma \cos \left[\frac{\lg(a - b\sigma)}{b} \right] d\sigma$$

но

$$2 \cos k\sigma \cos \left[\frac{\lg(a - b\sigma)}{b} \right] = \cos \left[k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] + \\ + \cos \left[k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right]$$

следовательно, будет

$$-K_1 = k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos \left[k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma + \\ + k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos \left[k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma \quad (28)$$

Положим в первом из этих интегралов

$$k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) = \tau \quad (29)$$

и обозначим через $\Phi(\tau)$ ту функцию, в которую обратится $(a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma)$, когда переменная σ будет заменена через τ , и пусть

$$k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) = q$$

есть значение переменной τ , соответствующее значению s переменной σ , и

$$q_0 = \frac{1}{b} \lg a$$

ее значение, соответствующее значению $\sigma = 0$.

Из уравнения (29) следует

$$\left(k - \frac{1}{a - b\sigma}\right) d\sigma = d\tau = \frac{ak - 1 - kb\sigma}{a - b\sigma} d\sigma$$

$$d\sigma = \frac{a - b\sigma}{(ak - 1) - kb\sigma} d\tau = p(\tau) d\tau$$

Значит, первый из указанных в формуле (28) интегралов примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{q_0}^q \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau = \\ & = k \int_0^q \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau - k \int_0^{q_0} \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau \end{aligned}$$

в этом виде к этим обоим интегралам приложима формула (25), на основании которой будет

$$k \int_0^q \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau = k \Phi(q) p(q) \sin q$$

$$k \int_0^{q_0} \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau = k \Phi(q_0) p(q_0) \sin q_0$$

или, вернувшись к переменной s , получим:

$$\begin{aligned} & k \int_0^q \Phi(\tau) p(\tau) \cos \tau d\tau = \\ & = k \frac{(a - bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a - bs) - 1} \varphi'(s) \sin \left[ks + \frac{1}{b} \lg(a - bs) \right] \end{aligned}$$

Очевидно, что второй интеграл будет заключать множитель $\varphi'(0)$; эта величина — весьма малая, и все величины, куда этот множитель входит, можно отбросить, иначе — считать $\varphi'(0) = 0$, следовательно, будет

$$I = k \frac{(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)-1} \varphi'(s) \sin \left[ks + \frac{1}{b} \lg(a-bs) \right]$$

Совершенно подобным же образом мы получим для второго интеграла формулы (28)

$$II = k \frac{(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)+1} \varphi'(s) \sin \left[ks - \frac{1}{b} \lg(a-bs) \right]$$

и, значит, будет

$$-K_1 = I + II \quad (30)$$

Интеграл K_2 будет

$$\begin{aligned} K_2 &= +2k \int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos k\sigma \sin \left[\frac{1}{b} \lg(a-b\sigma) \right] d\sigma = \\ &= k \int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin \left[k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a-b\sigma) \right] d\sigma - \\ &\quad - k \int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin \left[k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a-b\sigma) \right] d\sigma \end{aligned}$$

Обозначая последние два интеграла соответственно III и IV, мы по формуле (26) получим подобно предыдущему

$$III = k \frac{(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)+1} \varphi'(s) \left[1 - \cos \left(ks - \frac{1}{b} \lg(a-bs) \right) \right]$$

$$IV = \frac{k(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)-1} \varphi'(s) \left[1 - \cos \left(ks + \frac{1}{b} \lg(a-bs) \right) \right]$$

и

$$K_2 = III - IV \quad (31)$$

Интеграл L_1 будет

$$\begin{aligned} L_1 &= -2k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin k\sigma \cos \left[\frac{\lg(a - b\sigma)}{b} \right] d\sigma = \\ &= -k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin \left[k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma - \\ &\quad - k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin \left[k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma \end{aligned}$$

и, на основании сделанных выше обозначений, получим:

$$-L_1 = \text{III} + \text{IV} \quad (32)$$

Наконец, интеграл L_2 будет

$$\begin{aligned} L_2 &= -2k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin k\sigma \sin \left[\frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma = \\ &= k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos \left[k\sigma + \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma - \\ &\quad - k \int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \cos \left[k\sigma - \frac{1}{b} \lg(a - b\sigma) \right] d\sigma \end{aligned}$$

т. е.

$$L_2 = \text{I} - \text{II} \quad (33)$$

§ 9. В состав выражений (21) и (23) для v_1 и w_1 входят комбинации

$$P = e^{\frac{1}{2}x} \left[K_1 \sin \frac{x}{b} - K_2 \cos \frac{x}{b} \right]$$

$$Q = e^{\frac{1}{2}x} \left[L_1 \sin \frac{x}{b} - L_2 \cos \frac{x}{b} \right]$$

Заметив, что

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{b} \lg(a - bs)$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = (a - bs)^{\frac{1}{2}}$$

и положив для сокращения

$$\frac{k(a - bs)^2}{k(a - bs) + 1} \varphi'(s) = M; \quad \frac{k(a - bs)^2}{k(a - bs) - 1} \varphi'(s) = N' \quad (34)$$

мы получим:

$$\begin{aligned} P &= (N - M) \left(\cos \frac{x}{b} - \cos ks \right) \\ Q &= -(N - M) \sin ks - (N + M) \sin \frac{x}{b} \end{aligned} \quad (35)$$

В состав выражений α и β входят комбинации

$$P \cos ks + Q \sin ks$$

и

$$-P \sin ks + Q \cos ks$$

На основании предыдущих формул будет

$$\begin{aligned} P \cos ks + Q \sin ks &= -(N - M) + N \cos \left(ks + \frac{x}{b} \right) - \\ &\quad - M \cos \left(ks - \frac{x}{b} \right) \\ -P \sin ks + Q \cos ks &= -N \sin \left(ks + \frac{x}{b} \right) + M \sin \left(ks - \frac{x}{b} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos \frac{x}{b} + C_2 \sin \frac{x}{b} \right] + P \\ w_1 &= e^{\frac{1}{2}x} \left[C_3 \cos \frac{x}{b} + C_4 \sin \frac{x}{b} \right] + Q \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= v_1 \cos ks + w_1 \sin ks \\ \beta &= -v_1 \sin ks + w_1 \cos ks \end{aligned} \quad (38)$$

Введем вместо постоянных произвольных C_1, C_2, C_3, C_4 постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 уравнениями

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 + A_2; & C_4 &= A_1 - A_2 \\ C_2 &= B_2 - B_1; & C_3 &= B_2 + B_1 \end{aligned}$$

тогда будет

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{\frac{1}{2}x} \left[A_1 \cos \left(ks - \frac{x}{b} \right) + B_1 \sin \left(ks - \frac{x}{b} \right) + \right. \\ &\quad \left. + A_2 \cos \left(ks + \frac{x}{b} \right) + B_2 \sin \left(ks + \frac{x}{b} \right) \right] + \\ &\quad + N \cos \left(ks + \frac{x}{b} \right) - M \cos \left(ks - \frac{x}{b} \right) - (N - M) \\ \beta &= e^{\frac{1}{2}x} \left[-A_1 \sin \left(ks - \frac{x}{b} \right) + B_1 \cos \left(ks - \frac{x}{b} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_2 \sin \left(ks + \frac{x}{b} \right) + B_2 \cos \left(ks + \frac{x}{b} \right) \right] + \\ &\quad + M \sin \left(ks - \frac{x}{b} \right) - N \sin \left(ks + \frac{x}{b} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Члены, содержащие произвольные постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 , представляют зависящие от начальных условий „свободные“ колебания снаряда, члены с множителями M и N представляют „вынужденные“ колебания, т. е. колебания, которые образуются *независимо* от начальных условий и происходят вследствие постепенного понижения касательной к траектории центра тяжести снаряда.

Свободные колебания, как зависящие от изменяющихся при каждом выстреле начальных условий, носят случайный характер и сказываются на „рассеянии“, если только их величина превосходит в начале движения $6-8^\circ$; чтобы ограничить эти колебания, необходимо придавать нарезам несколько бóльшую крутизну, нежели наименьшая, при которой снаряд устойчив, как о том сказано в § 3.

„Вынужденные“ колебания, как уже сказано, от начальных обстоятельств *не зависят* и для всех выстрелов, произведенных из того же орудия, одинаковыми снарядами и под одинаковым углом возвышения, остаются без изменения. От этих колебаний происхо-

дит деривация снаряда, поэтому мы остановимся на них, как на вполне определенных, подробнее.

§ 10. Итак, обозначим через α_1 и β_1 те члены, которые в составе углов α и β происходят от понижения касательной, а именно:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= N \cos \left(ks + \frac{x}{b} \right) - M \cos \left(ks - \frac{x}{b} \right) - (N - M) \\ \beta_1 &= M \sin \left(ks - \frac{x}{b} \right) - N \sin \left(ks + \frac{x}{b} \right)\end{aligned}\quad (40)$$

Мы имеем формулы

$$\begin{aligned}k^2 - \frac{\rho}{\rho_0} &= \mu^2(s) = \frac{1}{(a - bs)^2} \\ a - bs &= \frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

для каждого участка, на которые мы разбили кривые $\mu^2(s)$ и $\frac{1}{\mu(s)}$.

Положим, что число участков, на которые мы разбиваем кривую $\frac{1}{\mu}$, неопределенно увеличивается, тогда соответствующая хорда будет приближаться к касательной к этой кривой и мы получим:

$$b = \frac{\mu'}{\mu^2}$$

Таким образом, во всех формулах, относящихся к α_1 и β_1 , мы можем заменить

$$a - bs \text{ через } \frac{1}{\mu}$$

$$b \text{ через } \frac{\mu'}{\mu^2}$$

после такой замены будет

$$M = \frac{k}{\mu^2 + k\mu} \varphi'(s)$$

$$N = \frac{k}{-\mu^2 + k\mu} \varphi'(s) \quad (41)$$

$$x = \lg \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{\mu^2}{\mu'} \lg \frac{1}{\mu}$$

и вышеуказанные члены выразятся независимо от подразделения кривой $\frac{1}{\mu}$ на участки.

Положим

$$N = H + G \text{ и } M = H - G$$

так что

$$2H = N + M = -\frac{2k^2}{\mu^2 - k^2} \varphi'(s)$$

$$2G = N - M = -\frac{2k}{\mu^2 - k^2} \varphi'(s)$$

но мы имеем:

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$s = \frac{1}{2k} \cdot \frac{Ap_0}{B} t$$

$$Ap_0 = 2k \sqrt{hR\rho_0 B}$$

Заметив, что

$$\varphi'(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2kB}{Ap_0} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

мы получим:

$$-\frac{2k}{\mu^2 - k^2} \varphi'(s) = \frac{2k\rho_0}{\rho} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{4k^2\rho_0}{\rho Ap_0} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Ap_0}{hR\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Если ввести переменную q уравнением

$$dq = \frac{hR}{Ap_0} \rho dt \quad (42)$$

то будет

$$\frac{Ap_0}{hR\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q) \quad (43)$$

ниже будет показано, что эта производная вычисляется непосредственно по данным, имеющимся в расчете траектории центра тяжести.

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} 2H &= N + M = \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \\ 2G &= N - M = \varphi'(q) \\ \alpha_1 &= -\varphi'(q) - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin \frac{x}{b} \sin ks + \varphi'(q) \cos \frac{x}{b} \cos ks \\ \beta_1 &= -\varphi'(q) \cos \frac{x}{b} \sin ks - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin \frac{x}{b} \cos ks \end{aligned} \quad (44)$$

§ 11. Формулам (44) можно придать еще один вид, из которого получается более наглядное представление о характере движения оси снаряда, определяемого этими уравнениями.

Для этого положим в этих уравнениях

$$\begin{aligned} \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin \frac{x}{b} &= T \sin \omega \\ \varphi'(q) \cos \frac{x}{b} &= T \cos \omega \end{aligned}$$

Тогда будет

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{k}{\mu} \operatorname{tg} \frac{x}{b}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\varphi'(q)}{\mu} \sqrt{k^2 \sin^2 \frac{x}{b} + \mu^2 \cos^2 \frac{x}{b}} = \frac{\varphi'(q)}{\mu} \sqrt{k^2 - (k^2 - \mu^2) \cos^2 \frac{x}{b}} = \\ &= \frac{\varphi'(q)}{\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + \cos \frac{2x}{b}\right)} = \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sqrt{1 - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cos \frac{2x}{b}} \end{aligned}$$

и, следовательно, будет

$$\alpha_1 = -\varphi'(q) + \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sqrt{1 - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cos \frac{2x}{b}} \cos(ks + \omega) \quad (45)$$

Совершенно так же получим:

$$\beta_1 = -\frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sqrt{1 - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cos \frac{2x}{b} \sin(ks + \omega)} \quad (46)$$

Величина корня в формулах (45) и (46) изменяется от наибольшего своего значения 1 до наименьшего

$$\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0}}$$

вместе с тем для большей части траектории $\frac{k}{\mu}$ очень близко к 1, поэтому в выражении α_1 первый член почти все время преобладает над вторым, так что не только среднее значение, но и самый угол α остается почти все время отрицательным, лишь изредка обращаясь в нуль. Это показывает, что колебания оси снаряда, вызываемые понижением касательной, таковы, что ось остается все время по одну сторону от плоскости стрельбы.

Отсюда ясно, что горизонтальная проекция боковой слагающей сопротивления воздуха, которая в первом приближении пропорциональна углу α_1 , будет состоять из постоянного по знаку и медленно изменяющегося члена, пропорционального $\varphi'(q)$, и быстро изменяющихся периодических членов. За сколь-нибудь значительный промежуток времени суммарный эффект периодических членов или уничтожается, или остается весьма малым, от первого же члена он все время нарастает, т. е. центр тяжести снаряда отнесется в ту сторону от плоскости стрельбы, куда уклонена ось снаряда. В этом отnose или отклонении и состоит деривация снаряда.

В первом приближении естественно принять, что непериодическая часть силы бокового сопротивления пропорциональна полному сопротивлению и непериодической части угла α , т. е. будет

$$Y = f \rho \varphi'(q)$$

где f — некоторый постоянный множитель.

Но мы видели, что

$$\varphi'(q) = \frac{A \rho_0}{h R \rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

значит,

$$\rho\varphi'(q) = \frac{Ap_0}{hR} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

и, следовательно, будет

$$\frac{P}{g} \eta = \int_0^t dt \int_0^t Y dt = f \frac{Ap_0}{hR} \int_0^t dt \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} dt = f \frac{Ap_0}{hR} \int_0^t \varphi(t) dt \quad (47)$$

Мы ограничимся о деривации лишь этим замечанием, чтобы показать причину ее происхождения и наметить простой способ ее расчета.

§ 12. Можно получить весьма наглядное представление о движении оси снаряда по движению ее следа на плоскости, перпендикулярной к касательной во всякий момент и движущейся вместе со снарядом; если расстояние этой плоскости до центра тяжести снаряда есть l , то координаты следа будут $l\alpha_1$ и $l\beta_1$; для простоты мы будем считать $l=1$, тогда с точностью до членов второго порядка будет

$$\delta_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$$

как это следует из формулы

$$\cos \delta_1 = \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

Это изображение будет еще нагляднее, если, воспользовавшись формулами (44), мы составим выражение

$$[a_1 + \varphi'(q)]^2 + \beta_1^2 = \Delta_1^2$$

которое, на основании формул (45) и (46), будет

$$\Delta_1^2 = \frac{k^2}{\mu^2} (\varphi'(q))^2 \left(1 - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cos \frac{2x}{b} \right) \quad (48)$$

Рассматривая α_1 и β_1 на нашем чертеже (фиг. 2) как текущие координаты точки A , изображающей след оси, мы видим, что если бы все остальные входящие в формулу (48) величины сохра-

Мы видели, что точка C — след прямой GC на нашей плоскости проекций — определяется координатами

$$\alpha_1^0 = -\varphi'(q); \quad \beta_1^0 = 0$$

причем

$$\varphi'(q) = \frac{Ap_0}{hR_p} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Обращаясь к уравнениям (9), т. е. к дифференциальным уравнениям движения оси снаряда, мы видим, что в предположении $\varphi''(t) = 0$, значения

$$\alpha_1^0 = -\frac{Ap_0}{hR_p} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\beta_1^0 = 0$$

определяют как раз мгновенное положение динамического равновесия оси снаряда.

Выяснив, таким образом, динамический смысл прямой GC или ее следа C , мы видим, что „вынужденные колебания“, т. е. происходящие независимо от начальных условий вследствие постепенного понижения касательной, состоят в том, что ось снаряда описывает около мгновенного положения своего динамического равновесия почти правильную коническую прецессию с медленно изменяющимся углом раствора и небольшой быстрой периодической нутацией. При этом проекция прямой GC (положение динамического равновесия) на плоскость стрельбы практически совпадает с касательной, проекция же этой прямой на плоскость, проведенную через касательную, перпендикулярно к плоскости стрельбы, во все время полета располагается по одну сторону от плоскости стрельбы, составляя с нею угол

$$\alpha_1^0 = -\varphi'(q) = -\frac{Ap_0}{hR_p} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

так как $\frac{d\varphi}{dt}$ остается все время положительной, то знак этого угла определяется знаком угловой скорости p_0 , сообщенной снаряду нарезами, причем знак угла α_1^0 — всегда обратный знаку p_0 .

§ 13. Мы упоминали, что величина $\varphi'(q)$ вычисляется непосредственно по данным, имеющимся в расчете траектории центра тяжести снаряда.

В самом деле, обозначим через P вес снаряда, через g — ускорение силы тяжести, через v и r — скорость и радиус кривизны траектории в точке (x, z) , через φ — наклонение в этой точке, считаемое от вертикали, через ρ — сопротивление воздуха на снаряд и $f(z)$ — относительную плотность воздуха на уровне z выше дула, тогда дифференциальные уравнения движения центра тяжести снаряда суть

$$1) \quad \frac{P}{g} \cdot \frac{d(v \sin \varphi)}{dt} = -\rho \sin \varphi$$

$$2) \quad \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = P \sin \varphi$$

$$3) \quad v = \frac{rd\varphi}{dt}$$

$$4) \quad dx = r \sin \varphi d\varphi$$

$$5) \quad dz = r \cos \varphi d\varphi$$

причем сопротивление воздуха рассчитывают по формуле

$$6) \quad \rho = \pi R^2 v^2 F(v) f(z)$$

пользуясь таблицами значений функций $F(v)$ и $f(z)$.

Из уравнений 2) и 3) следует

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{g}{v} \sin \varphi$$

а так как

$$dq = \frac{hR\varphi}{Ap_0} dt$$

то будет

$$\varphi'(q) = \frac{d\varphi}{dq} = \frac{Ap_0 g}{h R \varphi v} \sin \varphi \quad (49)$$

Все входящие в эту формулу величины имеются готовыми в расчете траектории.

§ 14. Покажем теперь на численном примере подробности всех вычислений, которыми определяется вращательное движение снаряда, при этом мы ограничимся только теми колебаниями, которые не зависят от начальных условий и присущи данному снаряду при полете его по заданной траектории, которая в свою очередь определяется начальной скоростью и углом возвышения.

Вычисление этих колебаний имеет весьма существенное практическое значение, ибо от них зависит деривация снаряда, как указано выше, а также и правильность его полета.

Для этого численного примера воспользуемся теми результатами, которые приведены в моей статье „О применении методы численного интегрирования уравнений к вычислению траектории снаряда“, доложенной в заседании Отделения физико-математических наук Академии наук 8 сентября 1920 г. Пример, приведенный в этой статье, не относится к какому-нибудь действительно существующему снаряду, — снаряд взят условный, примерно такой, какие были еще много лет тому назад, со сравнительно тупою головною частью, чтобы сопротивление воздуха было велико, и при вычислении проявились бы с большею ясностью все особенности, с которыми при расчете можно встретиться. Так и здесь для расчета вращательного движения взят такой условный снаряд, при котором нагляднее проявляются особенности расчета.

Приведем сперва сводку всех численных данных и формул, которые нам понадобятся.

Вес снаряда $P = 360$ кг
Полукалибр $R = 0.152$ м
(калибр 30.4 см = 12 дм)
Начальная скорость $v_0 = 800$ м.с.

Моменты инерции

$$A = \gamma \frac{P}{g} R^2; \quad \gamma = 0.54; \quad A = 0.4603$$

$$B = 11A = 5.063.$$

Сопротивление воздуха

$$\rho = \pi R^2 v^2 K(v) f(z)$$

$$\rho_0 = \pi R^2 v_0^2 K(v_0); \quad \rho_1 = \pi R^2 v_1^2 K(v_1) f(z_1)$$

ρ_0 — наибольшее сопротивление, ρ_1 — наименьшее сопротивление

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v^2 K(v) f(z)}{v_0^2 K(v_0)}; \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{v^2 K(v) f(z)}{v_1^2 K(v_1) f(z_1)}$$

Момент количеств движения

$$Ap_0 = 2.15 \sqrt{h R \rho_0 B}$$

$$2k = 2.15; \quad h = 11; \quad \rho_0 = 1644 \text{ кг}$$

$$\lg Ap_0 = 2.4048$$

$$\lg p_0 = 2.7418; \quad p_0 = 552$$

$$s = t \sqrt{\frac{h R \rho_0}{B}} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{Ap_0}{B} t = 23.35 t$$

$$q = \frac{hR}{Ap_0} \int_0^t \rho dt = \frac{hR \rho_0}{Ap_0} \int_0^t \frac{\rho}{\rho_0} dt = 10.87 \int_0^t \frac{\rho}{\rho_0} dt =$$

$$= \frac{hR \rho_1}{Ap_0} \int_0^t \frac{\rho}{\rho_1} dt = 0.579 \int_0^t \frac{\rho}{\rho_1} dt$$

$$2k = 2.15; \quad 4k^2 = 4.62; \quad k^2 = 1.155$$

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$$

μ^2 суть числа отвлеченные, от выбора единиц не зависящие.

$$\frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q) = \frac{g Ap_0}{h R \rho v} \sin \varphi = \frac{g Ap_0}{h R \rho_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^v}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$dq = \frac{hR\rho_0}{Ap_0} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} dt = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot ds$$

$$ks = \frac{Ap_0}{2B} t$$

$$\frac{x}{b} = \frac{\mu^2}{\mu'} \lg \frac{1}{\mu}$$

$$\mu' = \frac{d\mu}{ds} = \frac{2kB}{Ap_0} \cdot \frac{d\mu}{dt}$$

$$\alpha_1 = -\varphi'(q) - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin \frac{x}{b} \sin ks + \varphi'(q) \cos \frac{x}{b} \cos ks$$

$$\beta_1 = -\varphi'(q) \cos \frac{x}{b} \sin ks - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin \frac{x}{b} \cos ks$$

$$[\alpha_1 + \varphi'(q)]^2 + \beta_1^2 = \frac{k^2}{\mu^2} [\varphi'(q)]^2 \left(1 - \frac{1}{2k^2} \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2} \frac{\rho}{\rho_0} \cos \frac{2x}{b} \right)$$

Вместо этой формулы для составления чертежа можно брать

$$[\alpha_1 + \varphi'(q)]^2 + \beta_1^2 = \frac{k^2}{\mu^2} [\varphi'(q)]^2$$

ибо на первой половине восходящей ветви, где отношение $\frac{\rho}{\rho_0}$ изменяется от 1 до 0.2, величина $\varphi'(q)$ — малая, на дальнейшей части отношение $\frac{\rho}{\rho_0}$ — малое и на чертеже, даже в крупном масштабе, каждый завиток спирали практически может быть очерчен четырьмя дугами круга.

Самое вычисление произведено в табл. 1.

Табл. 1 состоит из двух частей: первая — столбцы 1—20 и вторая — столбцы 21—25.

В первой части таблицы аргументом, т. е. переменной независимой, изменяющейся через равномерные, выражающиеся круглыми числами, промежутки служит угол наклона касательной φ , считаемый от отвесной линии; с этим аргументом произведено вычисление траектории в выше упомянутой статье, результатами коего мы пользуемся.

Вычисление элементов, определяющих

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	Аргумент $\varphi_1 = \varphi - 55^\circ$	$\lg v^2 K(v)$	$\lg f(z)$	(3) + (4)	$\lg \frac{p}{p_1}$	$\frac{p}{p_1}$	t	$\lg v$	(6) + (9)	$\lg \frac{Ap_0}{h R \varphi_1} - (10) + \lg 57.3$	$\lg \sin \varphi_1$	$\lg \varphi'(\varphi) = (11) + (12)$
0	55°00'	4.3527	0.0000	4.3527	1.2730	18.75	0°00'	2.9031	4.1761	2.8112	1.9134	2.7246
2	55 30	4.3149	1.9826	4.2975	1.2178	16.51	0.84	2.8808	4.0986	2.8887	1.9160	2.8047
4	56 00	4.2811	1.9669	4.2480	1.1683	14.73	1.64	2.8608	4.0291	2.9582	1.9186	2.8768
7	57 00	4.2224	1.9400	4.1624	1.0827	12.10	3.13	2.8262	3.9089	1.0784	1.9236	1.0002
9	58 00	4.1728	1.9143	4.0901	1.0104	10.24	4.50	2.7970	3.8074	1.1899	1.9284	1.1183
11	59 00	4.1302	1.8978	4.0280	0.9483	8.88	5.76	2.7718	3.7201	1.2672	1.9331	1.2003
13	60 00	4.0906	1.8810	3.9716	0.8919	7.80	6.95	2.7495	3.6414	1.3459	1.9375	1.2834
15	62 00	4.0189	1.8530	3.8719	0.7922	6.20	9.14	2.7119	3.5141	1.4732	1.9459	1.4191
17	64 00	3.9569	1.8308	3.7877	0.7080	5.10	11.12	2.6807	3.3887	1.5986	1.9537	1.5523
19	66 00	3.9041	1.8127	3.7168	0.6371	4.34	12.95	2.6543	3.2914	1.6961	1.9607	1.6568
20	68 00	3.8589	1.7981	3.6570	0.5773	3.78	14.64	2.6317	3.2090	1.7783	1.9672	1.7455
21	70 00	3.8087	1.7859	3.5946	0.5149	3.27	16.24	2.6119	3.1268	1.8605	1.9730	1.8335
22	72 00	3.7581	1.7757	3.5338	0.4541	2.85	17.75	2.5950	3.0491	1.9382	1.9782	1.9164
23	74 00	3.7124	1.7674	3.4798	0.4001	2.51	19.19	2.5803	2.9804	0.0069	1.9828	1.9897
24	76 00	3.6618	1.7598	3.4216	0.3419	2.20	20.57	2.5670	2.9089	0.0784	1.9869	0.0653
25	78 00	3.6091	1.7544	3.3635	0.2838	1.92	21.90	2.5557	2.8385	0.1488	1.9904	0.1382
26	80 00	3.5586	1.7498	3.3084	0.2287	1.69	23.18	2.5459	2.7746	0.2127	1.9934	0.2061
27	82 00	3.5152	1.7463	3.2615	0.1818	1.52	24.44	2.5375	2.7191	0.2682	1.9958	0.2640
28	84 00	3.4780	1.7436	3.2216	0.1419	1.39	25.66	2.5303	2.6722	0.3151	1.9976	0.3127
29	86 00	3.4458	1.7417	3.1875	0.1078	1.28	26.86	2.5240	2.6318	0.3555	1.9989	0.3544
30	88 00	3.4180	1.7404	3.1584	0.0787	1.20	28.05	2.5185	2.5972	0.3901	1.9997	0.3898
31	90 00	3.3948	1.7400	3.1348	0.0551	1.14	29.22	2.5139	2.5690	0.4183	0.0000	0.4183
32	92 00	3.3760	1.7403	3.1163	0.0364	1.09	30.37	2.5101	2.5465	0.4408	1.9997	0.4405
34	96 00	3.3474	1.7432	3.0906	0.0109	1.03	32.66	2.5044	2.5153	0.4720	1.9976	0.4696
36	100 00	3.3312	1.7485	3.0797	0.0000	1.00	34.95	2.5011	2.5011	0.4872	1.9934	0.4806
38	104 00	3.3258	1.7565	3.0823	0.0026	1.00	37.25	2.5000	2.5026	0.4847	1.9869	0.4716
40	108 00	3.3310	1.7670	3.0980	0.0183	1.04	39.60	2.5010	2.5193	0.4680	1.9782	0.4462

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
№ n	Аргумент $\varphi_1 = \varphi - 55^\circ$	$\lg v^2 K(v)$	$\lg f(s)$	(3) + (4)	$\lg \frac{\rho}{\rho_1}$	$\frac{\rho}{\rho_1}$	t	$\lg v$	(6) + (9)	$\lg \frac{g A p_0}{h R \rho_1} -$ $-(10) + \lg 57,3$	$\lg \sin \varphi_1$	$\lg \varphi'(q) =$ $-(11) + (12)$
42	112°00'	3.3438	1.7805	3.1243	0.0446	1.11	42°00'	2.5036	2.5482	0.4391	1.9672	0.4063
44	116 00	3.3646	1.7971	3.1617	0.0820	1.21	44.50	2.5078	2.5898	0.3925	1.9537	0.3512
46	120 00	3.3922	1.8172	3.2194	0.1397	1.38	47.11	2.5134	2.6531	0.3342	1.9375	0.2717
48	124 00	3.4246	1.8415	3.2661	0.1864	1.54	49.87	2.5198	2.7062	0.2811	1.9186	0.1997
50	128 00	3.4596	1.8697	3.3293	0.2496	1.78	52.81	2.5267	2.7763	0.2110	1.8965	0.1075
52	132 00	3.4950	1.9032	3.3982	0.3185	2.08	55.96	2.5336	2.8521	0.1352	1.8711	0.0063
54	136 00	3.5264	1.9426	3.4690	0.3893	2.45	59.37	2.5397	2.9290	0.0583	1.8418	1.9001
56	140 00	3.5483	1.9876	3.5359	0.4562	2.86	63.07	2.5443	3.0005	1.9868	1.8081	1.7949

В первых семи столбцах произведено вычисление отношения $\frac{\rho}{\rho_1}$, где ρ_1 есть *наименьшее* значение сопротивления воздуха; величины этого отношения вписаны в столбец 7. В столбец 8 вписаны значения времени t , соответствующие показанным в столбце 2 значениям аргумента φ , взятые прямо из сказанных вычислений траектории.

В столбцах 9—14 произведено вычисление величины

$$\frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q)$$

Самые величины $\varphi'(q)$ вписаны в столбец 14.

В столбцах 15—20 вычислены величины

$$k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{k}{\mu} \varphi'(q)$$

Вычисление произведено на логарифмической линейке 50 см длины.

Таблица 1 (продолжение)

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\varphi'(q)$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{p}{p_0} = \frac{r^2}{r_0^2}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{k}{r}$	$\frac{k}{r} \varphi'(q)$	Аргумент t	$\frac{p}{p_1}$	Суммы (22) попарно	Суммы (23) сверху	$q = c \int_0^t \frac{p}{p_1} dt$
2°549	0.059	1.096	1.048	0.954	1.024	2°61	54.0 ^s	1.90		193.20	109.5
2.245	0.065	1.090	1.044	0.958	1.030	2.32	56.0	2.01	3.91]	197.51	112.0
1.870	0.073	1.082	1.041	0.960	1.035	1.94	58.0	2.30	4.01	202.31	114.2
1.584	0.082	1.073	1.036	0.965	1.040	1.65	60.0	2.50	4.80	207.51	117.2
1.281	0.095	1.060	1.030	0.971	1.046	1.34	62.0	2.70	5.20	213.11	120.0
1.041	0.111	1.044	1.022	0.978	1.053	1.07	64.0	2.90	5.60	218.71	123.5
0.795	0.131	1.024	1.012	0.988	1.063	0.84					
0.624	0.152	1.003	1.001	0.999	1.074	0.67					

По данным столбцов 7 и 8 была построена кривая, показывающая зависимость $\frac{p}{p_1}$ от времени t . С этой кривой сняты затем величины $\frac{p}{p_1}$, соответствующие значениям аргумента t , показанным в столбце 21, и, по правилу трапеций, обычным приемом „суммы попарно“, „суммы сверху“, вычислена величина интеграла

$$q = \frac{hR_{p_1}}{Ap_0} \int_0^t \frac{p}{p_1} dt = 0.579 \int_0^t \frac{p}{p_1} dt$$

Значения переменной q вписаны в столбец 25.

Таким образом, в табл. 1 показаны все те величины, которые необходимы, чтобы построить нижеописанный чертеж, наглядно представляющий движение оси снаряда, вызываемое понижением касательной независимо от начальных условий.

Этот чертеж построен так: вообразим сферу, радиус которой возьмем равным 43 см, тогда дуга в 1° будет иметь длину в 7.5 мм, как это принято на нашем чертеже, уменьшенный снимок которого показан на фиг. 3.

Вертикальной плоскости стрельбы соответствует на этой сфере большой круг; опишем цилиндр, касающийся сферы по этому кругу, и отметим на нем точки $0, 1, 2^\circ, \dots$, соответствующие положению следа касательной, когда ее понижение составляет $0, 1, 2^\circ, \dots$; вообразим, что через центр сферы проводится

Таблица 2

Вычисление деривации

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Аргумент t	$\varphi(t)$	Сумма (2) попарно	Сумма (3) сверху	η	Аргумент t	$\varphi(t)$	Сумма (2) попарно	Сумма (3) сверху	η
0.0	0°0		0.0	0 ^m 0	34.0	43°4			
2.0	1.2	1.2	1.2	0.2	36.0	46.8	90.2	614.2	94 ^m 0
4.0	2.7	3.9	5.1	0.8	38.0	50.3	97.1	704.4	107.8
6.0	4.3	7.0	12.1	1.8	40.0	53.7	104.0	801.5	122.5
8.0	6.0	10.3	22.4	3.4	42.0	57.0	110.7	905.5	138.5
10.0	7.9	13.9	36.3	5.5	44.0	60.2	117.2	1016.2	155.5
12.0	9.9	17.8	54.1	8.2	46.0	63.3	123.5	1133.9	173.5
14.0	12.3	22.2	76.3	11.7	48.0	66.3	129.6	1257.9	192.5
16.0	14.7	27.0	103.3	15.8	50.0	69.2	135.5	1387.5	212.3
18.0	17.4	32.1	135.4	20.7	52.0	72.0	141.2	1523.0	233.0
20.0	20.2	37.6	173.0	26.5	54.0	74.6	146.6	1664.2	254.8
22.0	23.2	43.4	216.4	33.1	56.0	77.0	151.6	1810.8	277.2
24.0	26.4	49.6	266.0	40.6	58.0	79.4	156.4	1962.4	301.0
26.0	29.6	56.0	322.0	49.2	60.0	81.7	161.1	2118.8	323.0
28.0	33.1	62.7	384.7	59.0	62.0	83.9	165.6	2279.9	349.0
30.0	36.5	69.6	454.3	69.5	64.0	85.1	169.0	2445.5	374.2
32.0	40.0	76.5	530.8	81.5				2614.5	400.0
		83.4							

во всякий момент прямая, параллельная оси снаряда. След этой прямой опишет на нашем цилиндре ряд завитков. Развернув этот цилиндр на плоскость и получим прилагаемый чертеж, наглядно изображающий движение оси снаряда. Очевидно, что все завитки располагаются между прямою, изображающей след плоскости

стрельбы, и кривую $\frac{2k}{\mu} \varphi (q)$, огибающей их. Так как всех завитков около 250, то из них вычерчены лишь некоторые и показана их нумерация, пользуясь шкалой времени, помещенной рядом со шкалой углов φ .

Дальнейших пояснений этот чертеж по своей наглядности не требует.

§ 15. Для примера приложения формулы (47) в табл. 2 вычислена деривация и попутно — горизонтальная проекция той траектории, вертикальную проекцией которой мы все время пользовались.

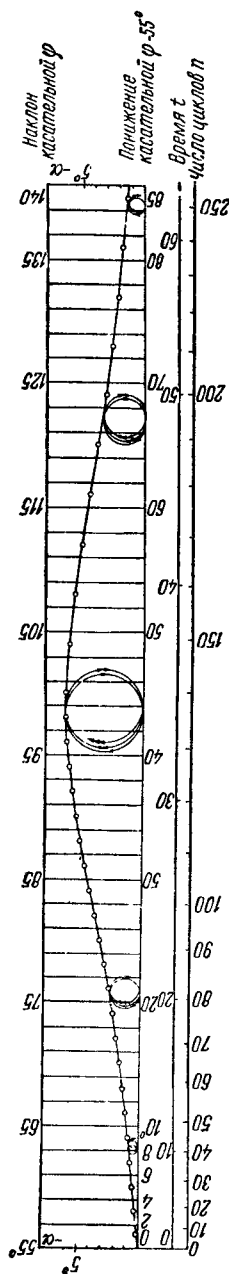
Так как интегрирование производится по времени, то эта переменная и взята за аргумент.

По данным, взятым из вычисления основной траектории, приведенным в столбцах 2 и 8 табл. 1, строим кривую углов $\varphi = \varphi_1 - 55^\circ$ понижения касательной и снимаем ее ординаты, соответствующие показанным в столбце 1 табл. 2 значениям времени t и выписываем их в столбце 2 этой таблицы, затем по правилу трапеций интегрируем. Полученные значения интеграла

$$\int_0^t \varphi dt$$

пропорциональны ординатам η .

Чтобы найти коэффициент пропорциональности, положим, что по опытам стрельбы известна деривация для точки падения, например 400 м, тогда коэффициент пропор-



Фиг. 3.

циональности будет $\frac{400}{2614.5}$, пользуясь которым и получим ординаты η траектории.

Этот же коэффициент может служить для расчетов деривации и горизонтальной проекции траектории при других углах возвышения.

В настоящее время при стрельбе по воздушным целям необходимо знать не только деривацию для точки падения, но и ординаты η для любой точки траектории, поэтому простой способ вычисления их имеет немаловажное практическое значение.

Вопрос этот по своей важности и обширности требует подробного изучения, в которое мы здесь вдаваться не можем.

Кроме того, необходимо отметить, что установление надежного способа вычисления деривации и ординат η доставит весьма значительную экономию в расходах на ее определение пристрелкою, для составления таблиц стрельбы, ибо достаточно будет определить деривацию для какой-либо одной дистанции, — для всех прочих она найдется расчетом.

НЬЮТОНОВА ТЕОРИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ

В 1832 г. на чердаке одного дома в Лондоне была обнаружена коробка, содержащая разного рода рукописи и старые письма.

По ближайшем рассмотрении оказалось, что в числе этих бумаг имеется 27 писем Ньютона к Флемстиду, автобиография Флемстида, составленный им каталог неподвижных звезд, обширная переписка со многими современными ему учеными, а также с его неизменным и единственным в продолжение 30 лет помощником по Гриничской обсерватории Абраамом Шарпом (Abraam Sharp), который за сто лет перед тем в этом доме проживал.

Эти бумаги были доставлены вице-президенту Лондонского астрономического общества Фр. Бальи, им приведены в порядок, звездный каталог перевычислен и исправлен, и все представлено Королевскому обществу (Лондонская Академия наук), по постановлению которого все это в 1835 г. было издано в виде громадного тома in 4° в 700 страниц на средства, отпущенные Адмиралтейством.

Книга эта носит название „An account of the Rev-d *John Flamsteed*, the first Astronomer Royal, compiled from his own manuscripts and other authentic documents never before published, to which is added his catalogue of stars corrected and enlarged by *Francis Baily Esq.* London, 1835“, LXXIII + 672 pp. in 4°; в продажу она не поступала, а была разослана обсерваториям, научным учреждениям и известным астрономам того времени, так что теперь эта книга довольно редкая (я случайно ее купил за 2½ шиллинга на барахолке в Лондоне).

Появление этой книги обратило на себя внимание ученых, как о том можно судить по обстоятельной о ней рецензии астронома Био в „Journal des Savants“ за 1836 г.

Письма Ньютона по большей части относятся к теории движения планет, спутников Юпитера, теории Луны и в связи с нею к теории астрономической рефракции, ибо Ньютон, не полагаясь на бывшие тогда в обиходе таблицы рефракции Кассини и Ла Гира, составил свои таблицы, которыми, как более точными, и советовал Флемстиду пользоваться, но их не разглашать.

Лишь в 1721 г., с согласия Ньютона, была опубликована в „Philosophical Transactions“ Галлеем, ставшим в 1719 г., после смерти Флемстида, королевским астрономом, одна из составленных Ньютоном таблиц рефракции, но без каких-либо указаний на способ ее составления.

В этой статье я излагаю Ньютонову теорию астрономической рефракции на основании тех кратких указаний, которые находятся в книге Балли; я пользуюсь при этом современными обозначениями высшего анализа, но не выхожу за пределы того, чем в то время Ньютон владел, чтобы, сохраняя сущность и метод его рассуждений, представить их в привычной теперешнему читателю форме.

§ 1. Ньютонова теория астрономической рефракции мало известна. О ней не только в руководствах по астрономии, но даже в специальной литературе или упоминается как бы мимоходом, или же дается неправильное представление, так что сущность работы Ньютона до сих пор остается неиспользованной; между тем правильное и полное развитие его теории может внести простоту и ясность в изложение теории астрономической рефракции вообще, которое, если доводить его до конца, т. е. до действительного вычисления таблиц, при обычном теперь изложении представляет для учащихся немалые затруднения.

Вместе с тем, в своей теории Ньютон встретил дифференциальное уравнение, которое и проинтегрировал численно, и таким образом составил свою таблицу, — это был первый пример такого интегрирования, которое за последние 20—25 лет получило столь

широкое распространение в приложениях математики к разного рода практическим вопросам, в особенности техническим.

При письме от 17 ноября 1694 г. Ньютон послал Флемстиду таблицу астрономической рефракции, „вычисленную при помощи некоторой теоремы“, которой, однако, в этом письме Ньютон не приводит.

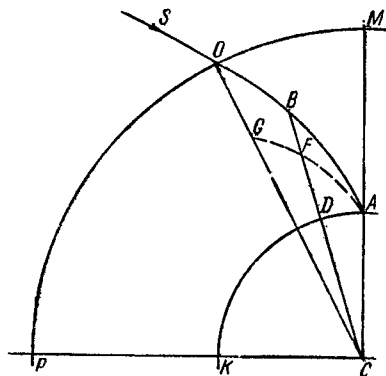
В письме от 4 декабря 1694 г. Ньютон просит Флемстида не оглашать посланную ему таблицу, обещая прислать другую, вычисленную на основании более точных предположений; затем, 20 декабря 1694 г., он пишет Флемстиду следующее письмо:

„Кембридж, декабря 20, 1694 г.

„Сэр!

„Я не держал в секрете основание, послужившее для составления таблицы рефракции, но опустил его вследствие поспешности, с которою я писал мое последнее письмо. Согласно вашему желанию, я изложу его теперь.

„Пусть (фиг. 1) AK представляет земной шар; предположим, что этот шар покрыт атмосферою, плотность которой убывает равномерно от поверхности Земли до верхней границы атмосферы, представляемой здесь кругом MOP . Пусть луч SO падает на границу атмосферы в точке O и, при прохождении через атмосферу до наблюдателя A непрерывно преломляясь, изгибается в кривую OBA .



Фиг. 1.

„От произвольной точки B этой кривой проводится прямая BC к центру Земли, пересекающая поверхность Земли в точке D . Берем между CB и CD среднюю пропорциональную CF , и пусть AFG есть геометрическое место точек F , т. е. та кривая, на которой постоянно находится точка F ;

если эта кривая AFG пересекает прямую OC в точке G , то полная рефракция луча, проходящего от O до A , пропорциональна площади $AFGC$, рефракция же при прохождении частей OB или BA сказанной кривой пропорциональна площадям $GFCC$ и $FACF$.

„Эта теорема может быть доказана геометрически, но доказательство слишком сложно для изложения в письме.

„Так как таблица рефракции, вычисленная мною на основании этой теоремы, согласуется с вашими наблюдениями¹ гораздо лучше, нежели обычные таблицы, то я полагаю, что вы признаете, что эта теорема представляет лучшее основание, нежели обычное предположение об однократном преломлении на границе атмосферы“.

Заметим здесь же, что кривая OBA неизвестна и длины BC и CD , между которыми надо брать среднюю пропорциональную CF , также неизвестны, Ньютон же никаких указаний о построении кривой OBA не дает, и так как Флемстид не настолько владел „прямым и обратным методом флюксий“, чтобы самому уравнение этой кривой вывести, то едва ли из теоремы Ньютона он уяснил себе способ составления таблицы рефракции.

В письме от 15 января 1695 г. Ньютон между прочим пишет:

„Теорема о рефракции, посланная вам, обладает тем недостатком, что преломляющая сила атмосферы предполагается вверху атмосферы столь же большою, как и внизу. Это заставило меня подумать о новой теореме, мне кажется, что я таковую нашел, и я хочу рассмотреть ее в дальнейшем. Площади в теореме, вам посланной, исчислены по лемме V третьей книги «Principia Mathematica», но это вычисление весьма сложно“.

16 февраля 1695 г. Ньютон пишет:

„Я все еще работаю над новой таблицей рефракции, но еще не закончил ее. Это — очень сложная и требующая большого труда работа, но кое-что мною уже сделано, ибо,

¹ Флемстид сообщил Ньютону сводку своих наблюдений при письме от 11 октября 1694 г., выдержка из которого приводится в § 6.

предполагая, что строение атмосферы такое, как указано в предложении 22-м второй книги «Principia» (которое, несомненно, и есть истинное), я нашел, что если горизонтальная рефракция есть $34'$, то рефракция при видимой высоте 3° составит $13'3''$; если же рефракцию при видимой высоте 3° принять равной $14'$, то горизонтальная рефракция составит немногим более $37''$.

Наконец, в письме от 15 марта 1695 г. Ньютон сообщает Флемстиду: „Я закончил таблицу рефракции и посылаю вам прилагаемую копию ее“.

Этой копии в собрании писем и бумаг, которыми пользовался Бальи, не оказалось, но ниже мы по сопоставлению некоторых чисел покажем, что это и есть таблица, опубликованная в 1721 г. Галлеем.

Ниже приведены выдержки из других писем Ньютона, относящиеся главным образом к этой второй таблице, а теперь перейдем к подробному рассмотрению его теоремы и способа составления первой его таблицы.

§ 2. Докажем прежде всего теорему Ньютона.

Пусть $O \dots B_{k+2}B_{k+1}B_kB_{k-1} \dots B_1A$ есть искривленный преломлением в атмосфере луч, попадающий в глаз наблюдателя в точке A , тогда угол $VAB_1 = z$ есть видимое зенитное расстояние, угол же $VEO = Z$ есть истинное зенитное расстояние, разность этих углов Ω и есть рефракция (фиг. 2).

Разделим угол $\theta = VCO$ на n равных частей и положим, что число n неопределенно возрастает; тогда каждую из этих частей мы обозначим через $d\theta$, примем θ за переменную независимую и найдем уравнение криволинейного луча и выражение рефракции.

Очевидно, что если бы луч исходил из точки A по направлению AB_1 , то он вышел бы из атмосферы в точке O по направлению OS на светило. Для удобства выкладок будем предполагать такой обращенный ход луча.

Делая указанные на чертеже (фиг. 2) обозначения, имеем для трех последовательных слоев атмосферы:

слой между ρ_k и $\rho_{k+1} \dots \mu_k = \mu$

По чертежу видно, что имеют место соотношения

$$z_1 = z + \varphi_0$$

$$z_2 = z_1 + \varphi_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_k = z_{k-1} + \varphi_{k-1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Z = z_{n-1} + \varphi_{n-1}$$

Отсюда следует, что полный угол рефракции, т. е. при прохождении всей толщи атмосферы от Q до A , есть

$$Z - z = \Omega = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k + \dots + \varphi_{n-1}$$

угол же отклонения луча при прохождении от B_k до A есть

$$\omega_k = z_k - z = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{k-1}$$

Отсюда, а также из чертежа следует, что

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \varphi_k$$

т. е.

$$d\omega_k = \dot{\omega}_k d\theta = \varphi_k$$

или, опуская значок k ,

$$d\omega = \dot{\omega} d\theta = \varphi \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\varphi_k = f_{k+1} - p_{k+1}$$

но по закону преломления

$$\sin p_{k+1} = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \sin f_{k+1}$$

т. е.

$$\sin(f_{k+1} - \varphi_k) = \frac{\mu_k + \mu_k d\theta}{\mu_k} \sin f_{k+1}$$

но

$$\sin(f_{k+1} - \varphi_k) = \sin f_{k+1} - \varphi_k \cos f_{k+1}$$

следовательно, будет

$$\varphi_k = -\frac{\dot{\mu}_k}{\mu_k} \operatorname{tg} f_{k+1} d\theta = -\frac{\dot{\mu}_k}{\mu_k} \operatorname{tg} f_k d\theta$$

ибо разность $f_{k+1} - f_k$ бесконечно малая.Опуская значок k , имеем, на основании формулы (1):

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \operatorname{tg} f \quad (2)$$

Из элементарного треугольника $B_{k+1}B_kN_{k+1}$ следует

$$\operatorname{tg} f_k = \frac{\rho_{k+1} d\theta}{d\rho_k} = \frac{\rho_k d\theta}{d\rho_k} = \frac{\rho_k}{\dot{\rho}_k}$$

значит, вообще будет

$$\operatorname{tg} f = \frac{\rho}{\dot{\rho}} \quad (2')$$

Отсюда, на основании (2), имеем:

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\dot{\rho}} \quad (3)$$

или, при теперешнем обозначении,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \frac{\rho}{\mu} \quad (3')$$

Следовательно, *общее выражение рефракции при какой угодно зависимости показателя преломления μ от расстояния ρ до центра Земли есть*

$$\Omega = -\int_0^\theta \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} d\theta \quad (3'')$$

Ньютон для первой своей таблицы предположил, что плотность атмосферы, а значит, и показатель преломления μ , убывает равномерно от поверхности Земли, соответствующей значению $\rho = a$, до границы атмосферы, соответствующей значению $\rho = R$. Обо-

значив показатель преломления у поверхности Земли через μ_0 и заметив, что на границе атмосферы он равен 1, получим:

$$\mu = \mu_0 - \frac{\mu_0 - 1}{R - a} (p - a) \quad (4)$$

Разность $\mu_0 - 1 = \varepsilon$ есть величина весьма малая, приблизительно равная $\frac{1}{3800}$, что Ньютону уже было известно. Заменяв в формуле (4) μ_0 через $1 + \varepsilon$, получим:

$$\mu = 1 + \varepsilon \frac{R - p}{R - a} \quad (4')$$

$$\dot{\mu} = - \frac{\varepsilon}{R - a} \dot{p}$$

Следовательно, с точностью до величин второго порядка относительно ε , иначе с относительною погрешностью, меньшей $\frac{1}{3800}$, в нашем вопросе вполне пренебрежимой, можно писать

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = - \frac{\varepsilon}{R - a} \dot{p} \quad (5)$$

на основании уравнения (3) получим:

$$\dot{\omega} = \frac{\varepsilon}{R - a} p \quad (6)$$

откуда следует

$$\Omega = \frac{\varepsilon}{R - a} \int_0^{\theta} p d\theta \quad (7)$$

Это и есть формула Ньютона, указанная в его письме к Флемстиду.

В самом деле, Ньютон не пользовался знаком интеграла, а заменял его определением площади кривой, для которой он давал уравнение или указывал построение. Так, в данном случае, обозначая на фиг. 1 радиус-вектор BC через r , имеем:

$$r^2 = ap$$

площадь же $AGCA$ будет

$$AGCA = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} a \int_0^{\theta} \rho d\theta \quad (8)$$

отсюда, на основании (7), следует

$$\Omega = \frac{2\varepsilon}{a(R-a)} AGCA \quad (9)$$

как это и сказано у Ньютона, с тою лишь разницею, что он, по обычаю того времени, не дает выражения коэффициента пропорциональности, а лишь указывает таковую.

Очевидно, что для рефракции ω на части AB будет

$$\omega = \frac{2\varepsilon}{a(R-a)} ABC \quad (10)$$

§ 3. В формулу Ньютона входит неизвестная функция ρ , которую надо выразить через θ , чтобы иметь возможность вычислять интегралы или площади. Кроме того, входит еще множитель

$$\frac{2\varepsilon}{a(R-a)} \quad (11)$$

закрывающий постоянные ε и R , которые также нужно определить на основании наблюдаемых значений рефракции.

Относительно этих вычислений никаких указаний, кроме сказанного в письмах 15 января и 16 февраля 1695 г., не дано.

Лемма V третьей книги „Principia“ гласит: „Найти параболическую кривую, проходящую через какое-либо заданное число точек“. Здесь приводятся Ньютоном его формулы интерполяции для ординат, как равноотстоящих, так и распределенных как угодно. Затем, в следствии к этой лемме, сказано: „На основании этого можно находить по приближению площади любых кривых, ибо если взять на той кривой, площадь которой ищется, какое-либо число точек и вообразить, что через них проведена парабола, то площадь этой параболы будет приблизительно равна искомой площади кривой. Площадь же всякой параболы всегда может быть найдена по известным геометрическим способам“.

Ясно, что в этих словах заключается сущность вывода всех формул приближенных квадратур, и из этих слов видно, что Ньютон владел теми из этих способов, которые следуют из формул интерполяции и постоянно применяются в астрономии под названием „механических квадратур“.

Но в нашем вопросе ищется не площадь заданной кривой, но и сама эта кривая неизвестна, и ее надо предварительно определить или построить.

Мы имеем соотношение

$$\mu_k \sin p_{k+1} = \mu_{k+1} \sin f_{k+1}]$$

но из треугольника $B_{k+1}CB_k$ следует

$$\rho_k \sin f_k = \rho_{k+1} \sin p_{k+1}$$

Перемножив эти равенства, получаем:

$$\mu_{k+1} \rho_{k+1} \sin f_{k+1} = \mu_k \rho_k \sin f_k$$

Совершенно так же будет

$$\mu_k \rho_k \sin f_k = \mu_{k-1} \rho_{k-1} \sin f_{k-1}$$

и т. д., что показывает, что произведение $\mu_k \rho_k \sin f_k$ есть величина постоянная, так что, опуская значок k , имеем:

$$\mu \rho \sin f = c_1 = \mu_0 \sin z \quad (12)$$

Но из уравнения (2') имеем:

$$\sin f = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}$$

подставляя в уравнение (12), получаем следующее дифференциальное уравнение криволинейного луча:

$$\mu \rho^2 = c_1 \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}$$

или, решая относительно $\dot{\rho}$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{c_1} \rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2} \quad (13)$$

в котором μ предполагается какою угодно заданной функцией от ρ и постоянная c_1 есть

$$c_1 = \mu_0 a \sin z \quad (12')$$

Таким образом, придерживаясь Ньютонова обозначения производной, мы имеем следующие три основные уравнения, заключающие в себе общую теорию астрономической рефракции:

$$\dot{\omega} = - \frac{\dot{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\dot{\rho}} \quad (3)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{c_1} \rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2} \quad (13)$$

$$c_1 = \mu_0 a \sin z \quad (12')$$

причем за переменную независимую принят угол θ . При обычных теперь обозначениях, из формулы (13) получается

$$d\theta = \frac{c_1 d\rho}{\rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2}}$$

Подставив это выражение в формулу (3'), мы получим для полной рефракции выражение

$$\Omega = - c_1 \int_a^R \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2}} \quad (14)$$

имеющее место при любой зависимости показателя преломления μ от расстояния слоя ρ до центра Земли.

Таким образом, все дело свелось к выбору или установлению зависимости μ от ρ и к вычислению интеграла (14) или, по терминологии Ньютона, квадратуры.

По отношению к показателю преломления μ Ньютон, как это следует из вышеприведенных его писем, сделал такие предположения:

а) для первой таблицы

$$\mu = 1 + \varepsilon \frac{R - \rho}{R - a} \quad (4')$$

б) для второй таблицы

$$\mu = 1 + \epsilon e^{-k \frac{p}{a}} \quad (4'')$$

как это видно по предложению 22-му второй книги „Principia“, на которое он ссылается.

Что же касается квадратур, то он указывает, что они выполняются по формулам, следующим из его формул интерполяции.

Величины ϵ и R , входящие в формулу (4'), и величины ϵ и k , входящие в формулу (4''), определяются по значениям рефракции, наблюдаемой при двух различных зенитных расстояниях.

§ 4. Разовьем теперь, придерживаясь тех методов, которыми Ньютон вообще пользовался, формулы, служащие для вычисления первой его таблицы, и сличим числа, получаемые по этим формулам, с числами таблицы Ньютона.

Как уже сказано, для первой своей теории Ньютон принимает

$$\mu = \mu_0 + (\mu_0 - 1) \frac{p - a}{R - a} \quad (15)$$

ход луча определяется вообще дифференциальным уравнением

$$c_1^2 p^2 = \mu^2 p^4 - c_1^2 r^2 \quad (16)$$

и величина рефракции — равенством

$$\Omega = \frac{\epsilon}{R - a} \int_0^p p db \quad (17)$$

Чтобы иметь в дальнейшем дело с безразмерными величинами, положим

$$\frac{p}{a} = 1 + s; \quad \frac{R}{a} = 1 + h; \quad \mu_0 = 1 + \epsilon; \quad \epsilon = \eta h; \quad \frac{c_1}{h} = c = (1 + \epsilon) \sin z \quad (18)$$

иными словами, если будем выражать длины в долях радиуса Земли, то h представит высоту атмосферы и s — возвышение рас-

считаемой точки над поверхностью Земли. При таких обозначениях уравнения (15) — (17) будут

$$\mu = \mu_0 - \eta s \quad (15')$$

$$c^2 s^2 = (\mu_0 - \eta s)^2 (1 + s)^4 - c^2 (1 + s)^2 \quad (16')$$

$$\Omega = \eta \int_0^s (1 + s) d\theta \quad (17')$$

Когда Ньютон говорит, что для исчисления площади надо рассматриваемую кривую заменить параболической, проходящей через достаточное количество точек, на данной кривой взятых, то, выражаясь теперешними терминами, это означает — надо подинтегральную функцию разложить в ряд по целым положительным степеням переменной независимой, взяв в этом ряду достаточное для получения требуемой точности число членов, значит, надо величину s , определяемую уравнением (16'), разложить в ряд по степеням переменной независимой θ . То обстоятельство, что уравнение (16') — дифференциальное, для применения способа неопределенных коэффициентов, которым пользовался Ньютон, никаких затруднений не представляло, так что, положив

$$s = \alpha \theta + \beta \theta^2 + \gamma \theta^3 \quad (18')$$

легко находим, на основании уравнения (16):

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0^2 - c^2}}{c} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{2\mu_0^2 - c^2 - \mu_0 \eta}{2c^2} \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{6\mu_0^2 - c^2 - 8\mu_0 \eta + \eta^2}{6c^2} \alpha \quad (21)$$

Тогда, заметив, что

$$c = \mu_0 \sin z \quad (22)$$

получим:

$$\alpha = \operatorname{ctg} z \quad (19')$$

$$\beta = \frac{2\mu_0 - \mu_0 \sin^2 z - \eta}{2\mu_0 \sin^2 z} \quad (20')$$

$$\gamma = \frac{6\mu_0^2 - \mu_0^2 \sin^2 z - 8\mu_0 \eta + \eta^2}{6\mu_0^2 \sin^2 z} \operatorname{ctg} z \quad (21')$$

и, на основании формулы (17'), будет

$$\Omega = \eta \left[\Theta + \frac{1}{2} \alpha \Theta^2 + \frac{1}{3} \beta \Theta^3 + \frac{1}{4} \gamma \Theta^4 \right] \quad (23)$$

причем угол Θ определяется равенством

$$h = \alpha \Theta + \beta \Theta^2 + \gamma \Theta^3 \quad (24)$$

ибо для точки входа луча в атмосферу

$$s = h \text{ и } \theta = \Theta$$

приближенные значения тех величин, с которыми мы имеем дело, как покажет пробное вычисление, таковы:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{3800}; \quad \eta \approx \frac{1}{6}; \quad h \approx \frac{1}{600}; \quad \Theta \approx \frac{1}{16} \quad (25)$$

так что коэффициенты β и γ умножаются на весьма малые числа, поэтому в их выражениях величиною ε , по сравнению с 1, можно пренебречь, тогда будет

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} (1 - \eta) + \left(1 - \frac{1}{2} \eta\right) \operatorname{ctg}^2 z \\ \gamma &= \frac{1}{6} (5 - 8\eta + \eta^2) \operatorname{ctg} z + \frac{1}{6} (6 - 8\eta + \eta^2) \operatorname{ctg}^3 z \end{aligned} \quad (26)$$

Когда $z = 90^\circ$, т. е. для горизонтальной рефракции Ω_0 , мы получим:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{2} (1 - \eta); \quad \gamma = 0 \quad (27)$$

$$\Omega_0 = \eta \left[\Theta_0 + \frac{1}{3} \beta \Theta_0^3 \right] \quad (28)$$

$$h = \frac{1}{2} (1 - \eta) \Theta_0^2 \quad (29)$$

Ниже будет показано, что величина рефракции при $z = 45^\circ$ есть

$$\omega = \varepsilon \left[1 - \frac{1}{2} (1 - \eta) h \right] \approx \varepsilon \quad (30)$$

Из этих уравнений, имея по наблюдениям значения Ω_0 и ω , легко находим величины ε , η , h , приближенные значения которых указаны выше [формула (25)].

При выводе формулы (23) мы принимали за переменную независимую величину θ , исходя из формулы (17), но можно исходить из формулы (17'), принимая за переменную независимую s , выразив $d\theta$ через ds из уравнения (16'); именно будет

$$d\theta = \frac{cds}{(1+s) \sqrt{(\mu_0 - \eta s)^2 (1+s)^2 - c^2}}$$

и мы получим:

$$\frac{1}{c\eta} \Omega = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{(\mu_0 - \eta s)^2 (1+s)^2 - c^2}} \quad (31)$$

Очевидно, что по теперешней терминологии интеграл в правой части — эллиптический первого рода, стоит только его привести к каноническому виду, чтобы воспользоваться таблицами Лежандра, но эти таблицы были изданы в 1826 г. — через 99 лет после смерти Ньютона, который, очевидно, вычислял этот интеграл совершенно иначе, разлагая подинтегральную функцию в ряд по степеням переменной независимой.

Прежде чем к такому разложению приступать, надо отдать себе отчет об относительной величине членов, чтобы для упрощения выкладок заранее отбросить те члены, которые на точность результата не влияют.

Мы видели, что приближенные значения постоянных таковы:

$$h \approx \frac{1}{600}; \quad \eta \approx \frac{1}{6}; \quad \varepsilon \approx \frac{1}{3800}; \quad \mu_0 = 1 + \varepsilon$$

Подкоренной многочлен, который мы обозначим через Q , в развитой форме есть

$$Q = \mu_0^2 - c^2 - 2\mu_0\eta s + 2\mu_0^2s + \mu_0^2s^2 + \eta^2s^2 - 4\mu_0\eta s^2 - 2\mu_0\eta s^3 + \\ + 2\eta^2s^3 + \eta^2s^4$$

Члены, содержащие переменную s , имеют наибольшие абсолютные значения, когда $s = h \approx \frac{1}{600}$, так что будет

$$\mu_0^2 - c^2 = \mu_0^2 \cos^2 z$$

$$2\mu_0^2h = 2 \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{300}$$

$$2\mu_0\eta h = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{1800}$$

$$\mu_0^2h^2 = 1 \cdot \frac{1}{600} \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{360000}$$

$$4\mu_0\eta h^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{360000} = \frac{1}{540000}$$

$$\eta^2h^2 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{360000} = \frac{1}{12960000}$$

$$2\mu_0\eta h^3 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{216000000} = \frac{1}{648000000}$$

$$2\eta^2h^3 = 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{16000000} = \frac{1}{388800000}$$

$$\eta^2h^4 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{12960000000} = \frac{1}{466560000000}$$

Сумма первых трех членов, принимая во внимание их знаки, даже при $z = 90^\circ$ равна $\frac{1}{360}$, при значениях же $z > 90^\circ$ будет больше $\frac{1}{360}$;

алгебраическая сумма следующих двух членов есть $\frac{1}{1080000}$, значит, отбрасывая их, мы сделаем в $\sqrt{Q}$ относительную погрешность $\frac{1}{2} \cdot \frac{360}{1080000} = \frac{1}{6000}$, которая в этом вопросе вполне пренебрежима; отсюда видно, что в выражении Q все члены, кроме первых трех, могут быть отброшены, и мы можем брать

$$\frac{1}{c\eta} \Omega = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2\mu_0^2 s - 2\mu_0 \eta s}} \quad (32)$$

Очевидно, что этот интеграл сейчас же находится в конечном виде, что и сделано ниже, но пока

$$\mu_0 \cos^2 z > 2(\mu_0 - \eta) h$$

т. е. в круглых числах $\cos^2 z > \frac{1}{360}$; $\cos z > 0.0527$, т. е. $z < 87^\circ$, мы имеем разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{Q}} &= \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 + \frac{2(\mu_0 - \eta)}{\mu_0} \cdot \frac{s}{\cos^2 z} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 + n \frac{s}{\cos^2 z} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 - \frac{1}{2} n \frac{s}{\cos^2 z} + \frac{3}{8} n^2 \frac{s^2}{\cos^4 z} - \dots \right] \end{aligned}$$

По подстановке и интегрировании, получим:

$$\Omega = \eta \operatorname{tg} z \left[h - \frac{1}{4} n h^2 \frac{1}{\cos^2 z} + \frac{1}{8} n^2 h^3 \frac{1}{\cos^4 z} - \dots \right]$$

и, заменив $h\eta$ его величиною ε и $\frac{1}{\cos^2 z}$ через $1 + \operatorname{tg}^2 z$, имеем по приведении:

$$\begin{aligned} \Omega &= \varepsilon \left[1 - \frac{1}{4} n h + \frac{1}{8} n^2 h^2 \right] \operatorname{tg} z - \frac{1}{4} \varepsilon n h (1 - n h) \operatorname{tg}^3 z + \\ &\quad + \frac{1}{8} \varepsilon n^2 h^2 \operatorname{tg}^5 z - \dots \end{aligned}$$

но

$$n = \frac{2(\mu_0 - \eta)}{\mu_0} \approx 2(1 - \eta); \quad nh \approx \frac{2}{600} \cdot \frac{5}{6} \approx \frac{1}{360}$$

поэтому можно писать

$$\Omega = \varepsilon \operatorname{tg} z - \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \eta) h \operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \eta)^2 h^2 \operatorname{tg}^5 z$$

или, при вычислении в секундах,

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z \quad (33)$$

причем

$$K = 206265 \varepsilon$$

$$L = \frac{1}{2} K (1 - \eta) h \quad (34)$$

$$M = L (1 - \eta) h = \frac{1}{2} K (1 - \eta)^2 h^2$$

Формула (33) по самому ее выводу имеет смысл, пока $z < 87^\circ$, но практически, когда $z > 81^\circ$, ряд становится медленно сходящимся, довольствоваться написанными тремя первыми его членами уже нельзя, и для вычисления рефракции при $z > 81^\circ$ надо пользоваться или формулой (23), или же тою формулою, которая получится, если выполнить в конечном виде интегрирование в формуле (32); для этого положим

$$Q(s) = \mu_0^2 \cos^2 z + 2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta) s = 2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta) t^2$$

тогда получим:

$$ds = 2 t dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{Q(s)}} = \frac{1}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \cdot \frac{1}{t}$$

пределы интегрирования

$$p = \frac{\mu_0 \cos z}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \quad \text{и} \quad q = \frac{\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}}$$

и будем иметь:

$$\frac{1}{\mu_0 \eta \sin z} \Omega = \frac{1}{\mu_0^2 - \mu_0 \eta} \left[\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)} - \mu_0 \cos z \right] =$$

$$= \frac{2h}{\mu_0 \cos z + \sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \quad (35)$$

Положив в этих формулах $z = 90^\circ$ и $z = 45^\circ$, получим, заменив μ_0 через 1:

$$\Omega_0 = \eta \sqrt{\frac{2h}{1 - \eta}}$$

$$(\omega = \varepsilon) \quad (36)$$

Первая из этих формул следует из формул (28) и (29), если пренебречь членом $\frac{1}{3} \beta \Theta_0^3$ в формуле (28), вторая следует из формулы (33), если отбросить в ней весьма малые члены, содержащие множители $\text{tg}^3 z$ и $\text{tg}^5 z$, когда при $z = 45^\circ$ $\text{tg} z = \text{tg}^3 z = 1$. Формулы (36), по присоединении к ним соотношения

$$h = \frac{\varepsilon}{\eta} \quad (37)$$

и послужат нам для определения величин η и h .

После того как эти величины найдены, вычисление рефракции может быть произведено по формуле (35), которая дает

$$\Omega = \frac{2\varepsilon \mu_0 \sin z}{\mu_0 \cos z + \sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \quad (35')$$

или, заменив $\mu_0 = 1 + \varepsilon$ через 1 и вычисляя в секундах, имеем:

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - \eta)}} \quad (38)$$

Хотя вычисление по этой формуле и весьма просто, но для углов $z \leq 81^\circ$ еще проще вычислять по формуле (33)

$$\Omega = K \text{tg} z - L \text{tg}^3 z + M \text{tg}^5 z$$

причем значения коэффициентов даются формулой (34), и лишь для значений $z \geq 81^\circ$ надо производить вычисление по формуле (38).

Само собою разумеется, что для определения величин η и h можно взять любую пару наблюдений рефракции при зенитных расстояниях, достаточно разнящихся одно от другого, или же, применяя методу наименьших квадратов, учесть всю совокупность имеющихся наблюдений. При Ньюtone этой методы не было, но он имел свою методу для исправления элементов кометных орбит по совокупности наблюдений, как то видно из предложения XLII, задача XXII, третьей книги „Principia“, которое гласит: „Исправить найденную орбиту кометы“. Метода, здесь изложенная, приложима и к исправлению значений η и h .

Ньютон, который, как известно,¹ превосходно, весьма тонко и точно чертил, применяя приближенные методы, пользовался и графическими приемами, причем при определении кометных орбит он действовал в определенной постепенности, которую в конце своего сочинения „De Mundi Systemate“ характеризует такими словами: „haec omnia perago primum graphice opere celeri et rudi, dein graphice maiori cum diligentia, ultimo per calculum numeralem“, т. е. „все это я выполняю сперва графически наскоро и грубо, затем графически с большею тщательностью и наконец численным расчетом“, всякий же расчет Ньютон производил „accuratissime“.

Следуя этому указанию, было бы естественно построить, сперва в мелком, а потом в крупном масштабе, график, откладывая по оси абсцисс $\operatorname{tg} z$ и по оси ординат величину рефракции $\mathcal{Q}$, которая Ньютону была известна по результатам наблюдений, сообщенных ему Флемстидом 11 октября 1694 г. (см. ниже), и оказалось бы, что все точки для значений z от 0 до 72° лежат на одной прямой или весьма близко к таковой. Уклон этой прямой доставляет значение K , а расположение точек на прямой показывает, что в этих пределах члены с коэффициентами L и M ничтожно малы; этим для величины K была бы учтена вся совокупность наблюдений.

¹ См., например, его чертеж, представляющий разрез глаза овцы, приведенный в книге: Brewster. Memoirs of Newton.

Не имея наблюдений Флемстида, мы обратимся к самой Ньютоновой таблице и, написав формулу

$$\Omega = K \operatorname{tg} z$$

возьмем $z = 45^\circ$, тогда будет $K = \Omega_{45^\circ} = 53''$, и, пользуясь простой логарифмической линейкой, в несколько минут времени (*opere celeri*) получим табл. 1, в которой значения, вычисленные по формуле

$$\Omega = 53'' \operatorname{tg} z$$

сопоставлены с числами таблицы Ньютона (*refractio verna et autumnna*).

Таблица 1

z	$53'' \operatorname{tg} z$	По таблице Ньютона	z	$53'' \operatorname{tg} z$	По таблице Ньютона	z	$53'' \operatorname{tg} z$	По таблице Ньютона
12°	11.3	11"	33°	34.4	34"	54°	73.0	73"
15	14.2	14	36	38.5	38	57	81.6	81
18	17.2	17	39	42.9	43	60	91.8	91
21	20.4	20	42	47.7	48	63	104.0	103
24	23.6	23	45	53.0	53	66	119.0	118
27	27.0	27	48	58.8	59	69	138.0	137
30	30.6	30	51	65.5	65	72	163.0	162

Как видно, совпадение почти полное, в особенности, если принять во внимание, что числа Ньютона, очевидно, округлены до ближайшей целой секунды.

Для следующего приближения берем формулу

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

и так как неизвестно, какое значение было бы при вычислении получено Ньютоном и насколько он его округлил, то берем Ω_{45° последовательно равными: $53''.00$, $52''.75$, $52''.38$, соответственно чему получаем такие же значения и для K .

По каждому из этих значений, на основании формулы (34), находим соответствующее значение ε .

Затем, по значению горизонтальной рефракции

$$\Omega_0 = 2000''$$

находим величины η и h ; вычисляем, пользуясь ими, L и K по формулам

$$L = \frac{1}{2} K (1 - \eta) h$$

$$M = L (1 - \eta) h = \frac{1}{2} K (1 - \eta)^2 h^2$$

после чего по формуле (33) вычисляем рефракцию Ω и сличаем ее с показанной в таблице Ньютона.

Поступая таким образом, мы приближенные значения постоянных ε и h , которыми пользовался Ньютон, определяем предварительно по формулам (28) и (29).

Поясним этот процесс примером. Мы имеем равенство, вычисляя в секундах,

$$K = 206265\varepsilon$$

и пусть $K = 52''.75$, тогда получим:

$$\varepsilon = \frac{52.75}{206265} = 0.00025594 \approx \frac{1}{3910}$$

На основании формул (28) и (29) для горизонтальной рефракции, удерживая лишь первые члены, имеем:

$$\Omega_0 = \eta \Theta_0$$

$$h = \frac{1}{2} (1 - \eta) \Theta_0^2$$

$$h\eta = \varepsilon$$

отсюда следует

$$\eta = \frac{\Omega_0^2}{2\varepsilon + \Omega_0^2} \quad (39)$$

или при вычислении в секундах и $\Omega_0 = 2000''$:

$$\eta = \frac{(2000 : 206265)^2}{2 \cdot 52.75 : 206265 + (2000 : 206265)^2} = \frac{(2000)^2}{2 \cdot 52.75 \cdot 206265 + (2000)^2} = 0.15527$$

$$h = \frac{\varepsilon}{\eta} = 0.0016471 \approx \frac{1}{607}$$

$$\Theta_0 = 0.06245 \approx \frac{1}{16}$$

$$\lg L = \bar{2}.5652$$

$$\lg M = \bar{5}.7092$$

таким образом, будет

$$\Omega = 52''.75 \operatorname{tg} z - [\bar{2}.5652]'' \operatorname{tg}^3 z + [\bar{5}.7092]'' \operatorname{tg}^5 z$$

Затем, в табл. 2, пользуясь четырехзначными логарифмами, произведено вычисление рефракции и сличение вычисленных по этой формуле значений с показанными в таблице Ньютона.

Совершенно так же поступлено и для значений

$$\Omega_{40^\circ} = 53''.00 \text{ и } \Omega_{45^\circ} = 52''.38$$

Самое вычисление, его результаты и их сличение показаны в табл. 3 и 4.

Эти результаты показывают, что числа табл. 3 совпадают с числами Ньютона (отличаясь от них в редких случаях, и то для больших зенитных расстояний, на $2''$), что дает основание предполагать, что для значений до $z = 85^\circ$ рефракция вычислена Ньютоном и по формуле (33) или по формуле, ей эквивалентной.

Возможно, что Ньютон ограничивался двумя членами и вычислял рефракцию для значений $z \leq 78^\circ$ по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z \quad (40)$$

взяв $K = 52''75$; $L = 0''03$; ибо, как показывает табл. 3, при этих значениях получается наилучшее согласие с числами Ньютона.

К таблицам 2—4

Вычисление рефракции по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

Общие для всех таблиц вспомогательные величины

$$\lg \operatorname{tg} z; \quad 3 \lg \operatorname{tg} z; \quad 5 \lg \operatorname{tg} z$$

выписываются на три отдельные полоски бумаги

z	$\lg \operatorname{tg} z$	z	$\lg \operatorname{tg} z$	$3 \lg \operatorname{tg} z$	$5 \lg \operatorname{tg} z$	z	$\lg \operatorname{tg} z$	$3 \lg \operatorname{tg} z$	$5 \lg \operatorname{tg} z$
12°	1.3275	48°	0.0456	0.1368		82°	0.8522	2.5566	4.2610
15	1.4281	51	0.0916	0.2748		83	0.9109	2.7327	4.5545
18	1.5118	54	0.1387	0.4161		84	0.9784	2.9352	4.8920
21	1.5842	57	0.1875	0.5625		85	1.0580	3.1740	5.2900
24	1.6486	60	0.2386	0.7158					
27	1.7072	63	0.2928	0.8784					
30	1.7614	66	0.3514	1.0542					
33	1.8125	69	0.4158	1.2474	2.0790				
36	1.8613	72	0.4882	1.4646	2.4410				
39	1.9084	75	0.5719	1.7157	2.8595				
42	1.9544	78	0.6725	2.0175	3.3625				
45	0.0000	81	0.8003	2.4009	4.0015				

Таблица 2

 $K = 53''00; \lg K = 1.7243; \lg L = 2.5708; \lg M = 5.7173$

z	$\lg K \operatorname{tg} z$	$\lg L \operatorname{tg}^2 z$	$\lg M \operatorname{tg}^3 z$	$K \operatorname{tg} z$	$-L \operatorname{tg}^2 z$	$M \operatorname{tg}^3 z$	Q	По таб- лице Нью- тона N	$Q - N$
12°	1.0518			11'27			11'27	11''	+0'27
15	1.1524			14.21			14.21	14	+0.21
18	1.2361			17.22			17.22	17	+0.22
21	1.3085			20.35			20.35	20	+0.35
24	1.3729			23.60			23.60	23	+0.60
27	1.4315			27.01			27.01	27	+0.01
30°	1.4857			30'60			30'60	30''	+0'60
33	1.5368			34.42			34.42	34	+0.42
36	1.5856			38.50			38.50	38	+0.50
39	1.6327			42.92			42.92	43	-0.08
42	1.6787			47.72			47.72	48	-0.28
45	1.7243			53.00			53.00	53	0.00
48	1.7699			58.87			58.87	59	-0.13
51	1.8159			65.45			65.45	65	+0.45
54	1.8630			71.29			71.29	73	-1.71
57	1.9118			81.62			81.62	81	+0.62
60	1.9629	1.2866		91.81	- 0'19		91.62	91	+0.62
63	2.0171	1.4492		104.0	- 0.28		103.7	103	+0.7
66	2.0757	1.6250		119.1	- 0.42		118.7	118	+0.7
69	2.1401	1.8182		138.1	- 0.66		137.4	137	+0.4
72	2.2125	0.0354		163.1	- 1.09		162.0	162	0.0
75	2.2962	0.2865		197.8	- 1.93		195.9	196	-0.1
78	2.3968	0.5883		249.8	- 3.88		245.9	245	+0.9
81	2.5246	0.9717		334.7	- 9.37		325.4	324	+1.4
82	2.5765	1.0274	1.9783	377.1	-10.65	0'9	367.3	363	+4.3
83	2.6352	1.3035	0.2718	431.7	-20.10	1.9	413.5	411	+2.5
84	2.7027	1.5060	0.6093	504.3	-32.07	4.1	476.3	472	+4.3
85	2.7823	1.7448	1.0073	605.8	-55.56	10.2	560.4	553	+7.4

Таблица 3

$$K = 52.75; \lg K = 1.7222; \lg L = 2.5652; \lg M = 5.7092$$

z	$\lg K \lg z$	$\lg L \lg^2 z$	$\lg M \lg^5 z$	$K \lg z$	$-L \lg^3 z$	$M \lg^5 z$	z	По таб- лице Нью- тона N	$z - N$
12°	1.0497			11.721			11.2	11"	+0.2
15	1.1503			14.14			14.1	14	+0.1
18	1.2340			17.14			17.1	17	+0.1
21	1.3064			20.25			20.2	20	+0.2
24	1.3708			23.48			23.5	23	+0.5
27	1.4294			26.88			26.9	27	-0.1
30	1.4836			30.45			30.4	30	+0.4
33	1.5347			34.25			34.2	34	+0.2
36	1.5835			38.33			38.3	38	+0.3
39	1.6306			42.72			42.7	43	-0.3
42	1.6766			47.49			47.5	48	-0.5
45	1.7222			52.75			52.7	53	-0.3
48	1.7678			58.59			58.6	59	-0.4
51	1.8138			65.13			65.1	65	+0.1
54	1.8609			72.59			72.6	73	-0.4
57	1.9097			81.23			81.2	81	+0.2
60	1.9608	1.2710		91.37	-0.719		91.2	91	+0.2
63	2.0150	1.4436		103.5	-0.28		103.2	103	+0.2
66	2.0736	1.6194		118.5	-0.42		118.1	118	+0.1
69	2.1380	1.8126		137.4	-0.65		136.7	137	-0.3
72	2.2104	0.0298		162.3	-1.07		161.2	162	-0.8
75	2.2941	0.2809		196.8	-1.91		194.9	196	-1.1
78	2.3947	0.5827		248.1	-3.83		244.3	245	-0.7
81	2.5225	0.9661		333.1	-9.25		323.8	324	-0.2
82	2.5744	1.1218	1.9702	375.3	-13.24	0.9	363.0	363	0.0
83	2.6331	1.2979	0.2637	429.6	-18.35	1.8	413.0	411	+2.0
84	2.7006	1.5004	0.6012	501.9	-31.65	4.0	474.2	472	+2.2
85	2.7802	1.7392	0.9992	602.8	-54.85	9.9	557.9	553	+4.9

Таблица 4

$$K = 52''.38; \lg K = 1.7191; \lg L = \bar{2}.5558; \lg M = \bar{5}.6935$$

z	$\lg K \operatorname{tg} z$	$\lg L \operatorname{tg}^3 z$	$\lg M \operatorname{tg}^5 z$	$K \operatorname{tg} z$	$-L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	∞	По таб- лице Нью- тона N	$\infty - N$
12°	1.0466			11''.13			11''.1	11''	+0''.1
15	1.1472			14.04			14.0	14	0.0
18	1.2209			16.63			16.6	17	-0.4
21	1.3033			20.11			20.1	20	+0.1
24	1.3677			23.32			23.3	23	+0.3
27	1.4263			26.69			26.7	27	-0.3
30	1.4805			30.24			30.2	30	+0.2
33	1.5316			34.01			34.0	34	0.0
36	1.5804			38.05			38.1	38	+0.1
39	1.6275			42.41			42.4	43	-0.6
42	1.6735			47.15			47.2	48	-0.8
45	1.7191			52.38			52.4	53	-0.6
48	1.7647			58.17			58.2	59	-0.8
51	1.8107			64.67			64.7	65	-0.3
54	1.8578			72.08			72.1	73	-0.9
57	1.9066			80.65			80.7	81	-0.3
60	1.9577	$\bar{1}.2716$		90.72	- 0''.19		90.5	91	-0.5
63	2.0119	$\bar{1}.4342$		102.8	- 0.27		102.5	103	-0.5
66	2.0705	$\bar{1}.6100$		117.6	- 0.41		117.2	118	-0.8
69	2.1349	$\bar{1}.8030$		136.4	- 0.63		135.8	137	-1.2
72	2.2073	0.0204		161.2	- 1.05		160.1	162	-1.9
75	2.2910	0.2715		195.5	- 1.87		193.6	196	-2.4
78	2.3916	0.5733		246.4	- 3.74		242.7	245	-2.3
81	2.5194	0.9567		330.7	- 9.05		321.7	334	-2.3
82	2.5713	1.1124	$\bar{1}.9545$	372.6	-12.95	0''.90	360.5	363	-2.5
83	2.6300	1.2885	0.2480	426.6	-19.43	1.77	409.0	411	-2.0
84	2.6975	1.4910	0.5855	498.3	-30.98	3.85	471.1	472	-0.9
85	2.7771	1.7298	0.9835	598.5	-53.68	9.63	554.4	553	+1.4

Заметим здесь же, что значение $h = 0.0016471 \approx \frac{1}{607}$ дает для границы атмосферы слишком малую величину, всего в 10.3 км, совершенно не отвечающую значению, следующему из явления вечерней и утренней зари, которое приводит к значению около $\frac{1}{50}$ радиуса Земли, т. е. около 125 км, как это было известно еще со времен Альгадена, т. е. XII в. Это было одним из обстоятельств, заставивших Ньютона заменить свою первую теорию второю; но прежде чем к ней перейти доведем разбор первой теории до конца, т. е. покажем, каким образом может быть вычисляема рефракция для значений $z > 78^\circ$, когда формула (40) становится непригодной.

§ 5. Для значений $z > 78^\circ$ вычисление можно производить непосредственно по формулам (19'), (20'), (23), которые являются совершенно общими, но вычисление по которым гораздо сложнее, нежели по формуле (38), практически дающей те же самые результаты, как и общие точные формулы.

В формуле (23) член $\frac{1}{4} \gamma \Theta^3$ оказывается настолько малым, что им можно пренебречь по сравнению с 1 и брать

$$\Omega = \gamma \Theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha \Theta + \frac{1}{3} \beta \Theta^2 \right]$$

определяя угол Θ из уравнения

$$h = \alpha \Theta + \beta \Theta^2 + \gamma \Theta^3$$

Величины α , β , γ вычисляются по формулам (19'), (20'), (21'). При $K = 52.75$ мы имеем, как выше указано:

$$\epsilon = \frac{52.75}{206265} = 0.00025594 \approx \frac{1}{3910}$$

$$\Omega_0 = 2000$$

$$\eta_1 = \frac{\Omega_0^2}{2K \cdot 206265 + \Omega_0^2} = \frac{4000000}{25761000} = 0.15527$$

$$h_1 = \frac{\varepsilon}{\eta_1} = 0.0016471$$

Мы поместили величины h и η значком 1, ибо они представляют лишь первое приближение, будучи получены из формул

$$\Omega_0 = \eta_1 \Theta_1$$

$$2h_1 = \beta \Theta_1^2 = (1 - \eta) \Theta_1^2$$

тогда как более точные значения даются формулами (23) и (24):

$$\Omega_0 = \eta \Theta \left(1 + \frac{1}{3} \beta \Theta^2 \right) = \eta \Theta \left[1 - \frac{1}{6} (1 - \eta) \Theta^2 \right] \quad (23')$$

$$2h = (1 - \eta) \Theta^2 \quad (24')$$

Очевидно, что первая из этих формул может быть написана так:

$$\Omega_0 = \eta \Theta \left[1 + \frac{1}{3} h \right] \approx \eta \Theta \left[1 + \frac{1}{3} h_1 \right]$$

поэтому, чтобы по первому приближению получить более точные значения η и h , надо в выражении

$$\eta_1 = \frac{\Omega_0^2}{2K \cdot 206265 + \Omega_0^2}$$

заменить Ω_0 через $\frac{\Omega_0}{1 + \frac{1}{3} h_1}$, и, следовательно, будет

$$\eta = \eta_1 \left(1 - \frac{2}{3} h_1 \right) = \eta_1 - \frac{2}{3} h_1 \eta_1$$

если отбрасывать малые величины высших порядков относительно h_1 . Так, в нашем случае получим:

$$\eta = 0.15527 - 0.00017 = 0.15510 \frac{\varepsilon}{\eta} = 0.0016488$$

$$\Theta = 0.062476$$

Определив таким образом величины η и h , задаем ряд значений зенитных расстояний z , начиная, например, с $z = 78^\circ$; затем, чтобы проверить точность и пригодность формулы (23), вычисляем по формулам (19')—(21') величины α , β , γ , а именно:

$$\alpha = \operatorname{ctg} z \quad (19')$$

$$\beta = \frac{1}{2} (1 - \eta) + \left(1 - \frac{1}{2} \eta\right) \operatorname{ctg}^2 z \quad (20')$$

$$\gamma = \left[\frac{1}{6} (5 - 8\eta + \eta^2) + \frac{1}{6} (6 - 8\eta + \eta^2) \operatorname{ctg}^2 z \right] \operatorname{ctg} z \quad (21')$$

по уравнению (24)

$$h = \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3$$

определяем соответствующее каждому зенитному расстоянию значение угла θ и, наконец, по формуле (23)

$$\Omega = \eta\theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha\theta + \frac{1}{3} \beta\theta^2 \right]$$

находим Ω .

Ввиду малости члена $\gamma\theta^3$, решение уравнения (24) проще всего выполняется так: сперва отбрасываем член $\gamma\theta^3$, получаем приближенное значение

$$\theta_1 = \frac{1}{2\beta} [-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta}] = \frac{2h}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta}} \quad (41)$$

причем надо непременно брать формулу

$$\theta_1 = \frac{2h}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta}}$$

чтобы избежать пользования в вычислении малой разностью $\sqrt{\alpha^2 + 4h\beta} - \alpha$ и происходящей от этого утраты точности. Вычислив приближенное значение θ_1 , вычисляем поправку к нему

$$\delta\theta_1 = - \frac{\gamma\theta_1^3}{\alpha + 2\beta\theta_1 + 3\gamma\theta_1^2}$$

Точно так же для величины Ω вычисляем сперва по Θ_1 приближенное значение

$$\Omega_1 = h\Theta_1 \left[1 + \frac{1}{2}\alpha\Theta_1 + \frac{1}{3}\beta\Theta_1^2 \right]$$

к которому присовокупляем затем поправку

$$\delta\Omega_1 = \eta\delta\Theta_1$$

Если довольствоваться, как делал Ньютон, точностью до 1 в значениях Ω , то поправки оказываются столь малыми, что вычислять их нет надобности.

Для $z = 90^\circ$, ввиду того, что $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$, величина Ω_0 вычисляется по формуле

$$\Omega_0 = \eta\Theta_0 \left[1 + \frac{1}{3}h \right]$$

причем

$$\Theta_0 = \sqrt{\frac{2h}{1-\eta}}$$

В нашем случае Ω_0 получится равным $2000''$, ибо мы от этой величины исходили, определяя постоянные η и h , но если бы мы воспользовались для этого определения значением рефракции $783''$ при $z = 87^\circ$, то мы получили бы для Ω_0 величину, несколько отличающуюся от $2000''$.

В табл. 5 это вычисление приведено со всею подробностью в том виде, как оно на самом деле выполнено.

Как видно, числа, начиная от $z = 87^\circ$, в особенности при z , равном 88° , 89° , $89^\circ 30'$, чувствительно отличаются от чисел, показанных в таблице Ньютона. По-видимому, это происходит потому, что здесь Ньютон дал числа, не вычисленные по его формуле, а введенные им непосредственно из наблюдений Флемстида, как о том подробнее сказано ниже.

При вычислении рефракции по формуле (38), определив K по значению рефракции при $z = 45^\circ$, достаточно определить лишь постоянную $2h(1-\eta)$ и нет надобности знать величины h и η в отдельности.

Вычисление рефракции для зенитных расстояний от $z = 78^\circ$ до $z = 90^\circ$
по формулам (23)

Данные: $K = 52.75$; $\lg \gamma = 1.19061$; $\frac{1}{2}(1 - \gamma) = 0.42245$; $\lg\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 1.96494$; $\lg 206265 \gamma = 4.50504$;
 $\lg h = 3.21719$; $\lg 4h = 3.81925$; $\lg 2h = 3.51822$

а) Вычисление величин α , β

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z	$\lg \alpha =$ $= \lg \operatorname{ctg} z$	$(2) \cdot 2$	$(3) +$ $+ 1.96494$	Num. (4)	$(5) +$ $+ 0.42245 =$ $= \beta$	$\lg \beta$	$(7) +$ $+ 3.81925 =$ $= \lg 4h\beta$	$4h\beta$	γ^2	$(9) + (10)$
78°	1.32747	2.65494	2.61988	0.04168	0.46413	1.66664	3.48589	0.0030612	0.0451790	0.0482402
81	1.19971	2.39942	2.36436	0.02314	0.44559	1.64894	3.46819	0.0029339	0.0250850	0.0280239
84	1.02162	2.04324	2.00818	0.01019	0.43264	1.63613	3.45538	0.0028535	0.0110470	0.0139005
85	2.94195	3.88390	3.84884	0.00706	0.42951	1.63297	3.45222	0.0028329	0.0076542	0.0104871
86	2.84464	3.68928	3.65422	0.00451	0.42696	1.63039	3.44964	0.0028161	0.0048896	0.0077052
87	2.71940	3.43880	3.40374	0.00253	0.42498	1.62838	3.44763	0.0028031	0.0027466	0.0055497
88	2.54308	3.03616	3.05110	0.00113	0.42358	1.62694	3.44619	0.0027938	0.0012194	0.0040132
89	2.24192	4.48384	4.44878	0.00028	0.42273	1.62606	3.44531	0.0027881	0.0003047	0.0030728
$89^\circ 30'$	3.94086	5.88172	5.84666	0.00007	0.42252	1.62585	3.44510	0.0027868	0.0000762	0.0025630

Таблица 5а (продолжение)
6) Вычисление углов θ и рефракции Ω

1	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z	$\text{ctg } z = \alpha$	$\sqrt{(11)}$	(12) + (13)	$\text{ctg } (14)$	$\frac{(15) + \lg 2h}{= \lg \theta}$	$\frac{(16) + 4,50504}{= \lg \Omega}$	Ω	По таблице Ньютона	(18) - (19)
78°	0.21256	0.21964	0.43220	0.36432	3.88254	2.38758	244".1	245"	- 0".9
81	0.15838	0.16740	0.32578	0.48708	2.00530	2.51034	323.8	324	+ 0.2
84	0.10510	0.11790	0.22300	0.65170	2.16992	2.67496	473.1	472	+ 1.1
85	0.08749	0.10242	0.18991	0.72146	2.23968	2.74472	555.6	553	+ 2.6
86	0.06993	0.08778	0.15775	0.80207	2.32029	2.82533	668.8	664	+ 4.8
87	0.05241	0.07450	0.12691	0.89651	2.41473	2.91977	831.3	820	+11.3
88	0.03492	0.06335	0.09827	1.00758	2.52580	3.03084	1074.0	1049	+25.0
89	0.01746	0.05561	0.07307	1.13626	2.65448	3.15952	1443.8	1392	+51.8
89°30'	0.00873	0.05351	0.06224	1.20593	2.72413	3.22917	1695.0	1665	+30.0
90	0						2000	2000	0.0

Примечание. Ст. 16 вычислен, чтобы показать, что в формуле $\Omega = \tau\theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha\theta^2 + \frac{1}{3} \beta\theta^3 \right]$ члены, содержащие множители θ^2 и θ^3 , могут быть отброшены по их малости сравнительно с 1.

Вычисление рефракции для зенитных расстояний
от $z=78^\circ$ до $z=90^\circ$ по формулам (23), пользуясь
логарифмической линейкой

Данные: $K=52.75$; $\eta=0.15510$; $\frac{1}{2}(1-\eta)=0.42245$; $1-\frac{1}{2}\eta=0.92245$;
 $h=0.0016489$; $206295 \eta=320000$; $4h=0.0065956$; $2h=0.0032978$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\log n$	η^2	$\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \cdot (3)$	$\beta = (4) + 0.42245$	$4h\beta = (5) \cdot 0.6596$	$\theta = (3) + (6)$	$\sqrt{(7)}$	$(8) + (2)$	$(9) \cdot 10^5 = 8$
78°	0.2126	0.04518	0.04170	0.46415	0.003061	0.04824	0.2196	0.4322	244.4
81	0.1584	0.02509	0.02315	0.44560	0.002940	0.02803	0.1674	0.3258	324.0
84	0.1051	0.01105	0.01019	0.43264	0.002854	0.01390	0.1179	0.2230	473.0
85	0.08749	0.007654	0.00706	0.42951	0.002834	0.01049	0.1024	0.1899	555.6
86	0.06993	0.004890	0.00451	0.42696	0.002817	0.007707	0.0878	0.1577	669
87	0.05241	0.002747	0.00254	0.42499	0.002804	0.005551	0.0745	0.1269	831
88	0.03492	0.001219	0.00113	0.42358	0.002794	0.004013	0.06335	0.0983	1073
89	0.01746	0.000305	0.00028	0.42273	0.002790	0.003095	0.05563	0.0731	1443
$89^\circ 30'$	0.00873	0.000076	0.00007	0.42252	0.002787	0.002863	0.05351	0.0622	1695
90	—	—	—	—	—	—	—	—	2000

Примечания. 1. Сличение чисел Ω табл. 5а и 5б показывает, что, пользуясь логарифмической линейкой и таблицами Барлоу, получаем практически одинаковые результаты с вычислениями по логарифмам, но при вычислении по логарифмической линейке требуется в два раза меньше работы. 2. Расхождение значений рефракции для $z \geq 86^\circ$ с числами таблиц Ньютона показывает, что он предпочел взять эти числа не по вычислению, а по наблюдаемым Флемстидам значениям, как это видно по таблице Флемстида в его письме от 11 октября 1694 г., приведенном в § 6.

Вычисление рефракции для первой

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - \eta)}}$$

1	2	3	4	5	6	7
z	$\cos z$	$\cos^2 z$	$\cos^2 z + 0.0027825$	$\sqrt{(4)}$	$(5) + (2)$	$\lg \sin z$
60°	0.50000	0.25000	0.25278	0.50277	1.00277	̄1.93753
63	0.45399	0.20611	0.20889	0.45704	1.91103	̄1.94988
66	0.40674	0.16543	0.16821	0.41011	1.81685	̄1.96073
69	0.35837	0.12843	0.13121	0.36223	1.72060	̄1.97015
72	0.30902	0.095491	0.098273	0.31349	1.62251	̄1.97821
75	0.25882	0.066989	0.069771	0.26414	1.52296	̄1.98494
78	0.20791	0.043227	0.046009	0.21452	1.42243	̄1.99040
81	0.15643	0.024472	0.027254	0.16509	1.32152	̄1.99462
82	0.13917	0.019368	0.022150	0.14883	1.28800	̄1.99575
83	0.12187	0.014852	0.017634	0.13279	1.25466	̄1.99675
84	0.10453	0.010926	0.013708	0.11708	1.22161	̄1.99761
85	0.08716	0.0075963	0.0103788	0.10187	1.18903	̄1.99834
86	0.06974	0.0048659	0.0076484	0.08746	1.15720	̄1.99894
87	0.05234	0.0027391	0.0055216	0.07431	1.12665	̄1.99940
88	0.034899	0.0012180	0.0040005	0.063250	1.098149	̄1.99974
89	0.017452	0.0003046	0.0030871	0.055562	1.073014	̄1.99993
89° 30'	0.008726	0.0000762	0.0028587	0.053466	1.062192	̄1.99998
90	0	0	0.0027825			

Величина $2h(1 - \eta)$ проще всего находится по значению Ω_0 рефракции при $z = 90^\circ$, именно будет

$$2h(1 - \eta) = \frac{4K^2}{\Omega_0^2}$$

так, например, при $K = 52''.75$ и $\Omega_0 = 2000''$ получается $2h(1 - \eta) = 0.0027825$. Пользуясь этим значением, в табл. 6 вычисляем величины рефракции Ω для z от 60° до 90° и сличаем как с чис-

Таблица 6

таблицы Ньютона по формуле

$$2K = 105.50; \lg 2K = 2.02325; 2h(1 - \eta) = 0.0027825$$

8	9	10	11	12	13	14	15
$\lg 2K \sin z$	$\operatorname{ctg} (6)$	$\lg \frac{\Omega}{\sin z} = (8) + (9)$	Ω	По таблице Ньютона	(11) — (12)	Ω табл. 3	(11) — (14)
1.96078	1.99882	1.95960	91.12	91"	+ 0.12	91.2	-0.08
1.97313	0.04047	2.01360	103.2	103	+ 0.2	103.8	0.0
1.98398	0.08785	2.07183	118.0	118	0.0	118.1	-0.0
1.99340	0.14231	2.13571	136.7	137	- 0.3	136.7	0.0
2.00146	0.20586	2.20732	161.2	162	- 0.8	161.2	0.0
2.00819	0.28153	2.28972	194.4	196	- 1.1	194.9	0.0
2.01365	0.37425	2.38790	244.3	245	- 0.7	244.3	0.0
2.01787	0.49280	2.51067	324.1	324	+ 0.1	323.8	+0.3
2.01900	0.54061	2.55961	362.8	363	- 0.2	363.0	-0.2
2.02000	0.59404	2.61404	411.2	411	+ 0.2	413.0	-1.8
2.02086	0.65441	2.67527	473.4	472	+ 1.4	474.2	-0.8
2.02159	0.72347	2.74506	556.0	553	+ 3.0	557.9	-1.9
2.02219	0.80355	2.82574	669.5	664	+ 5.5		
2.02265	0.89740	2.92005	831.9	820	+11.9		
2.02299	1.00811	3.03110	1074.2	1049	+25.2		
2.02318	1.13659	3.15977	1444.6	1392	+52.6		
2.02323	1.20626	3.22949	1696.2	1665	+31.2		
0.02325	1.27778	3.30003	2000.0	2000	0.0		

лами Ньютона, так и с числами, полученными по формуле (33). Очевидно, что для определения величины $2h(1 - \eta)$ можно воспользоваться значениями рефракции не только при $z = 90^\circ$, но и при всяком ином значении z , именно на основании формулы

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - \eta)}}$$

Вычисление рефракции для таб

$$\Omega = \eta \theta \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \theta + \frac{1}{3} \beta \theta^2 \right)$$

$$\eta = 0.16293; 1 - \eta = 0.83707;$$

$$\lg h = \bar{3}.25362; \lg 2h = \bar{3}.55465;$$

$$2K = 120''.4$$

1	2	3	4	5	6
z	$\alpha = \operatorname{ctg} z$	α^2	$(3) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) =$ $= (3) \cdot 0.9185$	$\beta =$ $(4) + 0.41853$	$4h \beta = (5) \quad 4h$
78°	0.21256	0.045180	0.04150	0.46003	0.003300
81	0.15838	0.025090	0.02305	0.44158	0.003165
82	0.14054	0.019751	0.01814	0.43667	0.003132
83	0.12278	0.015076	0.01385	0.43238	0.003100
84	0.10510	0.011046	0.01016	0.42869	0.003077
85	0.08749	0.007654	0.00703	0.42556	0.003050
86	0.06993	0.004890	0.00449	0.42302	0.003032
87	0.05241	0.002747	0.00252	0.42105	0.003019
88	0.03492	0.001219	0.00112	0.41965	0.003008
89	0.01746	0.000305	0.00028	0.41881	0.003002
89°30'	0.00873	0.000076	0.00007	0.41860	0.003000

Примечание. Для этой таблицы коэффициенты K и η определены по значениям K, L и M определены иначе; отсюда различие в значениях величин Ω .

будет

$$2h(1 - \eta) = \frac{4K \sin z}{\Omega^2} [K \sin z - \Omega \cos z] \quad (42)$$

При определении величины $2h(1 - \eta)$ по этой формуле, мы не получим значения $\Omega_0 = 2000''$; так, например, если при $z = 87^\circ$ взять $\Omega = 820''$, как показано в таблице Ньютона, то получится $2h(1 - \eta) = 0.0030899$ и $\Omega_0 = 1898''$.

Если при $z = 90^\circ$ взять $\Omega_0 = 1970''$, то получатся следующие значения Ω , отличающиеся от показанных в Ньютоновой таблице менее чем на $40''$:

Таблица 7

лицы Штремгрена по формуле

$$\frac{1}{2} (1 - \eta) = 0.418535; 1 - \frac{1}{2} \eta = 0.918535$$

$$\lg 4h = 8.85568; 4h = 0.0071726$$

$$2h = 0.0035863$$

7	8	9	10	11	12
(3) + (6)	$\sqrt{7}$	(8) + (2)	120.4 : (9) = Ω	Рефракции по таблице Штремгрена	(10) — (11)
0.048480	0.22018	0.43274	278.3	276.9	+ 1.4
0.028255	0.16809	0.32647	368.8	365.3	+ 3.5
0.022883	0.15127	0.29181	412.6	407.6	+ 5.0
0.018176	0.13482	0.25760	467.4	460.2	+ 7.2
0.014127	0.11885	0.22395	537.6	527.1	+ 9.5
0.010704	0.10346	0.19095	630.5	614.6	+15.9
0.007922	0.08900	0.15893	757.6	733.0	+24.6
0.005766	0.07593	0.12834	938.1	899.8	+38.3
0.004227	0.06515	0.10007	1203.2	1147.2	+56.0
0.003307	0.05751	0.07497	1606.0	1537.1	+68.9
0.003076	0.05546	0.06419	1875.7	1821.3	+54.4
			2198.6	2198.6	0.0

ниям рефракции 60.2 при $z = 45^\circ$ и 2198.6 при $z = 90^\circ$, тогда как в табл. 8 коэффи-

t	Ω	Newt.	$\Omega - \text{Newt.}$
87°	828.2	820"	+ 8.2
88	1067.0	1049	+18.0
89	1429.7	1392	+37.7
89°30'	1702.2	1665	+37.2
90	1970	2000	—30.0

Интересно сопоставить числа, получаемые по столь простым формулам при первой гипотезе Ньютона, с современными таблицами рефракции, определив величины η и h по значениям Ω_{45° и Ω_0 , показанным в этих таблицах, и провычислив по формулам (33) и

затем по формуле (38) все остальные. Это сличение, выполненное в табл. 7 и 8, показывает замечательную точность формул Ньютона даже при первой его гипотезе, в которой действительное строение атмосферы заменено воображаемым, имеющим с действительным, казалось бы, столь мало общего. Объяснение этого обстоятельства будет получено ниже, при рассмотрении второй теории Ньютона.

Таблица Штремгрена¹ составлена на основании пулковских таблиц рефракции, в свою очередь составленных на основании совокупности пулковских наблюдений; обладая современной точностью, эта таблица может отличаться от наблюдений лишь в десятых долях секунды. Таким образом, можно принять, что таблица Штремгрена как бы заменяет собою обработанную сводку пулковских наблюдений рефракции, приведенной к температуре 0°С и высоте барометра 760 мм, поэтому, составляя табл. 7, 8 и 9, мы как бы применяем первую теорию Ньютона к пулковским наблюдениям, подобно тому как он сам ее применил к наблюдениям Флемстида.

Сопоставив столбец 13 табл. 6 со столбцом 9 табл. 9, получаем такую табличку:

z	Столбец 13 табл. 6	Столбец 9 табл. 9	z	Столбец 13 табл. 6	Столбец 9 табл. 9
60°	+0.1	+0.1	83°	+ 0.2	7.2
63	+0.2	0.2	84	+ 1.4	10.5
66	0.0	0.3	85	+ 3.0	15.9
69	-0.3	0.4	86	+ 5.5	24.6
2	-0.8	0.7	87	+11.9	38.3
75	-1.1	1.1	88	+25.2	56.0
78	-0.7	1.4	89	+52.6	69.8
81	+0.1	3.5	89°30	+31.2	54.0
82	-0.2	5.0	90	0.0	0.0

¹ Dr. Elis Strömberg und Dr. Bengt Strömberg. Lehrbuch der Astronomie, Berlin, 1933.

Таблица 8

Вычисление рефракции, показанной в таблице
Штремгрена (1933 г.), составленной на основании
пулковских наблюдений по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

$$\lg K = 1.78005; \lg L = \bar{2}.8245; \lg M = \bar{4}.1584$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z	$\lg \operatorname{tg} z$	$\lg K \operatorname{tg} z$	$\lg L \operatorname{tg}^3 z$	$\lg M \operatorname{tg}^5 z$	$K \operatorname{tg}^3 z$	$-L \operatorname{tg}^5 z$	$M \operatorname{tg}^7 z$	Ω	Рефракция по таблице Штремгрена	(9) - (10)
12°	1.32747	1.10752			12.81			12.8	12.8	0.0
15	1.42805	1.20810			16.14			16.1	16.1	0.0
18	1.51178	1.29183			19.58			19.6	19.6	0.0
21	1.58418	1.36428			23.13			23.1	23.1	0.0
24	1.64858	1.42863			26.83			26.8	26.8	0.0
27	1.70717	1.48722	3.9460		30.71	- 0.009		30.7	30.7	0.0
30	1.76144	1.54149	2.1088		34.79	- 0.013		34.8	34.8	0.0
33	1.81252	1.59257	2.2621		39.14	- 0.018		39.1	39.1	0.0
36	1.86126	1.64131	2.4083		43.78	- 0.026		43.8	43.8	0.0
39	1.90837	1.68842	2.5496		48.80	- 0.035		48.7	48.7	0.0
42	1.95444	1.73449	2.6878		54.26	- 0.048		54.2	54.2	0.0
45	0.00000	1.78005	2.8245		60.26	- 0.057		60.2	60.2	0.0
48	0.04556	1.82561	2.9613		66.93	- 0.091		66.8	66.8	0.0
51	0.09163	1.87168	1.0994		74.42	- 0.13		74.3	74.3	0.0
54	0.13874	1.91879	1.2407		82.94	- 0.17		82.8	82.7	+0.1
57	0.18748	1.96753	1.3871		92.79	- 0.24		92.5	92.5	0.0
60	0.23856	2.01861	1.5402		104.38	- 0.35		104.0	104.0	0.0

Таблица 8 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	$\lg \operatorname{tg} z$	$\lg K \operatorname{tg} z$	$\lg L \operatorname{tg} z$	$\lg M \operatorname{tg} z$	$K \operatorname{tg} z$	$-L \operatorname{tg}^2 z$	$M \operatorname{tg}^2 z$	Q	Рефракция по таблице Штремгрена	(9) — (10)
63°	0.29283	2.07288	1.7030		118.27	— 0.51		117.6	117.7	—0.1
66	0.35142	2.13147	1.8788		135.35	— 0.76		134.6	134.5	+0.1
69	0.41582	2.19587	0.0720		156.99	— 1.18		155.8	155.8	0.0
72	0.48822	2.26827	0.2892	2.4025	185.47	— 1.95	0.02	18 3.5	183.5	0.0
75	0.57195	2.35200	0.5403	1.0181	224.91	— 3.47	0.10	221.5	221.5	0.0
78	0.67253	2.45258	0.8421	1.5210	283.52	— 6.95	0.33	276.9	276.9	0.0
81	0.80029	2.58034	1.2254	0.1599	380.49	— 16.80	1.45	365.1	365.3	—0.2
82	0.85220	2.63225	1.3805	0.4194	428.80	— 24.02	2.63	407.4	407.6	—0.2
83	0.91086	2.69091	1.5571	0.7127	490.81	— 36.07	5.16	459.9	460.2	—0.3
84	0.97838	2.75843	1.7596	1.0503	573.37	— 57.49	11.23	527.1	527.1	0.0
85	1.05805	2.83810	1.9986	1.4486	688.81	— 77.68	28.09	617.2	614.6	+2.6

Примечания. 1. Коэффициенты K , L , M определены по значениям рефракций, показанным в таблице Штремгрена при $z=45^\circ$, $z=78^\circ$ и $z=84^\circ$; по этим коэффициентам вычислены значения Q . 2. Сличение чисел Q и чисел таблицы Штремгрена до $z=84^\circ$ показывает полное их совпадение, поэтому если бы Ньютон располагал не наблюдениями Флемстида, а пулковскими, на которых основал свою таблицу Штремгрена, то до $z=84^\circ$ таблица Ньютона совпадала бы с таблицей Штремгрена, данной в его „Lehrbuch der Astronomie“ (Berlin, 1933). 3. В таблице Штремгрена предполагается температура 0° и высота барометра 760 мм. Если показанную в руководстве Ньюкомба (S. Newcomb. Spherical Astronomy. 1906) таблицу рефракции привести к 0° С и высоте барометра 760 мм, то получается полное ее совпадение с таблицей Штремгрена.

Таблица 9

Вычисление рефракции для таблицы Штремгрена
по первой теории Ньютона

$$K = 60''.20; \eta = 0.16293; \lg h = \bar{3}.25362$$

$$L = \frac{1}{2}(1 - \eta) hK = 0''.04513; \lg L = \bar{2}.6544$$

$$M = (1 - \eta) hL = 0''.00006758; \lg M = \bar{5}.8298$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	$K \operatorname{tg} z$ (см. табл. 7)	$-L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	z по формуле (33)	z по формуле (23) (см. табл. 7)	z	По таблице Штремгрена	(7) — (8)
60°	104''.38	— 0.23		104''.1		104''.1	104''.0	+ 0.1
63	118.27	— 0.27		118.0		118.0	117.7	+ 0.2
66	135.35	— 0.51		134.8		134.8	134.5	+ 0.3
69	156.99	— 0.80	0.01	156.2		156.2	155.8	+ 0.4
72	185.47	— 1.29	0.02	184.2		184.2	183.5	+ 0.7
75	224.91	— 2.35	0.05	222.6		222.6	221.5	+ 1.1
78	283.52	— 4.70	0.16	279.0	278''.3	279.0	276.9	+ 2.1
81	380.49	— 11.36	0.68	369.4	368.8	368.8	365.3	+ 3.5
82	428.80	— 16.26	1.23	413.4	412.6	412.6	407.6	+ 5.0
83	490.81	— 24.38	2.42	468.2	467.4	467.4	460.2	+ 7.2
84	573.37	— 38.87	5.27	539.2	537.6	537.6	527.1	+ 10.5
85	688.81	— 67.36	13.18	633.9	630.5	630.5	614.6	+ 15.9
86					757.6	757.6	733.0	+ 24.6
87					938.1	938.1	899.8	+ 38.8
88					1203.2	1203.2	1147.2	+ 56.0
89					1606.0	1606.0	1537.1	+ 68.9
89° 30'					1875.7	1875.7	1821.3	+ 54.4
90					2198.6	2198.6	2198.6	0.0

Примечание. Числа столбца 5 рассчитаны по теоретическим значениям L и M по формуле (34).

Это сопоставление показывает явно систематический характер отклонений: для столбца 2 начиная с $z = 82^\circ$, для столбца 3 начиная с $z = 60^\circ$.

Это дает полное основание думать, что Ньютон, вычислив по первой своей теории величину рефракции и получив числа, обозначенные у нас через Ω , сличил их со значениями рефракции, сообщенными ему Флемстидом, и, заметив систематический ход отклонений начиная от $z = 83^\circ$, он присовокупил к вычисленным теоретически числам эти отклонения, так чтобы показанная в его таблице рефракция согласовалась с наблюдениями Флемстида.

Иными словами, он в свою теоретическую таблицу ввел эмпирическую поправку для значений от $z = 83^\circ$ до $z = 90^\circ$. Он не считал нужным это объяснять Флемстиду, как не считал нужным ни давать ему полного изложения своей первой теории, ни даже намека, как им вычислена вторая таблица.

Отсюда ясно, что если бы Ньютон имел в своем распоряжении пулковские наблюдения, то, поступив совершенно так же, как он поступил с наблюдениями Флемстида, он получил бы таблицу Штремгрена.

Здесь ясно видна выгода такой методы, — она допускает графическое сглаживание. В самом деле, построить кривую, ординаты которой изображались бы такими числами, как: 245, 324, 363, 411, 472, 553, 664, 820, 1049, 1392, 1665, 2000, в достаточно крупном масштабе, чтобы можно было ручаться за одну единицу последнего знака (т. е. чтобы он изображался длиной не меньше одного миллиметра), почти невозможно, но это не представляет никаких затруднений для столь малых чисел, как показанные в столбце 2 вышеприведенной таблички отклонений, и такая графическая обработка будет обладать не меньшею точностью, нежели самая полная и строгая теория.

В этом смысле первая теория Ньютона не утратила своего значения и сейчас, и не составит ли для учащихся полезного упражнения такая задача: по данной сводке наблюдений по формуле (33) вычислить рефракцию для значений z от 0 до 78° , затем от 78° до 90° вычислить значения рефракции по формуле (38), как пока-

зано в табл. 6, полученные отступления сгладить графически и таким образом составить полную таблицу рефракции? Это потребует у учащегося затраты трех или четырех часов работы, но зато внесет полную ясность и отчетливость в дело.

§ 6. Прежде чем приступить к выводу формул, относящихся ко второй теории Ньютона, приведем несколько выдержек из его переписки с Флемстидом, относящихся главным образом к этой теории.

При письме от 11 октября 1694 г. Флемстид доставил Ньютону следующую табличку рефракции близ горизонта и, кроме того, подробную сводку наблюдений, копии которой, к сожалению, в материалах, доставленных Бальи, не оказалось.

Табличка, сообщенная Флемстидом, такова:

Зенитное расстояние	Рефракция			
	по Кассини	по Лавиру	по Буше	по наблю- дениям
90°	32' 20"	32' 0"	30' 0"	33' 0"
89	27 56	26 25	25 12	23 0
88	21 4	20 43	18 24	17 30
87	16 6	15 44	13 55	14 0

По поводу этой таблички Флемстид замечает:

„Как вы видите, все таблицы грешат в том, что в них рефракция уменьшается приблизительно на 5' между 90 и 89°, тогда как между 89 и 88° уменьшение показано больше чем 6'. Напротив того, наблюдения дают 5' $\frac{1}{2}$ между 88° и 89° и 10' между 89° и горизонтом. Какова этому причина, я не имею теперь времени, чтобы ее исследовать, но кажется, что среда, в которой рефракция происходит, не равномерная, как это предполагали составители таблиц в своих теориях. Этот вопрос заслуживает вашего внимания, и мне желательно, чтобы вы об этом в свободное время

подумали. Наблюдения и мои из них выводы неоспоримы (incon-testable)".

В ответ на это письмо Ньютон 24 октября 1694 г. пишет Флемстиду:

«Сердечно благодарю вас за ваши сообщения, особенно за таблицу рефракции вблизи горизонта. Причину различной величины рефракции при той же самой высоте близ горизонта я усматриваю в различии нагревания воздуха в нижних его слоях, ибо когда воздух от теплоты разрежен, он преломляет менее, когда же от холода он уплотнен, он преломляет сильнее. Эта разница должна быть более чувствительной, когда луч идет по нижним слоям атмосферы на протяжении многих миль, ибо лишь эти слои то разрежаются, то уплотняются теплом и холодом, тогда как средние и верхние слои всегда холодные. Я того мнения, что рефракция в верхних слоях слегка изменяется вместе с весом воздуха, показываемым барометром, ибо когда воздух тяжелее и, значит, плотнее, он преломляет более, нежели когда он легче и реже. Я бы желал, чтобы при всех ваших наблюдениях, где надо принимать во внимание рефракцию, вы записывали высоту барометра и теплоту воздуха, чтобы изменения рефракции от веса и теплоты воздуха могли впоследствии быть учтены, когда величины этих изменений станут известны».

По поводу этого замечательного письма необходимо заметить, что барометр, который Ньютон называет „бароскоп“, в то время существовал уже более 50 лет и был в общем употреблении, но термометра со шкалою, отнесенною к двум постоянным точкам, еще не было, а были лишь термоскопы с произвольными шкалами, не отнесенными к определенным точкам.

Флемстид совету Ньютона не последовал, хотя и замечал высоты барометра в целях метеорологических.

Затем, при письме от 17 ноября 1694 г., упомянутом выше, Ньютон послал Флемстиду свою первую таблицу рефракции, а потом и теорему, служащую основанием этой таблицы.

В письме от 26 января 1694/95 г. (двойное обозначение года, ибо в то время в Англии новый год начинался в марте) между прочим Ньютон пишет:

„Составление новой таблицы рефракции заняло все мое время после праздников, но до сих пор я затратил свой труд на бесплодные вычисления, вследствие трудности этого дела. Однако, приняв в соображение, что такая таблица является для астрономии основною и что вами затрачено столько труда, чтобы доставить необходимый материал, я хочу ее закончить, чтобы иметь возможность что-либо поднести вам за те труды, которые вы для меня потратили при ваших наблюдениях.

„Однако я не вполне напрасно потратил свой труд, ибо я нашел новую теорему, которая делает вычисление рефракции весьма легким и которой я могу удовольствоваться, если не придумаю чего-либо лучшего.

„Сейчас я не совсем здоров, но надеюсь настолько поправиться через несколько дней, что смогу довести это дело до конца“.

16 февраля 1694/95 г. Ньютон между прочим упоминает: „Я все еще работаю над новой таблицей рефракции“.

Наконец 15 марта он пишет:

„Теперь я закончил таблицу рефракции и посылаю вам прилагаемую копию ее [в бумагах, доставленных Балли, этой копии не оказалось]. При спокойном состоянии неба и высоте светила 3° рефракция составляет $13'20''$; вы можете положить, что для всех высот, превышающих 10° , таблица точна до одной секунды; при высотах от 10° до 3° наибольшая погрешность не превышает двух или трех секунд. Если при высоте 3° рефракция больше или меньше $13'20''$, то рефракцию при всех высотах, которые больше 3° , следует увеличить или уменьшить в той же пропорции. Через несколько дней я вышлю вам другие обещанные мною таблицы“.

По упоминаемому в этом письме значению $13'20''$ рефракции при высоте 3° Био справедливо заключил, что опубликованная в 1721 г. таблица и есть вторая таблица Ньютона.

Не получая от Флемстида нужных ему наблюдений Луны, Ньютон 9 июля 1695 г. пишет Флемстиду гневное письмо, начинающееся следующими словами:

„После того как я выручил вас в том, в чем вы во всех трех своих работах застряли, т. е. в теории спутников

Юпитера, в вашем каталоге неподвижных звезд и в вычислении мест Луны по наблюдениям, охотно сообщив вам о всех этих вещах все то, что в своем роде было вполне совершенно и большей ценности, нежели многочисленные наблюдения, и что в одном случае (это, видимо, относится к рефракции) стоило мне более двух месяцев упорной работы, которую я никогда бы не предпринял как для вас, и о которой я вам сообщал, что она предпринята, чтобы что-либо дать вам взамен наблюдений, которыми вы меня обнадежили, а теперь, когда мною все сделано, я не могу рассчитывать на их получение и на исправление ваших сводок ... Я не имею намерения писать о рефракции и не желаю, чтобы таблица рефракции была распространяема“.

Лишь через 26 лет после этого Ньютон разрешил Галлею опубликовать эту таблицу, но даже без малейшего намека на способ ее составления, может быть потому, что способ составления таблицы его не вполне удовлетворял, ибо вблизи горизонта теоретически вычисленные числа не вполне увязывались с числами Флемстида, и Ньютон остановился на этих наблюдаемых значениях. Это нельзя ему ставить в упрек, напротив, в подобных случаях надо следовать его примеру, ибо он составлял не таблицу математической функции, а таблицу значений физической величины, которую и надо согласовывать с действительностью, а не с математической функцией, но само собою разумеется, что это надо оговаривать.

Далее в этом же письме находится следующее место, которое хотя и не относится к теории рефракции, но столь замечательно, что мы его приведем; вот что пишет Ньютон:

„Что же касается наибольшей величины паралактического неравенства (Луны), то о нем я знаю не более того, о чем уже писал вам. Это очень малая величина, едва превышающая 2 или 3 или в крайнем случае 4 минуты и настолько спутанная с другими неравенствами, что после того как вы провычислите ваши 30 наблюдений, вы о ней будете знать не более того, что теперь“.

Видимо, Ньютон ясно сознавал, что сопоставление теоретического и выведенного из наблюдений значений этого неравенства, которое, как впоследствии оказалось, равно $2'6''$, доставляет некоторое соотношение между параллаксом Луны, параллаксом Солнца и отношением масс Луны и Земли. Эта последняя величина может быть определена по отношению высоты прилива во время сизигий и квадратур, что Ньютоном было показано; значит, по величине паралактического неравенства Луны имелась возможность определить параллакс Солнца, т. е. расстояние от Земли до Солнца, а по нему — и все прочие *абсолютные* размеры солнечной системы, так сказать, не выходя из кабинета, что и было сделано через 125 лет Лапласом.

Отсюда становится понятной та настойчивость, с которой Ньютон требовал от Флемстида наблюдений Луны.

§ 7. После этих замечаний перейдем к изложению второй теории Ньютона, поскольку о ней можно догадываться по кратким его указаниям.

Для второй своей теории он по-прежнему принимает, что показатель преломления пропорционален плотности атмосферы в рассматриваемом ее слое, плотность же атмосферы он определяет по законам гидростатики и закону Бойля—Мариотта, как это сделано в предложении 22-м второй книги „Principia“, на которое он ссылается.

Это предложение высказано Ньютоном в такой форме:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXII. ТЕОРЕМА XVII

„Если плотность какой-либо жидкости пропорциональна давлению и эта жидкость находится под действием центростремительной силы, направленной вниз и обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра, то я утверждаю, что когда расстояния образуют гармоническую прогрессию, то плотности жидкости в этих расстояниях образуют геометрическую прогрессию“.

Затем, в поучении к этой теореме, он рассматривает общий случай, когда притяжение пропорционально какой-либо степени расстояния, а плотность пропорциональна любой степени давления, и в заключение говорит:

„... перебирать все случаи слишком долго; впрочем, опытами установлено, что плотность воздуха или в точности пропорциональна давлению, или весьма к тому близка; поэтому плотность воздуха в земной атмосфере пропорциональна весу всего покрывающего воздуха, т. е. высоте ртуты в барометре“.

Переводя геометрические рассуждения Ньютона на современные аналитические, мы увидим, что, обозначая плотность воздуха через q , давление — через p , ускорение силы тяжести у поверхности Земли — через g_0 , на расстоянии же ρ от центра Земли — через g и радиус Земли, принимаемой за шар, — через a , будем иметь уравнения

$$g = g_0 \frac{a^2}{\rho^2}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}$$

$$dp = -g q d\rho$$

следовательно, будет

$$\frac{dq}{q} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a^2 \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (43)$$

Отсюда, заметив, что при $\rho = a$ должно быть $q = q_0$, следует

$$\lg \frac{q}{q_0} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\rho} \right]$$

Положив

$$\frac{q_0 g_0}{p_0} a = k \text{ и } \frac{\rho}{a} = 1 + s \quad (43')$$

получим:

$$q = q_0 e^{-ks/(1+s)} \quad (44)$$

а так как показатель преломления μ принимается в линейной зависимости от q , то будет

$$\mu = 1 + \varepsilon e^{-ks/1+s} \quad (44')$$

В простейшем случае, когда по малости величины s изменением силы тяжести с высотой над поверхностью Земли можно пренебречь, вместо уравнения (43) будем иметь:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a ds$$

и, следовательно, будет

$$q = q_0 e^{-ks} \quad (45)$$

$$\mu = 1 + \varepsilon e^{-ks} \quad (46)$$

Для упрощения выкладок мы примем формулу (46), ибо для нашей цели точность ее вполне достаточна.

Очевидно, что в этой формуле k есть отвлеченное безразмерное число, поэтому безразлично, какими мерами пользоваться при его вычислении; возьмем меры метрические, в которых теперь выражаются все физические данные, тогда будет

$$g_0 = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}; \quad q_0 g_0 = 1.293 \text{ кг}; \quad p_0 = 10300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}; \quad a = 6380000 \text{ м}$$

и мы получим:

$$k = \frac{1.293}{10300} 6380000 = 800$$

На основании общей формулы (14), будет

$$\frac{1}{c} \Omega = \int_0^{\infty} \frac{k \varepsilon e^{-ks} ds}{(1 + \varepsilon e^{-ks}) \sqrt{(1 + \varepsilon e^{-ks})^2 (1 + s)^2 - c^2}} \quad (47)$$

причем

$$c = (1 + \varepsilon) \sin z$$

Прежде чем развивать ту методу, которую мог применить Ньютон к вычислению этого интеграла, выведем одну формулу, полученную Лапласом, но вывод которой настолько элементарен,

что он не требует большего математического аппарата, нежели тот, которым Ньютон уже владел.

Положим, что

$$0 < z < 90^\circ$$

по предположению вообще

$$\mu = 1 + \varepsilon \frac{q}{q_0}$$

пусть будет

$$\frac{q}{q_0} = f(s) = f\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

причем $f(s)$ есть какая угодно заданная функция s .

Общее выражение рефракции будет

$$-\frac{1}{c} \Omega = \int_0^s \frac{\varepsilon f'(s)}{1 + \varepsilon f(s)} \cdot \frac{ds}{\sqrt{Q}} \quad (48)$$

причем

$$Q = [1 + \varepsilon f(s)]^2 (1 + s)^2 - (1 + \varepsilon)^2 \sin^2 z \quad (49)$$

и S есть значение s для верхней границы атмосферы, т. е. то, начиная с которого, с тою точностью, с которою вычисление производится, можно принимать $f(s) = 0$. Это значение S составляет около 0.01.

Мы видели, что ε — весьма малая дробь, всеми степенями которой выше первой можно пренебречь, так что приближенно будет

$$Q \approx [1 + 2\varepsilon f(s)]^2 (1 + s)^2 - (1 + 2\varepsilon) \sin^2 z$$

Интегрируя по частям (прием этот Ньютону был известен) получим:

$$-\frac{1}{c} \Omega = \left[\frac{1}{\sqrt{Q}} \lg(1 + \varepsilon f(s)) \right]_0^S + \frac{1}{2} \int_0^S \lg(1 + \varepsilon f(s)) \frac{Q}{\sqrt{Q}^3} ds$$

Но, с точностью до величин высших порядков относительно ε , будет

$$\lg [1 + \varepsilon f(s)] = \varepsilon f(s)$$

и мы получим:

$$\frac{1}{c} \Omega = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{\cos z} - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} \cdot ds = \frac{\varepsilon}{\cos z} - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} ds$$

Интеграл в правой части имеет множителем $\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому в этом интеграле можно в выражении Q все члены, содержащие множитель ε , отбросить, тогда будет

$$Q \approx (1+s)^2 - c^2 \quad (50)$$

и интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} ds = \int_0^S f(s) \frac{(1+s) ds}{[(1+s)^2 - c^2]^{3/2}}$$

Функция $f(s)$ в пределах интегрирования остается положительной, поэтому, если мы возьмем вместо $(1+s)$ его наибольшее значение $1+S$, т. е. кругло 1.01, а в знаменателе — его наименьшее значение 1, то будет

$$\int_0^S f(s) \frac{1+s}{[(1+s)^2 - c^2]^{3/2}} ds < \frac{1+S}{(1-c^2)^{3/2}} \int_0^S f(s) ds$$

но $f(s) = \frac{q}{q_0} = f\left(\frac{\rho}{a}\right)$, значит, будет

$$\int_0^S f(s) ds = \frac{1}{a} \int_0^R \frac{q}{q_0} d\rho = \frac{1}{q_0 a} \int_0^R q d\rho$$

но интеграл $\int_0^R q d\rho$ представляет массу столба атмосферы, площадь сечения которого есть единица (скажем, 1 м²), обозначим эту массу через M ; таким образом, будет

$$\int_0^S f(s) ds = \frac{M}{q_0 a} = \frac{M g_0}{q_0 g_0 a}$$

но M_{g_0} есть вес указанного столба воздуха, равный весу столба (скажем, 760 мм) ртути в барометре; тогда, принимая за единицу веса килограмм и за единицу длины метр, получим $M_{g_0} = 10300$ кг. Величина $q_0 g_0$ есть вес кубического метра воздуха при атмосферном давлении, т.е. 1.293 кг; $a = 6380000$ м есть радиус Земли, таким образом, будет

$$\frac{M}{q_0 a} = \frac{M_{g_0}}{q_0 g_0 a} = \frac{10300}{1.293 \cdot 6380000} = \frac{1}{800}$$

и, значит, в круглых числах будет $\frac{1+S}{800} \approx \frac{1}{790}$, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^s f(s) \frac{Q}{Q^{3/2}} ds < \frac{1}{790} \frac{\varepsilon}{\cos^3 z}$$

Обозначая через χ положительную правильную дробь, получим, с точностью до членов высших порядков относительно ε , выражение

$$Q = \varepsilon \operatorname{tg} z - \frac{\chi}{790} \varepsilon \operatorname{tg}^3 z \quad (51)$$

или при понятном обозначении и расчете в секундах

$$Q = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z \quad (52)$$

В этой формуле замечательно то, что *независимо от вида функции $f(s)$*

$$K = 206265\varepsilon$$

как мы имели при первой гипотезе Ньютона, и что L — малая, по сравнению с K , дробь. Это и есть теорема Лапласа. Из самого ее вывода следует, что она имеет место при таких зенитных расстояниях, при которых имеет место приближенное выражение (50), т.е. отброшенными в нем членами, действительно, можно пренебречь по сравнению с удержанными, а это имеет место приблизительно пока $z \leq 80^\circ$.

Само собою понятно, какое упрощение вносит формула (52) в составление таблицы рефракции по данным наблюдениям. Возможно, что это и есть та теорема, упрощающая дело, о которой Ньютон пишет 26 января 1695 г., но, конечно, нельзя этого утверждать с уверенностью.

Таблица 10

Вычисление рефракции для второй теории
Ньютона по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

$$\lg K = 1.7268; \lg L = 2.7532; \lg M = 5.9651$$

1	2	3	4	5	6	7
z	$K \operatorname{tg} z$	$-L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω	По таблице Ньютона (1721)	(5) — (6)
30°	30.78	— 0.01		30.77	31"	—0.23
35	37.33	— 0.02		37.31	38	—0.69
40	44.73	— 0.03		44.70	45	—0.30
45	53.31	— 0.06		53.25	54	—0.75
50	63.14	— 0.10		63.04	64	—0.96
55	76.14	— 0.17		75.97	76	—0.03
60	92.34	— 0.30		92.04	92	+0.04
65	114.3	— 0.57		113.7	114	—0.3
70	146.5	— 1.2		145.3	146	—0.7
75	199.0	— 3.0		196.0	197	—1.0
76	213.8	— 3.7		210.1	211	—0.9
77	230.9	— 4.7		226.2	227	—0.8
78	250.8	— 6.0		244.8	245	—0.2
79	274.3	— 7.8		266.5	267	—0.5
80	302.4	— 10.8		291.6	292	—0.4
81	336.6	— 14.5	0.9	323.0	322	+1.0
82	379.3	— 20.1	1.7	360.9	360	—0.9
83	434.2	— 31.1	3.3	406.4	407	—0.6
84	507.2	— 49.4	7.2	465.0	465	0.0
85	609.3	— 85.7	18.0	541.6	542	—0.4
86	762.4	—168.0	55.2	649.6	648	+1.6

Вычислено по квадратурам
(см. табл. 12 стр. 704)

z	Ω	New	$\Omega - N$
86°	649.6	648"	+ 1.9
87	799.3	800	— 0.7
88	1025.2	1028	— 2.8
89	1392.8	1387	+ 5.8
89° 30'	1683.7	1655	+28.7
90	2057.8	2025	+32.8

Примечание. В письме Флемстиду 16 февраля 1695 г. Ньютон указывает, что, приняв при 87° рефракцию равной 13'3", он получает горизонтальную рефракцию в 34', а приняв при 87° рефракцию 14", он получает горизонтальную рефракцию несколько более 37'. Как видно, обе эти величины больше взятой им 33'45".

Нетрудно убедиться, продолжив разложение, что будет (33)

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

Определив входящие в эту формулу постоянные по значениям рефракции для $z = 45^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ и проделав затем контрольное вычисление по формулам квадратур для $z = 86^\circ$ и по формуле (33), мы увидим, что эта формула применима для значений z до 86° , если ограничиться тою точностью, которой довольствовался Ньютон. Вычисление это выполнено в табл. 10.

Таким образом, остается показать, как вычисляется рефракция для $z \geq 86^\circ$ по формулам квадратур.

§ 8. Прежде чем приступить к численным вычислениям по формулам приближенных квадратур величины Ω , определяемой равенством (47)

$$\frac{1}{k c \varepsilon} \Omega = \int_0^\infty \frac{e^{-ks}}{1 + \varepsilon e^{-ks}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{Q}}$$

причем

$$Q = (1 + \varepsilon e^{-ks})^2 (1 + s)^2 - c^2 \quad (47')$$

$$c = (1 + \varepsilon) \sin z$$

надо привести входящий в это равенство интеграл к виду, удобному для численных вычислений, так чтобы результат получался с требуемой точностью, без излишней затраты труда и времени.

Наибольшее значение рефракции при спокойном состоянии атмосферы составляет кругло 2000" для $z = 90^\circ$ и 800" для $z = 87^\circ$; Ньютон довольствовался точностью до 3", поэтому относительная погрешность в $\frac{1}{1000}$ для этих пределов изменяемости z вполне допустима, а такая точность теперь достижима при пользовании хорошей логарифмической линейкой, длиной в 50 см, в особенности, если указатель снабжен линзой. На такой линейке мы и производили все наши вычисления, а затем для контроля повторили их пятизначными логарифмами. В прилагаемых таблицах приведены лишь эти последние вычисления, как более удобные для проверки.

Величина $\varepsilon \approx \frac{1}{3800}$; это сразу показывает, что в левой части равенства можно полагать

$$c = \sin z$$

и в правой части, вне знака корня, множитель $1 + \varepsilon e^{-ks}$ заменить через 1.

Величина $k \approx 800$, значения показательной функции e^{-ks} таковы:

$$s = \frac{1}{100}; ks = 8; e^{-ks} = \frac{1}{2981}$$

$$s = \frac{1}{80}; ks = 10; e^{-ks} = \frac{1}{22026}$$

отсюда ясно, что за верхний предел, вместо бесконечности, можно брать $S = \frac{1}{100}$, что тотчас же и подтвердится пробным вычислением.

Имеем

$$(1 + \epsilon e^{-ks})^2 = 1 + 2\epsilon e^{-ks} + \epsilon^2 e^{-2ks}$$

$$c^2 = \sin^2 z + 2\epsilon \sin^2 z + \epsilon^2 \sin^2 z$$

В выражение Q входят не величины 1 и $\sin^2 z$, а их разность $\cos^2 z$, поэтому когда $z \neq 90^\circ$, то члены низшего порядка, по сравнению с которыми члены, содержащие множитель ϵ^2 , могут быть отброшены, суть

$$2\epsilon e^{-ks}; 2\epsilon \sin^2 z; \cos^2 z$$

соответственно чему Q и заменяется его приближенным выражением.

Для удобства вычислений полагаем

$$ks = \sigma$$

тогда будет

$$\frac{1}{c\epsilon} \Omega = \int_0^H \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q(\sigma)}} d\sigma$$

причем

$$Q(\sigma) = \frac{2\sigma}{k} + 2\epsilon e^{-\sigma} + \cos^2 z - 2\epsilon \sin^2 z + \frac{\sigma^2}{k^2} + 4\epsilon \frac{\sigma}{k} e^{-\sigma} + 2\epsilon \frac{\sigma^2}{k^2} e^{-\sigma}$$

$H \approx 8.00$, так что $0 \leq \sigma \leq 8$; сравнив относительную величину членов и приняв во внимание множитель $e^{-\sigma}$ в числителе под-интегральной функции, легко убедиться, что с принятой для нашего вычисления точностью последние три члена в выражении Q , пока $z \leq 89^\circ 30'$, могут быть отброшены, как не оказывающие влияния на результат вычисления при указанной степени точности его.

Таким образом, будет

$$Q = \frac{2\sigma}{k} + 2\epsilon e^{-\sigma} + (\cos^2 z - 2\epsilon \sin^2 z)$$

В это выражение входят постоянные ϵ и k . Первая из этих постоянных определяется проще всего по значению рефракции при $z = 45^\circ$ (мы пользуемся лишь методами, которыми располагал

Ньютон, — метода наименьших квадратов была изобретена через 80 лет после его смерти) и оказывается равной

$$\varepsilon = \frac{53.31}{206265} = 0.0002585; \quad \lg \varepsilon = \bar{4}.41238$$

Величина k , определенная по законам физики и гидростатики, оказывается равной 800; но, по-видимому, Ньютон не полагался на это значение, а определял его по значению рефракции при 87° , принимаемому им в $800''$, и проверял по значению рефракции при $z = 90^\circ$, причем получал указанную им в письме от 15 марта невязку.

При пользовании приближенными квадратурами определение k совершается последовательными приближениями, порядок выполнения которых настолько очевиден, что на нем нет надобности останавливаться в деталях.

Вычисления, послужившие для определения величины k , приведены полностью в табл. 11 (стр. 698). Полученное значение $k = 790$ сходится весьма близко с теоретическим его значением $k = 800$, соответствующим давлению 760 мм и температуре 0°C .

Интегралы вычислены по приближенной формуле квадратур Симпсона, как подробнее пояснено ниже.

Значения при 88 и 89° , показанные в таблице Ньютона, заметно разнятся от вычисленных нами по формулам приближенных квадратур. Это показывает, что или Ньютон вычислял их как-нибудь иначе, или же что он воспользовался наблюдениями Флемстида и придерживался не вычисленных теоретически значений, а этих наблюденных, учтя всю совокупность наблюдений Флемстида, произведенных столь тщательно, что Флемстид называет их „неоспоримыми“.

§ 9. При $z = 90^\circ$, когда $s = 0$, возьмем ли мы точное выражение Q или приближенное, оба обращаются в нуль, и формулы приближенных квадратур неприменимы.

Ньютон имел различные возможности для того, чтобы обойти это затруднение. Как он в данном случае поступил, совершенно не-

известно; мы приводим некоторые из возможных приемов, не выходящих из пределов тех аналитических методов, которыми Ньютон в то время владел.

Первый прием. Не развивая в деталях относящиеся сюда формулы, мы наметим их в общих чертах.

Мы имели равенство

$$\frac{1}{kc\varepsilon} \Omega = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ks} ds}{\sqrt{Q(s)}}$$

при $z=90^\circ$ будет $c=1$ и

$$Q(s) = (1 + \varepsilon e^{-ks})^2 (1+s)^2 - (1+\varepsilon)^2$$

очевидно, что при $s=0$ будет $Q=0$. Пусть будет

$$\lambda = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s)}{s} = 2[1 - k\varepsilon + \varepsilon]$$

так как $k\varepsilon \approx \frac{1}{4}$, то будет $\lambda \approx \frac{3}{4}$.

Очевидно, имеем тождество

$$Q(s) = \lambda s + [Q(s) - \lambda s]$$

значит, будет

$$\frac{Q(s)}{s} = \lambda + \frac{Q(s) - \lambda s}{s} = \lambda + F(s)$$

при само собою понятном обозначении; нетрудно убедиться, что при $s=0$ ни сама функция $F(s)$, ни ее производная $F'(s)$ в нуль не обращаются.

При сделанных обозначениях имеем:

$$\frac{1}{k\varepsilon} \Omega = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ks} ds}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda + F(s)}}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\frac{1}{k\varepsilon} \Omega = \left[2\sqrt{s} \frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \sqrt{s} \left(\frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right)' ds = -2 \int_0^{\infty} \sqrt{s} \left[\frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right]' ds$$

ибо величина, стоящая вне знака интеграла при обоих пределах, равна нулю; таким образом будет

$$\frac{1}{k\varepsilon} \Omega = 2 \int_0^{\infty} \sqrt{s} \frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} ds + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s} e^{-ks} F'(s) ds}{[\lambda + F(s)]^{\frac{3}{2}}}$$

К интегралам, стоящим в правой части, если заменить верхний предел через конечную величину $S \approx \frac{1}{100}$, формулы квадратур применимы, но вычисления настолько длинны, что этот прием для практики не является удобным.

Второй прием. Взяв формулу

$$\frac{1}{c\varepsilon} \Omega = \int_0^H \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$$

в которой $Q = \frac{2\sigma}{k} + 2\varepsilon e^{-\sigma} + \cos^2 z - 2\varepsilon \sin^2 z$, берем между 0 и H ряд промежуточных значений

$$h_1, h_2, \dots, h_n$$

настолько близких между собою, чтобы для каждого такого промежутка, как $h_{i+1} - h_i$, соответствующий интеграл

$$S_i = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}}$$

с достаточною точностью вычислялся по простейшей из Ньютоновых формул квадратур, основанной на замене подинтегральной функции параболami второй степени; формула эта получила впоследствии название „формулы Симпсона“. Величину же h_1 надо брать настолько малой, чтобы при $z \geq 88^\circ 30'$ и при $z = 90^\circ$, с требуемой степенью точности, можно было положить

$$e^{-\sigma} = 1 - \sigma$$

Таким образом, вообще будет

$$Q = \left(\frac{2}{k} - 2\varepsilon \right) \sigma + (1 + 2\varepsilon) \cos^2 z = a\sigma + b$$

и

$$S_1 = \int_0^{h_1} \frac{1-\sigma}{\sqrt{a\sigma+b}} d\sigma = \frac{2}{a} (\sqrt{ah_1+b} - \sqrt{b}) \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \frac{2}{3} [(ah_1+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}] \frac{1}{a^2}$$

Когда $z = 90^\circ$, то $b = 0$, и предыдущая формула не только остается применимой, но и значительно упрощается. Этим приемом и мы воспользовались в табл. 12 как простейшим.

Третий прием. Приняв формулу

$$\frac{1}{c} Q = \int_0^H \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}}$$

берем между 0 и H ряд промежуточных значений

$$h_1, h_2, \dots, h_i, h_{i+1}, \dots, h_n$$

настолько близких между собою, чтобы в каждом таком промежутке можно было, с принятой для вычисления точностью, функцию $Q(\sigma)$ заменить функцией линейной, иными словами, заменить соответствующий участок кривой $Q(\sigma)$ или его хордою, или касательной; таким образом, для участка между h_i и h_{i+1} будет по хорде:

$$h_a \leq \sigma \leq h_{a+1} \quad Q(\sigma) = Q(h_i) + \frac{Q(h_{i+1}) - Q(h_i)}{h_{i+1} - h_i} (\sigma - h_i) \quad (I)$$

по касательной:

$$h_a \leq \sigma \leq h_{a+1} \quad Q(\sigma) = Q\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) + Q'\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) \cdot \left(\sigma - \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) \quad (II)$$

Вычислив по формуле (I) величину $Q\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right)$ и сравнив ее со значением этой величины, доставляемым формулой (II), получим верхний предел погрешности каждой из этих формул, а значит, найдем, достаточно ли мал избранный промежуток $h_{i+1} - h_i$.

После того как промежутки избраны, для каждого из них проверяем, будет ли с требуемою степенью точности и величина $e^{-\sigma}$ представляться линейною функцией σ , и если в каком-либо из этих

промежутков точность такого представления недостаточна, то этот промежуток подразделяем на более мелкие.

Когда промежутки, таким образом, окончательно установлены, то для каждого из них в отдельности применимы формулы, относящиеся к первой теории Ньютона, по которым и вычислится значение отклонения луча при прохождении соответствующего этому промежутку слоя атмосферы; сумма этих отклонений и дает полную рефракцию.

Такой способ вычисления, очевидно, применим не только для значения $z=90^\circ$, но и для других значений, близких к 90° , например $89^\circ 45'$ или $89^\circ 50'$, когда прием, изложенный в § 8, неприемлем.

Само собою разумеется, что нет надобности производить вычисление по формулам первой теории до границы атмосферы, достаточно применять этот способ до такого значения h_i , начиная с которого величина $Q(h_i)$ уже настолько отличается от нуля, что вычисление по формулам § 8 становится достаточно точным.

Ясно, что этот способ требует большой затраты вычислительной работы, но ведь Ньютон сам указывает, что он на нее затратил „более двух месяцев упорного труда“, а в числовых вычислениях он был столь же искусен, как и во всем остальном, и недаром в одном из своих писем, кажется к Коллинсу, он, вспоминая свои работы в молодые годы по разложению функций в ряды, пишет: „... мне становится стыдно вспоминать, с каким громадным числом знаков я эти вычисления производил“.

Главное неудобство этого приема состоит в том, что надо брать большое число участков, величина которых не столько определяется условием, чтобы функция $Q(s)$, где показательная e^{-ks} умножается на малую величину 2ε , могла быть заменена функцией линейной, но чтобы в числителе эта показательная с тою же относительной точностью могла быть заменена линейной функцией.

Является вопрос, как избавиться от этого недостатка.

§ 10. Положим, что, не обращая внимания на множитель $e^{-\sigma}$, мы выбрали такие промежутки, что в каждом из них величина $Q(\sigma)$

представляется линейной функцией от σ , тогда вычисление рефракции приводится к вычислению интегралов вида

$$N_i = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{a\sigma + b}} \quad (53)$$

Чтобы избавиться от знаменателя и радикала, сама собою напрашивается подстановка

$$a\sigma + b = at^2$$

из которой следует

$$d\sigma = 2t dt$$

и пределы

$$p = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ah_i + b} = \frac{1}{\sqrt{a}} Q(h_i) \text{ и } q = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ah_{i+1} + b} = \frac{1}{\sqrt{a}} Q(h_{i+1})$$

и мы получим:

$$N_i = \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b}{a}} \int_p^q e^{-t^2} dt \quad (54)$$

Крамп, в своем сочинении „Analyse des réfractions astronomiques et terrestres“ (1799), указав эту подстановку, составил и обширные таблицы функции

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (55)$$

Кроме того, он составил таблицу логарифмов этой функции и таблицу логарифмов произведения $e^{x^2} \Phi(x)$; аргументы в его таблицах даны через 0.01.

В 1888 г. акад. А. А. Марков, вычислив заново значения функции $\Phi(x)$, издал таблицы, где эта функция дана для аргументов через 0.001 от $x=0$ до $x=2.999$ и через 0.01 для x от $x=3.00$ до $x=4.80$ с одиннадцатью знаками (см.: André Marc off. Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$. St. Petersburg, éd. Acad. Sc., 1888).

Очевидно, что

$$\int_p^q e^{-t^2} dt = \int_p^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_q^{\infty} e^{-t^2} dt = \Phi(p) - \Phi(q)$$

так что при пользовании таблицами Крампа или Маркова вычисление рефракции приводится к вычислению суммы членов вида

$$N = \frac{2}{\sqrt{a}} e'' [\Phi(p) - \Phi(q)] \quad (56)$$

Но здесь приходится считаться с одним обстоятельством, для вычислений весьма невыгодным.

Положим, что мы хотим вычислить величину Ω с относительной погрешностью, не превосходящей $\frac{1}{1000}$; для этого надо, чтобы в разности $\Phi(p) - \Phi(q)$ было три значащие цифры верные и четвертая сомнительная, с погрешностью ± 1 . Аргументы p и q , взятые по хордам из значений Q при вычислении интегралов по формулам квадратур, таковы:

p	q
1.123	1.166
1.160	1.263
1.244	1.431
1.392	1.640
1.608	1.894

и т. д.

Возьмем для примера среднюю пару $p = 1.244$; $q = 1.431$; таблицы Маркова дают:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(p) & = & 0.069595 \quad 11520 \\ \Phi(q) & = & 0.038105 \quad 05567 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) & = & 0.031490 \quad 05953 \end{array}$$

Может показаться, что все хорошо, но ведь аргументы p и q вычислялись, а не задавались, значит при вычислении с четырьмя значащими цифрами по довольно сложным формулам последний

знак сомнителен на ± 1 по крайней мере, и значит, истинные значения p и q могли бы быть, например, такие:

$$p = 1.245; \quad q = 1.430$$

а тогда будет:

$$\begin{array}{r} \Phi(p) = 0.069382 \quad 60814 \\ \Phi(q) = 0.038234 \quad 26390 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.031148 \quad \dots \end{array}$$

и относительная погрешность составляет

$$\frac{0.00034}{0.03149} \approx \frac{1}{100}$$

а надо $\frac{1}{1000}$, следовательно, вычисление аргументов p и q должно быть производимо так, чтобы четыре цифры были верные и лишь пятая сомнительная, а если мы возьмем более близкую пару, например 1.160 и 1.263, то будет

$$\begin{array}{r} \Phi(1.160) = 0.089423 \quad 66189 \\ \Phi(1.263) = 0.065646 \quad 98863 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023776 \quad 67326 \end{array} \quad \begin{array}{r} \Phi(1.161) = 0.089163 \quad 58036 \\ \Phi(1.262) = 0.065850 \quad 11925 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023313 \quad 46111 \end{array}$$

Относительная погрешность равна $\frac{46}{2378} \approx 0.02$.

Значит, чтобы получить относительную погрешность в $\frac{1}{1000}$, надо вычислять так, чтобы было пять значащих цифр верных и лишь шестая сомнительная, т. е. по шестизначным логарифмам.

Этот недостаток может быть в значительной степени устранен, так что пятизначные логарифмы дадут достаточную точность, если величину q вычислять не непосредственно по формуле

$$q = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{Q(h_{i+1})}$$

а по формуле

$$q = p + \gamma$$

причем будет

$$\gamma = \frac{(h_{i+1} - h_i) \sqrt{a}}{\sqrt{Q(h_i)} + \sqrt{Q(h_{i+1})}}$$

Выгода вычисления по этим формулам состоит в том, что погрешность в величине q будет такая же, как и в величине p , так что в нашем примере было бы

$$p = 1.245 \quad q = 1.432$$

тогда

$$\begin{array}{r} \Phi(1.245) = 0.069382 \quad 60814 \\ \Phi(1.432) = 0.037976 \quad 21671 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.031406 \quad 39143 \end{array}$$

и относительная погрешность составит

$$\frac{0.00008}{0.03149} \approx \frac{1}{400}$$

Для второй пары мы имели бы при $p = 1.161$ $q = 1.264$ и было бы

$$\begin{array}{r} \Phi(1.161) = 0.089163 \quad 58036 \\ \Phi(1.264) = 0.065444 \quad 37048 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023719 \quad 21\dots \end{array}$$

и относительная погрешность составила бы

$$\frac{57}{23719} \approx \frac{1}{400}$$

Отсюда ясна выгода непосредственного вычисления по формулам квадратур, где не приходится иметь дела с разностями быстро изменяющихся величин и нет происходящей от этого утраты точности результатов.

Само собою разумеется, что пользование готовыми таблицами функции $\Phi(x)$ значительно упрощает вычисление рефракции, но из этого отнюдь не следует, чтобы отсутствие такой таблицы могло

представить какое-либо затруднение для Ньютона при вычислении интегралов вида

$$S(p, q) = \int_p^q e^{-t^2} dt$$

В самом деле, мы имеем вообще

$$\int_p^q = \int_p^{q_1} + \int_{q_1}^{q_2} + \dots + \int_{q_n}^q$$

Возьмем величины $q_1, q_2, \dots, q_n$ так, чтобы разности между верхним и нижним пределами каждого из интегралов правой части были между собою равны и не больше некоторого числа a , скажем 0.2 или 0.4.

Таким образом, вычисление рассматриваемого интеграла $S(p, q)$ приводится к вычислению суммы интегралов вида

$$S(a, a + a) = \int_a^{a+a} e^{-t^2} dt$$

причем a — малая величина.

Пусть будет

$$t = a + \frac{a}{2} + x$$

Положив

$$\frac{b}{2} = a + \frac{a}{2} \text{ или } b = 2a + a$$

получим:

$$S(a, a + a) = e^{-\frac{b^2}{4}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-bx} e^{-x^2} dx$$

Но

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Величина x^2 не больше $\frac{\alpha^2}{4}$, поэтому, если взять $\alpha = 0.2$, то будет

$$\frac{x^4}{2} \leq \frac{1}{20000}$$

следовательно, довольствуясь *относительной* точностью в $\frac{1}{20000}$, мы можем в разложении e^{-x^2} взять лишь первые два члена, т. е. $1 - x^2$.

Если довольствоваться *относительной* точностью в $\frac{1}{1000}$, то можно брать $\alpha = 0.4$. В нашем вопросе точность в $\frac{1}{1000}$ вполне достаточна, и мы можем брать $\alpha = 0.4$ и полагать

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} e^{-bx} e^{-x^2} dx = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} (1 - x^2) e^{-bx} dx$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} (1 - x^2) e^{-bx} dx &= \frac{1}{b} \left[\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{\frac{ab}{2}} + \\ &+ \frac{1}{b} \left[\frac{a}{b} - \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{-\frac{ab}{2}}. \end{aligned}$$

так что приближенно (с относительной погрешностью $\leq \frac{1}{1000}$) будет

$$\begin{aligned} \int_p^{p+\alpha} e^{-t^2} dt &= \frac{1}{b} e^{-\frac{b^2}{4}} \left\{ \left[\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{\frac{ab}{2}} + \right. \\ &\left. + \left[\frac{a}{b} - \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{-\frac{ab}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

причем

$$b = 2p + \alpha$$

Ньютон имел в своем распоряжении таблицы как обыкновенных, так и натуральных (Неперовых) логарифмов, и численное вычисление по формуле (57) не представляло в его время никаких затруднений, также и самый вывод этой формулы был ему вполне доступен, но, конечно, нельзя утверждать, что он ею пользовался.

В настоящее время имеются хорошие таблицы функций

$$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \text{ и } \operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

и их логарифмов. Чтобы воспользоваться такими таблицами, следует формулу (57) писать так:

$$\int_p^{p+a} e^{-t^2} dt = \frac{2}{b} e^{-\frac{b^2}{4}} \left[\left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \operatorname{sh} \frac{ab}{2} + \frac{1}{b} \operatorname{ch} \frac{ab}{2} \right] \quad (58)$$

Точность этой формулы для $a \leq 0.2$ составляет $\frac{1}{20000}$, а для $a \leq 0.4$ — до $\frac{1}{1000}$ вычисляемой величины.

Чтобы при вычислении избежать малых разностей больших чисел (это имеет место, когда число p — малое), следует заменить показательную функцию $e^{\pm \frac{ab}{2}}$ ее разложением

$$e^{\pm \frac{ab}{2}} = 1 \pm \frac{ab}{2} + \frac{a^2 b^2}{8} \pm \frac{1}{48} a^3 b^3 + \frac{1}{384} a^4 b^4$$

тогда будет с принятой степенью точности

$$\int_p^{p+a} e^{-t^2} dt = \frac{1}{384} a e^{-\frac{b^2}{4}} [192 + 8a^2 b^2 - 16a^2 - a^4 b^2] \quad (59)$$

Формула эта имеет место с указанной степенью относительной точности, пока

$$a \leq 0.4; \quad p \leq 1.05$$

Чтобы проверить степень точности этих формул, дадим несколько примеров вычисления по ним.

Первый пример. Вычислить интеграл

$$S = \int_1^{1.2} e^{-t^2} dt$$

В этом случае $b = 2.2$; $a = 0.2$; $\frac{ab}{2} = 0.22$

$$S = \left\{ \frac{1}{1.1} \left[1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{2.42} \right] \text{sh } 0.22 + \frac{0.1}{1.21} \text{ch } 0.22 \right\} e^{-1.21}$$

$$1 - \frac{1}{100} = 0.99000$$

$$\lg 0.57678 = \bar{1}.76100$$

$$\frac{1}{2.42} = 0.41322$$

$$\text{clg } 1.1 = \bar{1}.95861$$

$$\lg \text{ch } 0.22 = \bar{1}.34592$$

$$\underline{0.57678}$$

$$\underline{1.06553}$$

$$0.11629$$

$$\lg \frac{0.1}{1.21} = \bar{2}.91721$$

$$\lg 0.20094 = \bar{1}.30306$$

$$\lg \text{ch } 0.22 = 0.01043$$

$$\lg e^{-1.21} = \bar{1}.47451$$

$$\underline{2.92764}$$

$$\underline{2.77757}$$

$$0.08465$$

$$S = 0.059920$$

По таблицам Маркова:

$$\Phi(1) = 0.1394028$$

$$\Phi(1.2) = 0.0794822$$

$$\underline{S = 0.0599206}$$

Относительная погрешность составляет около $\frac{6}{600000} \approx \frac{1}{100000} < \frac{1}{20000}$.

Второй пример. Вычислить интеграл

$$S = \int_0^{0.4} e^{-t^2} dt$$

В этом случае $p=0$; $a=0.4$; $b=0.4$; $\frac{bx}{2}=0.08$; $\frac{2}{b}=5$

$1 - \frac{a^2}{4} = 0.96$ $- \frac{2}{b^2} = -12.50$ -11.54	$\lg 11.54 = 1.06221 (n)$ $\lg \operatorname{sh} 0.08 = \bar{1}.90355$ $\bar{1}.96576 n$ -0.92420 $\operatorname{ch} 0.08 = 1.00320$ 0.07900	$\lg 5 = 0.69897$ $\lg 0.07900 = \bar{2}.89763$ $\lg e^{-0.04} = \bar{1}.98263$ $\lg S = \bar{1}.57923$ $S = 0.37952$
--	--	---

По таблицам Маркова:

$$\Phi(0) = 0.8862269$$

$$\Phi(0.4) = 0.5065741$$

$$S = 0.3796528$$

Относительная погрешность составляет $\frac{1}{3795}$.

В этом примере относительная точность получилась меньше по двум причинам: 1) промежуток a в два раза больше и 2) утрата одной значащей цифры в разности

$$1.00320 - 0.92420 = 0.07900$$

От этого последнего недостатка можно избавиться, воспользовавшись формулой (59), для которой имеем:

$$a=0.4; b=0.4; ab=0.16; a^2b^2=0.0256; a^2=0.16$$

По этим данным будет

$$8a^2b = 0.2048; \quad 16a^2 = 2.560; \quad a^2 \cdot a^2b^2 = 0.041; \quad 16a^2 - a^4b^2 = 2.519$$

$$192.205 - 2.519 = 189.686$$

$$S = \frac{1}{480} \cdot e^{-0.04} \cdot 189.686$$

$$\lg 189.686 = 2.278035$$

$$\text{clg } 480 = \bar{3}.318759$$

$$\lg e^{-0.04} = \bar{1}.982628$$

$$\lg S = \bar{1}.579422$$

$$S = 0.379684$$

По таблицам Маркова:

$$\Phi(0) = 0.8862269$$

$$\Phi(0.4) = 0.5065741$$

$$S = 0.3796528$$

Относительная погрешность составляет около $\frac{31}{379684} \approx \frac{1}{12000}$.

Как видно, вывод формулы (57) и дальнейшее пользование ею требует лишь самых элементарных приемов анализа, которыми Ньютон, в то время как он занимался вопросом об астрономической рефракции, вполне обладал.

Мы вошли во все эти подробности потому, что если не соблюдать всех изложенных предосторожностей, то получить при вычислении с малым числом знаков достаточно точные результаты невозможно.¹

В табл. 11 и 12 дано вычисление рефракции по второй теории Ньютона, с помощью формул, развитых в §§ 8 и 9. Необходимые пояснения даны в примечаниях на самих таблицах.

§ 11. К изложенным в §§ 9 и 10 искусственным приемам приходится прибегать для¹ вычисления рефракции вблизи горизонта, но уже Ньютон,¹ в письме от 24 октября 1694 г., отметил изменчивость этого значения и указал причину его. Чтобы наглядно

¹ Замечательно, что Т. фон Опполцер (Th. v. Oppolzer) в „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten“, Bd. II, p. 37, применяет для вычисления значений интеграла (55) способ приближенных квадратур, основанный на Ньютоновой формуле интерполяции для равноотстоящих ординат, и таким образом составляет десятизначную таблицу величин этого интеграла через 0.01.

Таблица 11

Вычисление рефракции по второй теории Ньютона
 Определенные величины k по значению рефракции $Q = 800''$ при $z = 87^\circ$
 $2\varepsilon = 0.0005170$ $k = 800$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z	$2\varepsilon e^{-\sigma}$	$\frac{2\varepsilon}{k}$ ($k = 800$)	(2) + (3)	$Q = (4) + (7)$	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg e^{-\sigma}$	(7) + (8)	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (10) по Столб- цу
0.000	0.0005170	0.0000000	0.0005170	0.0027404	2.56219	1.28110	0.00000	1.28110	19.103	107.187
0.025	0.0005042	0.0000625	0.0005667	0.0027901	2.55438	1.27719	1.98915	1.26634	18.465	
0.050	0.0004918	0.0001250	0.0006168	0.0028402	2.54665	2.27332	1.97829	1.25161	17.849	
0.075	0.0004796	0.0001875	0.0006671	0.0028905	2.53903	1.26952	1.96743	1.23695	17.257	
0.100	0.0004678	0.0002500	0.0007178	0.0029419	2.53147	1.26573	1.95657	1.22230	16.684	
0.150	0.0004450	0.0003750	0.0008200	0.0030434	2.51664	1.25832	1.93486	1.19318	15.602	107.187
0.200	0.0004233	0.0005000	0.0009233	0.0031467	2.50214	1.25107	1.91314	1.16421	14.595	
0.250	0.0004026	0.0006250	0.0010276	0.0032510	2.48898	1.24449	1.89143	1.13592	13.675	
0.300	0.0003830	0.0007500	0.0011330	0.0033564	2.47412	1.23706	1.86971	1.10677	12.787	
0.375	0.0003553	0.0009375	0.0012928	0.0035162	2.45393	1.22697	1.83715	1.06412	11.591	
0.450	0.0003297	0.0011250	0.0014547	0.0036781	2.43438	1.21719	1.80457	1.02176	10.514	87.884
0.525	0.0003058	0.0013125	0.0016183	0.0038417	2.41548	1.20774	1.77200	0.97974	9.544	
0.600	0.0002837	0.0015000	0.0017837	0.0040071	2.39717	1.19858	1.73942	0.93800	8.670	

Т а б л и ц а 11 (продолжение)

$2\varepsilon = 0.0005170$ $k = 800$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
γ	$2\varepsilon e^{-\sigma}$	$\frac{2\sigma}{k}$ ($k = 800$)	(2) + (3)	$Q = (4) + (5)$	$\text{clg } Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg e^{-\sigma}$	(7) + (8)	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (10) по Столб- цу
0.700	0.0002567	0.0017500	0.0020067	0.0042301	2.37365	1.18682	1.69600	0.88282	7.635	63.512
0.800	0.0002323	0.0020000	0.0022323	0.0044557	2.35108	1.17554	1.65257	0.82811	6.732	6.732
0.900	0.0002102	0.0022500	0.0024602	0.0046836	2.32942	1.16471	1.60914	0.77385	5.941	5.941
1.000	0.0001902	0.0025000	0.0026902	0.0049136	2.30860	1.15430	1.56571	0.72001	5.248	5.248
1.150	0.0001637	0.0028750	0.0030387	0.0052621	2.27884	1.13942	1.50057	0.63999	4.365	40.883
1.300	0.0001409	0.0032500	0.0033909	0.0056143	2.25070	1.12535	1.43541	0.56076	3.637	3.637
1.450	0.0001212	0.0036250	0.0037462	0.0059696	2.22406	1.11203	1.37009	0.48212	3.035	3.035
1.600	0.0001044	0.0040000	0.0041044	0.0063278	2.19875	1.09938	1.30514	0.40452	2.538	2.538
1.800	0.0000855	0.0045000	0.0045855	0.0068089	2.16692	1.08346	1.21827	0.30173	2.003	23.330
2.000	0.0000700	0.0050000	0.0050700	0.0072934	2.13707	1.03854	1.13143	0.19937	1.585	1.585
2.200	0.0000573	0.0055000	0.0055573	0.0077807	2.10892	1.05446	1.04454	0.10000	1.259	1.259
2.400	0.0000469	0.0060000	0.0060469	0.0082703	2.08248	1.04124	0.95770	0.99894	0.998	0.998
2.700	0.0000347	0.0067500	0.0067847	0.0090081	2.04537	1.02268	0.82743	0.85011	0.708	9.877
3.000	0.0000257	0.0075000	0.0075257	0.0097491	2.01104	1.00552	0.69714	0.70266	0.504	0.504
3.300	0.0000191	0.0082500	0.0082691	0.0104925	1.97917	0.98958	0.56679	0.55637	0.360	0.360
3.600	0.0000141	0.0090000	0.0090141	0.0112375	1.94933	0.97466	0.43648	0.41114	0.258	0.258

Таблица 11 (продолжение)

$2\varepsilon = 0.0005170$ $k = 800$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$2\varepsilon e^{-\sigma}$	$\frac{2\sigma}{k}$ ($k = 800$)	(2) + (3)	$Q = (4) + (1)$	$\text{clg } Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg e^{-\sigma}$	(7) + (8)	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (10) по Симп- сову
4.000	0.0000097	0.0100000	0.0100097	0.0122331	1.91256	0.95628	2.26293	1.21921	0.166	3.368
4.400	0.0000030	0.0110000	0.0110030	0.0132314	1.87840	0.93920	2.08920	1.02840	0.107	
4.800	0.0000013	0.0120000	0.0120013	0.0142278	1.84686	0.92343	1.91540	0.83893	0.069	
5.200	0.00000029	0.0130000	0.0130029	0.0152263	1.81740	0.90870	1.74194	0.65064	0.045	
6.000	0.00000013	0.0150000	0.0150013	0.0172247	1.76384	0.88192	1.59445	0.27637	0.019	0.729
6.800	0.00000006	0.0170000	0.0170006	0.0192240	1.71616	0.85808	1.04532	0.90340	0.008	
7.600	0.00000003	0.0190000	0.0190003	0.0212237	1.67317	0.83658	0.69897	0.53555	0.003	
8.400	0.00000001	0.0210000	0.0210001	0.0232235	1.63406	0.81703	0.34242	0.15945	0.001	0.075

$$\gamma = \cos^2 z - 2\varepsilon \sin^2 z$$

$$2 \lg \cos z = 5.43760$$

$$0.0027390$$

$$2 \lg \sin z = 1.99880$$

$$\lg 2\varepsilon = 4.71349$$

$$4.71229 - 0.0005156$$

$$\gamma = 0.0022234$$

$$\lg S = 1.18113$$

$$\lg K = 1.72681$$

$$\lg \sin z = 1.99940$$

$$\lg Q = 2.90734$$

$$Q = 807.88$$

Следовательно $k < 800$

h	Σ	$h \Sigma$
0.025	107.187	2.6797
0.050	87.884	4.3942
0.075	63.512	4.7634
0.100	40.883	4.0883
0.150	23.330	3.4995
0.200	9.877	1.9754
0.300	3.368	1.0104
0.400	0.729	0.2916
0.800	0.075	0.0600
	22.7625	
	— 7.5875	
	$\Sigma = 15.1750$	

k = 790

1	2	3	4	5	6	7	8
δ	$\delta = \frac{1}{790} (3)$	$Q(790) =$ $= Q(800) + \delta$	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\delta}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (6) по Силкову
0.000		0.0027404	2.56219	1.28110	1.28110	19.103	
0.025	0.0000008	0.0027909	2.55426	1.27713	1.26628	18.462	
0.050	0.0000016	0.0028418	2.54641	1.27320	1.25149	17.844	
0.075	0.0000024	0.0028929	2.53867	1.26933	1.23676	17.249	
0.100	0.0000032	0.0029444	2.53100	1.26550	1.22207	16.678	
0.150	0.0000047	0.0030481	2.51607	1.25804	1.19290	15.592	107.157
0.200	0.0000063	0.0031530	2.50128	1.25064	1.16378	14.581	
0.250	0.0000079	0.0032589	2.48693	1.24346	1.13489	13.642	
0.300	0.0000095	0.0033659	2.47290	1.23645	1.10616	12.769	
0.375	0.0000118	0.0035280	2.45247	1.22623	1.06338	11.571	87.772
0.450	0.0000142	0.0036923	2.43270	1.21635	1.02192	10.517	
0.525	0.0000166	0.0038583	2.41360	1.20680	0.97880	9.524	
0.600	0.0000190	0.0040261	2.39512	1.19756	0.93698	8.649	

Таблица 11 (продолжение)

$k = 790$

1	2	3	4	5	6	7	8
γ	$\delta = \frac{1}{79} (\delta)$	$Q(790) =$ $= Q(800) + \delta$	$\text{clg } Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\delta}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (6) по Симпсону
0.700	0.0000215	0.0042516	2.37145	1.18572	0.88172	7.616	63.416
0.800	0.0000253	0.0044810	2.34862	1.17431	0.82688	6.712	
0.900	0.0000285	0.0047121	2.32679	1.16340	0.77254	5.923	
1.000	0.0000317	0.0049453	2.30581	1.15290	0.71861	5.231	
1.15	0.0000363	0.0052984	2.27586	1.13743	0.63800	4.345	40.730
1.30	0.0000412	0.0056555	2.24753	1.12376	0.55917	3.624	
1.45	0.0000458	0.0050154	2.22074	1.11037	0.48046	3.023	
1.60	0.0000507	0.0063785	2.19528	1.09764	0.40278	2.528	
1.80	0.0000570	0.0068659	2.16330	1.08165	0.29992	1.995	22.240
2.00	0.0000633	0.0073567	2.13332	1.06666	0.19809	1.578	
2.20	0.0000696	0.0078503	2.10512	1.05256	0.09710	1.251	
2.40	0.0000760	0.0083463	2.07850	1.03925	1.99695	0.993	
2.70	0.0000855	0.0090936	2.04126	1.02063	1.84806	0.705	9.831
3.00	0.0000950	0.0098441	2.00683	1.00342	1.70056	0.502	
3.30	0.0001045	0.0105970	1.97482	0.98741	1.55420	0.358	
3.60	0.0001140	0.0113515	1.94495	0.97248	1.40896	0.256	

$k = 790$

1	2	3	4	5	6	7	8
σ	$\delta = \frac{1}{79} (3)$	$Q(790) =$ $= Q(800) + \delta$	$\text{clg } Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (6) по Симпсону
4.00	0.0001265	0.0123596	1.90800	0.95400	1.21693	0.165	3.252
4.40	0.0001392	0.0133706	1.87384	0.93692	1.02612	0.106	
4.80	0.0001519	0.0143796	1.84224	0.92112	0.83652	0.059	
5.20	0.0001645	0.0153908	1.81276	0.90638	0.64832	0.044	
6.00	0.0001897	0.0174144	1.75910	0.87955	0.27400	0.019	0.724
6.80	0.0002152	0.0194392	1.71132	0.85561	0.90093	0.008	
7.60	0.0002405	0.0214642	1.66828	0.83414	0.53311	0.003	
8.40	0.0002660	0.0234895	1.62912	0.81456	0.15698	0.001	
							0.074

h	Σ	$h\Sigma$
-----	----------	-----------

0.025	107.157	2.6789
0.050	87.772	4.3886
0.075	63.416	4.7562
0.100	40.730	4.0730
0.150	22.240	3.3360
0.200	9.831	1.9662
0.300	3.252	0.9756
0.400	0.724	0.2896
0.800	0.074	0.0592

22.5233

-7.5078

 $\Sigma = 15.0155$ $\lg S = 1.17653$ $\lg K \sin z = 1.72621$ $\lg \Omega = 2.90274$ $\Omega = 799.3$ вместо 800"

поэтому можно принять

 $k = 790$

Таблица 12
Вычисление по формулам квадратур рефракции для второй теории Ньютона
 $z = 86^\circ$

z	1		2	3	4		5	6
	$\lg e^{-\sigma}$	Q	$\operatorname{clg} Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$		
0.000	0.00000	0.0048685	2.31260	1.15630	1.15630	14.332		
0.025	1.98915	0.0049190	2.30812	1.15406	1.14321	13.906		
0.050	1.97829	0.0049699	2.30364	1.15182	1.13011	13.493		
0.075	1.96743	0.0050210	2.29921	1.14960	1.11703	13.093		
0.100	1.95657	0.0050725	2.29478	1.14739	1.10396	12.705		
0.150	1.93846	0.0051762	2.28599	1.14300	1.07786	11.963	81.010	
0.200	1.91314	0.0052811	2.27728	1.13864	1.05178	11.266		
0.250	1.89143	0.0053870	2.26865	1.13432	1.02575	10.611		
0.300	1.86971	0.0054940	2.26011	1.13006	0.99977	9.995		
0.375	1.83715	0.0056561	2.24748	1.12374	0.96089	9.139	67.764	
0.450	1.80457	0.0058204	2.23505	1.11752	0.92202	8.358		
0.525	1.77200	0.0059864	2.22283	1.11142	0.88342	7.646		
0.600	1.73942	0.0061542	2.21083	1.10542	0.84484	6.996		

$z = 86^\circ$

	1	2	3	4	5	6
z	$\lg e^{-\sigma}$	Q	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (5) по Симпсону
0.700	1.69600	0.0063797	1.09760	0.79360	6.217	50.424
0.800	1.65257	0.0066091	1.08993	0.74250	5.527	
0.900	1.60914	0.0068402	1.08246	0.69160	4.916	
1.000	1.56571	0.0070734	1.07519	0.64090	4.374	
1.15	1.50057	0.0074265	1.06461	0.56518	3.674	33.478
1.30	1.43541	0.0077836	1.05441	0.48982	3.089	
1.45	1.37009	0.0081435	1.04460	0.41469	2.598	
1.60	1.30514	0.0085066	1.03512	0.34026	2.189	
1.80	1.21827	0.0089940	1.02302	0.24129	1.743	18.915
2.00	1.13143	0.0094848	1.01149	0.14292	1.390	
2.20	1.04454	0.0099748	1.00047	0.04501	1.109	
2.40	0.95770	0.0104748	0.98994	1.94764	0.886	
2.70	0.82743	0.0112217	0.97998	1.80741	0.642	8.632
3.00	0.69714	0.0119722	0.96092	1.65806	0.455	
3.30	0.56679	0.0127251	0.94767	1.51446	0.327	
3.60	0.43645	0.0134796	0.93516	1.37164	0.235	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 86^\circ$

	1	2	3	4	5	6
σ	$\lg e^{-\sigma}$	$\operatorname{erf} Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-Q}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-Q}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (6) по Симпсону
4.00	5.26293	0.0144877	0.91950	1.18243	0.152	2.954
4.40	5.08920	0.0154987	0.90485	5.99405	0.079	
4.80	5.91540	0.0165077	0.89115	5.90655	0.081	
5.20	5.74194	0.0175189	0.87825	5.62019	0.042	
6.00	5.39445	0.0195425	0.85452	5.24897	0.018	0.704
6.80	5.04532	0.0215673	0.83310	5.87842	0.008	
7.60	4.69897	0.0235923	0.81362	5.51259	0.003	
8.40	4.34242	0.0256176	0.79573	5.13815	0.001	

h	Σ	Σh
0.025	81.010	2.0252
0.050	67.764	3.3882
0.075	50.424	3.7816
0.100	33.478	3.3478
0.150	18.915	2.8372
0.200	8.632	1.7264
0.300	2.954	0.8862
0.400	0.704	0.2816
0.500	0.072	0.0576

18.3318
— 6.1106
 $S = 12.2212$

$2 \lg \cos 86^\circ = 5.68716$
 $2 \lg \sin 86^\circ = 4.71349$
 $\lg 2\varepsilon = 1.99788$
4.71137

Привести
к $Q (87^\circ)$

$\lg S = 1.08711$
 $\lg K = 1.72681$
 $\lg \sin z = 1.99894$
 $\lg Q = 7.81286$
 $\lg \Omega = 649.79$

По Ньютоу 648'

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 88^\circ$

	1	2	3	4	5	6
σ	Q	$\operatorname{elg} Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (5) по Симпсону
0.000	0.0012186	2.91414	1.45707	1.45707	28.646	
0.025	0.0012691	2.89650	1.44825	1.43740	27.378	
0.050	0.0013200	2.87942	1.43971	1.41800	26.182	
0.075	0.0013711	2.86294	1.43147	1.39890	25.055	
0.100	0.0014226	2.84692	1.42346	1.38003	23.990	
0.150	0.0015263	2.81636	1.40818	1.34304	22.031	157.366
0.200	0.0016312	2.78750	1.39375	1.30689	20.272	
0.250	0.0017371	2.76018	1.38009	1.27152	18.686	
0.300	0.0018441	2.73422	1.36711	1.23682	17.251	
0.375	0.0020062	2.69762	1.34881	1.18596	15.344	122.326
0.450	0.0021705	2.66344	1.33172	1.13629	13.686	
0.525	0.0023365	2.63144	1.31572	1.08772	12.238	
0.600	0.0025043	2.60132	1.30066	1.04008	10.967	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 88^\circ$

σ	1	2	3	4	5	6
	Q	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (5) по Смпсову
0.700	0.0027298	2.56386	1.28193	0.97793	9.504	82.959
0.800	0.0029592	2.52882	1.26441	0.91798	8.279	
0.900	0.0031903	2.49616	1.24808	0.85722	7.198	
1.000	0.0034235	2.46553	1.23276	0.79847	6.273	
1.50	0.0037766	2.42290	1.21145	0.71202	5.152	50.203
1.30	0.0041337	2.38366	1.19183	0.62724	4.239	
1.45	0.0044936	2.34740	1.17370	0.54379	3.498	
1.60	0.0048567	2.31366	1.15683	0.46197	2.897	
1.80	0.0053441	2.27212	1.13606	0.35433	2.261	26.124
2.00	0.0058349	2.23396	1.11698	0.24841	1.772	
2.20	0.0063285	2.19870	1.09935	0.14389	1.393	
2.40	0.0068245	2.16592	1.08296	0.04066	1.098	
2.70	0.0075718	2.12080	1.06040	1.88783	0.772	11.078
3.00	0.0083223	2.07976	1.03988	1.73702	0.546	
3.30	0.0090752	2.04214	1.02107	1.58786	0.387	
3.60	0.0098297	2.00746	1.00373	1.44021	0.276	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 88^\circ$

	1	2	3	4	5	6
σ	Q	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (6) по столбцу
4.00	0.0108378	1.96506	0.98253	1.24546	0.176	3.551
4.40	0.0118488	1.92632	0.96316	1.05236	0.113	
4.80	0.0128578	1.89082	0.94541	0.86081	0.072	
5.20	0.0138690	1.85796	0.92898	0.67092	0.047	
6.00	0.0158926	1.79878	0.89939	0.29384	0.020	0.771
6.80	0.0179174	1.74674	0.87387	0.91919	0.008	
7.60	0.0199424	1.70024	0.85012	0.54909	0.004	
8.40	0.0219677	1.63820	0.81910	0.16152	0.001	

0.080

h	Σ	$h \Sigma$
0.025	157.366	3.9342
0.050	122.326	6.1163
0.075	82.959	6.2219
0.100	50.203	5.0203
0.150	26.124	3.9186
0.200	11.078	2.2156
0.300	3.551	1.0653
0.400	0.771	0.3084
0.800	0.080	0.0640

28.8646

— 9.6215

 $S = 19.2431$

$$2 \lg \cos 88^\circ = 3.08564 \quad 0.0012180$$

$$0.0005164$$

$$2 \lg \sin 88^\circ = 1.99948 \quad 0.0007016$$

$$\lg 2e = 4.71349 \quad 0.0022234$$

$$\underline{4.71297 = 0.0015218}$$

Вычитать

из Q (87°)

$$\lg S = 1.28428$$

$$\lg K = 1.72681$$

$$\lg \sin z = 1.99974$$

$$\lg Q = 3.01083$$

$$Q = 1025.2$$

По Ньютоу 1028"

Таблица 12 (продолжение)

$z = 89^\circ$

σ	1	2	3	4	5	6
	Q	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (5) по Симпсону
0.000	0.0003046	3.51627	1.75814	1.75814	57.299	•
0.025	0.0003551	3.44965	1.72482	1.71397	51.757	
0.050	0.0004060	3.39147	1.69573	1.67402	47.208	
0.075	0.0004571	3.33999	1.67000	1.63743	43.394	
0.100	0.0005086	3.29362	1.64681	1.60338	40.122	
0.150	0.0006123	3.21304	1.60652	1.54138	34.784	286.220
0.200	0.0007172	3.14436	1.57218	1.48532	30.572	
0.250	0.0008231	3.08455	1.54227	1.43370	27.146	
0.300	0.0009301	3.03147	1.51573	1.38544	24.290	
0.375	0.0010922	2.96170	1.48035	1.31800	20.792	186.638
0.450	0.0012565	2.90084	1.45042	1.25499	17.988	
0.525	0.0014225	2.84694	1.42347	1.19547	15.684	
0.600	0.0015903	2.79852	1.39926	1.13868	13.762	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 89^\circ$

σ	1	2	3	4	5	6
	Q	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (5) по Симпсону
0.700	0.0018158	2.74093	1.37046	1.06646	11.653	109.966
0.800	0.0020452	2.68926	1.34463	0.99720	9.936	
0.900	0.0022763	2.64278	1.32139	0.93053	8.522	
1.000	0.0025095	2.60042	1.30021	0.86592	7.344	
1.15	0.0028626	2.54324	1.27162	0.77219	5.918	60.839
1.30	0.0032197	2.49218	1.24609	0.68150	4.803	
1.45	0.0035796	2.44616	1.22308	0.59317	3.919	
1.60	0.0039427	2.40420	1.20210	0.50724	3.215	
1.80	0.0044301	2.35358	1.17679	0.39506	2.483	29.757
2.00	0.0049209	2.30796	1.15398	0.28541	1.929	
2.20	0.0054145	2.26644	1.13322	0.17776	1.506	
2.40	0.0059105	2.22838	1.11419	0.07189	1.180	
2.70	0.0066578	2.17666	1.08833	1.91576	0.824	12.104
3.00	0.0074033	2.13028	1.06514	1.76228	0.579	
3.30	0.0081612	2.08824	1.04412	1.61091	0.408	
3.60	0.0089157	2.04984	1.02492	1.46140	0.289	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 89^\circ$

1	2	3	4	5	6
Q	$\operatorname{ctg} Q$	$\lg \frac{1}{VQ}$	$\lg \frac{e^{-3}}{VQ}$	$\frac{e^{-3}}{VQ}$	Суммы (5) по Симпсону
4.00	2.00332	1.00166	1.26459	0.184	3.776
4.40	1.96118	0.98059	1.06979	0.117	
4.80	1.92248	0.96124	2.87664	0.075	
5.20	1.88756	0.94378	2.68572	0.048	
6.00	1.82452	0.91226	2.30671	0.020	0.804
6.80	1.76948	0.88474	2.93006	0.008	
7.60	1.72060	0.86030	2.55927	0.004	
8.40	1.67666	0.83833	2.18075	0.001	
$2 \lg \cos z = 4.48372$		0.00030460	h	$h \Sigma$	0.080
$2 \lg \sin z = 1.99986$		0.00051700	0.025	286.220	7.1305
$\lg 2e = 4.71349$		— 0.00021240	0.050	186.638	9.3319
$\underline{4.71335}$		— 0.0022234	0.075	109.966	8.2475
$\underline{4.71335} - 0.0024358$			0.100	60.839	6.0839
вычитать			0.150	29.757	4.4636
из Q (87°)			0.200	12.104	2.4208
$\lg S = 1.41716$			0.300	3.776	1.1328
$\lg K \sin z = 1.72674$			0.400	0.804	0.3216
$\lg \Omega = 3.14390$			0.800	0.080	0.0640
$\Omega = 1392'8$					

39.1966
— 13.0655
 $S = 26.1311$

По Ньютоу 1387"

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 89^{\circ}30'$

σ	1	2	3	4	5	6
	Q	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-Q}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-Q}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (5) по Симпону
0.000	0.0000762	4.11805	2.05902	2.05902	114.551	
0.025	0.0001267	3.89722	1.94861	1.93776	86.647	
0.050	0.0001776	3.75056	1.87528	1.85357	71.378	
0.075	0.0002287	3.64073	1.82037	1.78780	61.349	
0.100	0.0002802	3.55253	1.77626	1.73283	54.054	
0.150	0.0003839	3.41578	1.70789	1.64275	43.929	451.672
0.200	0.0004888	3.31087	1.65543	1.56857	37.031	
0.250	0.0005947	3.22570	1.61285	1.50428	31.936	
0.300	0.0007017	3.15385	1.57692	1.44663	27.966	
0.375	0.0008638	3.06359	1.53180	1.36895	24.488	229.771
0.450	0.0010281	2.98796	1.49398	1.29855	19.886	
0.525	0.0011931	2.92332	1.46166	1.23366	17.126	
0.600	0.0013519	2.86904	1.43452	1.17394	14.926	

Таблица 12 (продолжение)

 $z = 89^{\circ}30'$

σ	1	2	3	4	5	Сумма (5) по Симпсону
	Q	$\text{elg } Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	
0.700	0.0015874	2.79931	1.39965	1.09565	12.463	124.560
0.800	0.0018168	2.74070	1.37035	1.02282	10.540	
0.900	0.0020479	2.68868	1.34434	0.95348	8.984	
1.000	0.0022811	2.64185	1.32092	0.88663	7.702	
1.15	0.0026342	2.57935	1.28967	0.79024	6.170	64.748
1.30	0.0029913	2.52414	1.26207	0.69748	4.983	
1.45	0.0033512	2.47481	1.23740	0.60749	4.050	
1.60	0.0037143	2.43012	1.21506	0.52020	3.313	
1.80	0.0042017	2.37658	1.18829	0.40656	2.550	30.931
2.00	0.0046925	2.32859	1.16430	0.29573	1.976	
2.20	0.0051861	2.28516	1.14258	0.18712	1.538	
2.40	0.0056861	2.24549	1.12275	0.08045	1.204	
2.70	0.0064294	2.19183	1.09572	1.92335	0.838	12.410
3.00	0.0071799	2.14389	1.07195	1.76909	0.588	
3.30	0.0079328	2.10028	1.05029	1.61708	0.414	
3.60	0.0086873	2.06110	1.03055	1.46703	0.293	

$z = 89^{\circ}30'$

°	1	2	3	4	5	6
	Q	lg Q	$\lg \frac{1}{VQ}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{VQ}$	$\frac{e^{-\sigma}}{VQ}$	Сумма (5) по Симпсону
4.00	0.0036954	2.01344	1.00672	1.26965	0.186	3,840
4.40	0.0107064	1.97137	0.98568	1.07488	0.119	
4.80	0.0117154	1.93125	0.96562	2.88102	0.076	
5.20	0.0127266	1.89528	0.94764	2.68958	0.049	
6.00	0.0147502	1.83121	0.91560	2.31005	0.020	0.814
6.80	0.0167750	1.77533	0.88766	3.93298	0.009	
7.60	0.0188000	1.72584	0.86292	3.56189	0.004	
8.40	0.0208253	1.68142	0.84071	3.18313	0.002	

$$2 \lg \cos z = 5.881684$$

$$0.0007615$$

$$- 0.00051696$$

$$\lg 2e = 1.713491 - 0.00044081$$

$$\lg \sin^2 z = -34 - 0.00222340$$

$$4.713457 - 0.0026642$$

вычесть

из $\Omega (87^{\circ})$

$$\lg S = 1.49841$$

$$\lg K \sin z = 1.72679$$

$$\lg \Omega = 3.22520$$

$$\Omega = 1679.6$$

По Ньютоу 1655"

h	Σ	$h \Sigma$
0.025	451.672	11.2918
0.050	229.771	11.4886
0.075	124.560	9.3420
0.100	64.748	6.4748
0.150	30.931	4.6396
0.200	12.410	2.4820
0.300	3.840	1.1520
0.400	0.814	0.3256
0.800	0.081	0.0648
		47.2612
		-15.7537
		<u>$S = 31.5075$</u>

Таблица 12 (продолжение)

$$z = 90^\circ \text{ Вычисление интеграла } \int_{0.100}^{8.40} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$$

σ	1 $\frac{2\pi}{k} + 2ie^{-\sigma}$	2 $Q =$ $=(1) - 0.0005170$	3 $\operatorname{ctg} Q$	4 $\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	5 $\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	6 $\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	7 Сумма (6) по Симпсону
0.000							
0.025							
0.050							
0.075							
0.100							
0.150							
0.200							
0.250							
0.300							
0.375							
0.450							
0.525							
0.600							

Интеграл $\int_0^{0.100} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$ вычисляется отдельно, ибо $Q = 0$ при $\sigma = 0$						
0.0007210	0.0002040	3.69037	1.84519	1.80176	63.350	
0.0008247	0.0003077	3.51187	1.75594	1.69080	49.068	
0.0009296	0.0004126	3.38447	1.69223	1.60537	40.305	
0.0010355	0.0005185	3.28525	1.64262	1.53405	34.202	
0.0011425	0.0006255	3.20377	1.60188	1.47159	29.620	
0.0013046	0.0007876	3.10369	1.55184	1.38899	24.490	253.331
0.0014689	0.0009551	3.01995	1.50998	1.31455	20.632	
0.0016349	0.0010179	2.99230	1.49615	1.26815	18.542	
0.0018027	0.0012857	2.89086	1.44543	1.18485	15.305	

Таблица 12 (продолжение)

$$z = 90^\circ \text{ Вычисление интеграла } \int_{0.100}^{8.40} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$$

σ	1 $\frac{2\sigma}{k} + 2se^{-\sigma}$	2 $Q =$ $=(1) - 0.0005170$	3 $d \lg Q$	4 $\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	5 $\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	6 $\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	7 Сумм (6) по Симпсону
0.700	0.0020282	0.0015112	2.82068	1.41034	1.10534	12.774	129.158
0.800	0.0022576	0.0017406	2.75930	1.37965	1.03222	10.770	
0.900	0.0024887	0.0019717	2.70516	1.35258	0.96172	9.156	
1.000	0.0027219	0.0022049	2.65661	1.32830	0.89401	7.835	
1.15	0.0030750	0.0025580	2.59110	1.29555	0.79612	6.253	6.200
1.30	0.0034321	0.0029151	2.53534	1.26767	0.70308	5.048	
1.45	0.0037920	0.0032750	2.48479	1.24240	0.61249	4.097	
1.60	0.0041551	0.0036381	2.43913	1.21957	0.52471	3.347	
1.80	0.0046425	0.0041255	2.38453	1.19226	0.41053	2.574	31.339
2.00	0.0051333	0.0046163	2.33570	1.16785	0.29928	1.992	
2.20	0.0056269	0.0051099	2.29159	1.14580	0.19034	1.550	
2.40	0.0061229	0.0056059	2.25135	1.12567	0.08337	1.212	
2.70	0.0068702	0.0063532	2.19700	1.09850	1.92593	0.850	12.515
3.00	0.0076207	0.0071037	2.15406	1.07703	1.77417	0.595	
3.30	0.0083736	0.0078566	2.10477	1.05238	1.61917	0.416	
3.60	0.0091281	0.0086111	2.06494	1.03297	1.46945	0.295	

Таблица 12 (продолжение)

$z = 90^\circ$ Вычисление интеграла $\int_{0.100}^{8.40} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$

σ	1 $\frac{2\pi}{k} + 2ze^{-\sigma}$	2 $Q = (1) - 0.0005170$	3 $\lg Q$	4 $\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	5 $\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	6 $\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	7 Сумма (6) по Симпону
4.00	0.0101362	0.0096192	2.01686	1.00843	1.27136	0.187	3.881
4.40	0.0111472	0.0106362	1.97347	0.98673	1.07593	0.119	
4.80	0.0121562	0.0116392	1.93408	0.96704	0.87247	0.074	
5.20	0.0131674	0.0126504	1.89791	0.94895	0.69089	0.050	
6.00	0.0151910	0.0146740	1.83345	0.91672	0.31117	0.020	0.814
6.40	0.0172158	0.0166988	1.77729	0.88864	0.93396	0.008	
7.60	0.0192408	0.0187238	1.72759	0.86380	0.56277	0.004	
8.40	0.0212661	0.0207491	1.68300	0.84150	0.33392	0.002	

h	Σ	$h\Sigma$
0.025	—	—
0.050	253.331	12.6666
0.075	129.158	9.6869
0.100	66.200	6.6200
0.150	31.339	4.7009
0.200	12.515	2.5030
0.300	3.881	1.1643
0.400	0.814	0.3256
0.800	0.082	0.0656

$$\int_{0.100}^{8.40} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma = S_1 = 25.1553$$

Т а б л и ц а 12 (продолжение)

Вычисление интеграла: $\int_0^{0.100} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}} = \int_0^{0.005} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}} + \int_{0.005}^{0.100} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}} = S_0 + S_2$

Вычисление интеграла:

$$S_0 = \int_0^{0.005} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{0.005} \frac{(1-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{3}\sigma_1\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{0.005}}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{600}\right)$$

$$a = 2\left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right) = 2\left(\frac{1}{790} - 0.0002585\right) = 0.0020146;$$

$$\text{clg } a = 2.69581; \lg \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg \sqrt{0.005} = \bar{2}.84948$$

$$\lg = 0.30103$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg A = 0.39841$$

$$A = 3.1507$$

$$-\frac{1}{600} A = -0.0053$$

$$S_0 = 3.1454$$

$$S_2 = 10.3025$$

$$S_1 = 25.1553$$

$$S = 38.6032$$

$$\lg S = 1.58662$$

$$\lg K = 1.72681$$

$$\lg \Omega_0 = 3.31343$$

$$\Omega = 2057''.8$$

По Ньютоу 2025''

П о в е р к а. $\int_0^{\sigma_1} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{a\sigma}} d\sigma = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{\sigma_1}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} [\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_1)]$

$$\sigma_1 = \sqrt{0.005} = 0.0707107$$

$$\Phi(0.070) = 0.816341$$

$$0.000995$$

$$\Phi(0.071) = 0.815349$$

$$\Phi(\sigma_1) = 0.815634$$

$$\lg 0.141186 = \bar{1}.14978$$

$$\Phi(\sigma) = 0.886227$$

$$\Phi(\sigma_1) = 0.815634$$

$$0.070593$$

$$0.141186$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg S_3 = 1.49768$$

$$S_3 = 3.1454$$

Таблица 12 (продолжение)

Вычисление интеграла S_2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
σ	$\frac{2\sigma}{k}$	$2\sigma e^{-\sigma}$	(2) + (3)	$Q =$ $= (4) - 0.0005170$	$\lg Q$	$\lg \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\lg e^{-\sigma}$	$\lg \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (10) по Симпсону
0.0050	0.00001266	0.00051443	0.00052709	0.00001009	4.99611	2.49806	1.99783	2.49589	313.25	
0.010	0.00002532	0.00051186	0.00058718	0.00002018	4.69508	2.34754	1.99566	2.34320	220.35	
0.0150	0.00003798	0.00050931	0.00054729	0.00003029	4.51870	2.25935	1.99349	2.25284	179.00	
0.0200	0.00005064	0.00050676	0.00055740	0.00004040	4.39362	2.19681	1.99132	2.18813	154.22	
0.0250	0.00006380	0.00050424	0.00056754	0.00005054	4.29636	2.14818	1.98915	2.13733	137.19	
0.0375	0.00009495	0.00049798	0.00059293	0.00007593	4.11959	2.05980	1.98372	2.04352	110.54	1153.36
0.0500	0.00012660	0.00049180	0.00061840	0.00010140	3.99396	1.99698	1.97829	1.97517	94.46	
0.0625	0.00015825	0.00048568	0.00064393	0.00012693	3.89643	1.94822	1.97286	1.92108	83.38	
0.0750	0.00018990	0.00047964	0.00066954	0.00015254	3.81662	1.90831	1.96746	1.87574	75.12	
0.0875	0.00022155	0.00047369	0.00069524	0.00017824	3.74899	1.87450	1.96200	1.83650	68.63	
0.1000	0.00025320	0.00046780	0.00072100	0.00020400	3.69037	1.84519	1.95657	1.80176	63.35	
										774.95

h	Σ	$h\Sigma$
0.0050	1153.36	5.7668
0.0125	774.95	9.6870

$$\begin{aligned}
 & 0.100 \quad 15.4538 \\
 & \int_{0.005}^{0.100} - \frac{5.1513}{\sigma} \\
 & = S_2 = 10.3025
 \end{aligned}$$

представить слова Ньютона, вообразим, что весною или осенью мы со стрелки Елагина острова любимся закатом солнца. Каков же путь солнечного луча по земной атмосфере? Ответ такой. Где-то близ Бергена, у берегов Норвегии, над Атлантическим океаном, этот луч, на высоте около 120 км, входит в крайне холодную атмосферу водорода и гелия, которая постепенно переходит в атмосферу азота, и где-то над Стокгольмом, на высоте 30 км, этот луч входит в область стратосферы, идет в ней над Балтийским морем до Финского залива, над входом в который, на высоте около 11 км, переходит в область тропосферы с ее изменчивой температурой, влажностью и пр. Отсюда понятны слова А. И. Тихова, сказанные им на заседании 16 октября 1934 г. Института истории науки и техники, что ему случалось наблюдать горизонтальную рефракцию, отличающуюся от показываемых в таблицах 34' не на несколько минут и секунд, а на *два градуса* и более.

Отсюда ясен весь условный смысл этих 34', относящийся к идеально спокойному (в оптическом смысле) состоянию нижних слоев атмосферы.

Теорема Лапласа дает ясный ответ, почему при зенитных расстояниях до 70° — 85° рефракция хорошо согласуется с таблицами: потому что для этих значений она практически от строения атмосферы не зависит, мы же видели, сколь просто эта теорема следует из общих формул Ньютона.

Учет влияния температуры и высоты барометра в месте наблюдения следует из формулы

$$\Omega = K \operatorname{tg} z = 206265 \varepsilon \operatorname{tg} z \quad (60)$$

Стоит только в Ньютоновой формуле

$$\mu = 1 + \varepsilon \frac{q}{q_0} \quad (61)$$

разуметь под ε значение показателя преломления у поверхности Земли при нормальной температуре t_0 (скажем, 10°C) и нормальной высоте барометра H_0 (скажем, 760 мм) и, присовокупив к закону

Мариотта закон Гей-Люссака, выразить плотность q и подставить ее в формулу (61), сказанная плотность будет

$$q = q_0 \left(1 + \frac{H - H_0}{H_0} \right) \frac{1}{1 + \alpha(t - t_0)}$$

и мы получим у поверхности Земли вместо

$$\mu_0 = 1 + \varepsilon$$

величину

$$\mu_0 = 1 + \varepsilon \left(1 + \frac{H - H_0}{H_0} \right) \frac{1}{1 + \alpha(t - t_0)} \approx 1 + \varepsilon + \varepsilon \frac{H - H_0}{H_0} - \varepsilon \alpha (t - t_0) \quad (62)$$

и формула (60) примет вид

$$\Omega_1 = 206265 \left[\varepsilon + \varepsilon \frac{H - H_0}{H_0} - \varepsilon \alpha (t - t_0) \right] \operatorname{tg} z$$

иначе

$$\Omega_1 = \Omega + \left[\frac{H - H_0}{H_0} - \alpha (t - t_0) \right] \Omega \quad (62')$$

Это и есть простейшее выражение поправки на высоту барометра и температуру, так что высказанное Ньютоном в письме 24 октября 1694 г. предположение получило свое осуществление примерно через 120 лет, когда Гей-Люссак дал свой закон расширения газов, но у Ньютона все было готово, чтобы этот закон применить.

Как видно, формула (62) применима до тех пор, пока имеет место формула (60), поэтому для больших зенитных расстояний поправка на высоту барометра и температуру столь же мало надежна, как и суждение по показаниям барометра и термометра в Пулковке о высоте барометра и температуре в области, охватывающей Петрозаводск, Вологду, Тверь, Витебск, Ригу и Ганге.

В табл. 13 и 14 приведены первая и вторая Ньютоновы таблицы рефракции, в табл. 15 дано сличение таблицы Ньютона с таблицами Штремгрена (1933 г.) и с таблицей Ньюкомба (1906).

Таблица 13

Первая Ньютонова таблица рефракции

Видимая высота	Рефракция летом	Рефракция весною и осенью	Рефракция зимом	Видимая высота	Рефракция весною и осенью	Видимая высота	Рефракция весною и осенью
0°00'	31'30"	33'20"	35'10"				
0 30	26 06	27 45	29 24	31°	1'28"	61°	0'29"
1 00	21 50	23 12	24 34	32	1 24	62	0 28
1 30	18 51	20 2	21 13	33	1 21	63	0 27
2 00	16 27	17 29	18 31	34	1 18	64	0 26
2 30	14 31	15 23	16 15	35	1 15	65	0 24
3 00	12 52	13 40	14 28	36	1 13	66	0 23
3 30	11 32	12 15	12 58	37	1 10	67	0 22
4 00	10 25	11 4	11 43	38	1 8	68	0 21
4 30	9 29	10 5	10 41	39	1 5	69	0 20
5 00	8 40	9 13	9 46	40	1 3	70	0 19
6 00	7 24	7 52	8 20	41	1 1	71	0 18
7 00	6 27	6 51	7 15	42	0 59	72	0 17
8 00	5 42	6 3	6 24	43	0 57	73	0 16
9 00	5 5	5 24	5 43	44	0 55	74	0 15
10 00	4 36	4 53	5 10	45	0 53	75	0 14
11 00	4 11	4 27	4 43	46	0 51	76	0 13
12 00	3 51	4 5	4 19	47	0 49	77	0 12
13 00	3 53	3 46	3 59	48	0 48	78	0 11
14 00	3 18	3 30	3 42	49	0 46	79	0 10
15 00	3 4	3 16	3 28	50	0 44	80	0 9
16 00	2 52	3 3	3 14	51	0 43	81	0 8
17 00	2 42	2 52	3 2	52	0 41	82	0 7
18 00	2 33	2 42	2 51	53	0 40	83	0 6
19 00	2 24	2 33	2 42	54	0 38	84	0 5
20 00	2 17	2 25	2 33	55	0 37	85	0 5
21 00	2 9	2 17	2 25	56	0 35	86	0 4
22 00	2 2	2 10	2 18	57	0 34	87	0 3
23 00	1 57	2 4	2 11	58	0 33	88	0 2
24 00	1 51	1 58	2 5	59	0 32	89	0 1
25 00	1 46	1 53	2 00	60	0 30	90	0 0
26 00	1 42	1 48	1 54				
27 00	1 37	1 43	1 49				
28 00	1 33	1 39	1 45				
29 00	1 30	1 35	1 40				
30 00	1 26	1 31	1 36				

Таблица 14

Вторая Ньютонова таблица рефракции

Видимая высота	Рефракция	Видимая высота	Рефракция	Видимая высота	Рефракция
0° 0'	33'45"	16°	3' 4"	46°	0'52"
0 15	30 24	17	2 53	47	0 50
0 30	27 35	18	2 43	48	0 48
0 45	25 11	19	2 34	49	0 47
1 0	23 7	20	2 26	50	0 45
1 15	21 20	21	2 18	51	0 44
1 30	19 46	22	2 11	52	0 42
1 45	18 22	23	2 5	53	0 40
2 0	17 8	24	1 59	54	0 39
2 30	15 2	25	1 54	55	0 38
3 0	13 20	26	1 49	56	0 36
3 30	11 57	27	1 44	57	0 35
4 0	10 48	28	1 40	58	0 34
4 30	9 50	29	1 36	59	0 32
5 0	9 2	30	1 32	60	0 31
5 30	8 21	31	1 28	61	0 30
6 0	7 45	32	1 25	62	0 28
6 30	7 14	33	1 22	63	0 27
7 0	6 47	34	1 19	64	0 26
7 30	6 22	35	1 16	65	0 25
8 0	6 0	36	1 13	66	0 24
8 30	5 40	37	1 11	67	0 23
9 0	5 22	38	1 8	68	0 22
9 30	5 6	39	1 6	69	0 21
10 0	4 52	40	1 4	70	0 20
11 0	4 27	41	1 2	71	0 19
12 0	4 5	42	1 0	72	0 18
13 0	3 47	43	0 58	73	0 17
14 0	3 31	44	0 56	74	0 16
15 0	3 17	45	0 54	75	0 15

Таблица 15

Сличение таблиц Ньютона с таблицей Ньюкомба (1906 г.)
и Штремгрена (1933 г.)

z	Ньютон		Ньюкомб (1906)	Штремгрена (1933)	Штремгрена +10° C
	I	II			
0°	0' 0"	0' 0"	0'00"	0'00"	0'00"
10	0 9	0 9	0 10.27	0 10.6	0 10.3
20	0 19	0 20	0 21.19	0 21.9	0 21.2
30	0 30	0 31	0 33.60	0 34.8	0 33.6
40	0 44	0 45	0 48.82	0 50.5	0 48.8
45	0 53	0 54	1 58.2	0 60.2	0 58.2
50	1 03	1 04	1 9.3	1 11.7	1 9.2
55	1 15	1 16	1 23.0	1 25.8	1 22.9
60	1 31	1 32	1 40.5	1 44.0	1 40.4
65	1 53	1 54	2 4.2	2 8.5	2 4.2
70	2 25	2 26	2 38.6	2 44.1	2 38.6
75	3 16	3 17	3 33.9	3 41.5	3 33.8
78	4 05	4 05	4 27.4	4 36.9	4 27.0
81	5 24	5 22	5 52.5	6 5.3	5 52.2
84	7 52	7 45	8 27.7	8 47.1	8 27.7
85	9 13	9 02	9 51.4	10 14.6	9 51.4
86	11 04	10 48	11 44.3	12 13.0	11 44.2
87	13 40	13 20	14 22.6	14 59.8	14 22.6
88	17 29	17 08	18 16.1	19 7.2	18 16.2
89	23 12	23 07	24 20.6	25 37.1	24 21.9
89 30'	27 45	27 35	—	30 21.3	28 41.9
90	33 20	33 45	34 32.1	36 38.6	34 35.1
			t = 50 F	t = 0° C	t = 10° C
			H = 30 _{ДМ}	H = 760 _{ММ}	H = 760 _{ММ}
			t = 10° C		

Таблица 16

Сравнение значений рефракции, рассчитанной
по разным формулам
Барометр 760 мм

Зенитное расстояние	Темпера- тура (° C)	Лаплас	Брадлей	Бюрг	Майер	Пиаци	Деламбр	Майер
10°	-10	11.1	10.9	11.3	11.0	11.3	11.3	10.6
	0	10.4	10.6	10.9	10.6	10.8	10.8	
	+10	10.3	10.1	10.5	10.2	10.3	10.3	
	20	9.9	9.3	10.1	9.9	9.9	9.9	
	30	9.6	9.1	9.7	9.6	9.5	9.4	
20°	-10	22.9	23.0	23.4	22.7	23.1	23.2	21.9
	0	22.0	21.9	22.5	21.9	22.2	22.2	
	+10	21.2	20.9	21.6	21.1	21.0	21.2	
	20	20.4	20.0	20.8	20.4	20.1	20.3	
	30	19.7	18.8	20.1	19.7	19.4	19.5	
30°	-10	36.2	36.5	37.1	36.0	36.8	36.9	34.7
	0	34.8	34.8	35.7	34.7	35.2	35.2	
	+10	33.4	33.2	34.3	33.5	33.6	33.5*	
	20	32.2	31.7	33.0	32.3	32.1	32.2	
	30	31.0	29.8	31.2	31.2	30.8	30.9	
40°	-10	52.9	53.0	53.9	52.3	53.4	53.7	50.4
	0	50.8	50.5	51.8	50.4	53.9	51.2	
	+10	48.9	48.2	49.8	48.6	48.6	48.9	
	20	47.1	46.0	47.9	46.9	46.5	46.8	
	30	45.4	43.9	46.0	45.4	43.8	44.9	
50°	-10	75.0	75.2	76.5	74.2	75.7	76.2	74.3
	0	72.1	71.7	73.5	71.5	72.2	72.6	71.5
	+10	69.3	68.4	70.7	68.9	69.0	69.4	68.9
	20	66.8	65.4	68.0	66.6	65.9	66.4	66.6
	30	64.6	62.3	65.3	64.4	63.3	63.7	64.4

* Напечатано: 38.5

Т а б л и ц а 16 (продолжение)

Зенитное расстояние	Темпера- тура (°C)	Лаплас	Брадлей	Бюрг	Майер	Пиаци	Деламбр	Майер
60°	—10	108.8	109.1	111.1	107.6	110.8	110.5	107.8
	0	104.6	100.4	104.4	103.7	105.7	105.4	103.8
	+10	100.6	99.3	102.7	100.0	100.9	100.7	100.1
	20	96.9	94.9	96.0	96.6	96.6	96.5	96.7
	30	93.5	90.4	92.8	93.4	92.6	92.5	93.5
70°	—10	171.8	172.5	175.8	170.1	175.7	174.6	170.2
	0	165.1	164.4	168.8	163.8	165.0	166.5	163.9
	+10	158.8	157.0	162.4	158.0	159.6	159.1	158.1
	20	153.0	149.9	156.2	152.6	152.7	152.4	152.7
	30	147.6	142.8	150.0	147.5	146.4	146.1	147.7
80°	—10	346.0	349.3	354.9	344.1	350.9	352.9	344.0
	0	332.5	332.8	340.9	331.1	334.7	336.4	331.3
	+10	319.8	317.8	327.9	319.0	319.5	321.4	319.6
	20	308.1	303.5	315.4	307.9	306.0	307.9	308.6
	30	297.9	289.1	302.9	296.6	287.7	295.2	298.5
85°	—10	643.9	657.6	665.9	643.3	649.8	660.1	643.5
	0	617.8	626.7	640.1	619.6	618.2	629.3	619.8
	+10	594.3	598.5	616.9	593.6	591.8	601.3	597.8
	20	572.5	571.4	593.4	573.3	566.7	576.0	577.4
	30	552.2	544.5	569.9	552.4	543.2	552.2	558.3
90°	—10	2192.2	2200.2	2179.3	2100.0	2134.3	2113.1	2061.0
	0	2106.3	2096.5	2090.2	1895.9	2016.5	2014.7	1985.2
	+10	2026.3	2002.1	2014.3	1884.8	1944.1	1925.0	1914.7
	20	1950.1	1911.7	1937.4	1784.5	1862.5	1843.8	1849.0
	30	1882.8	1821.1	1860.8	1696.3	1784.6	1767.8	1778.1**

** Напечатано: 1578.1

В 1806 г. Парижское бюро долгот, в которое тогда входили Лагранж, Лаплас, Лаланд, Деламбр, Прони и другие, издало, с пышным предисловием, посвященным Наполеону, сборник астрономических таблиц. В обширном введении к этому сборнику помещена сравнительная таблица рефракции, вычисленной по формулам Лапласа, Брадлея, Бюрга, Майера, Пиацци, Деламбра и по второй формуле Майера.

В этой таблице показано и влияние температуры на величину рефракции; ввиду наглядности этой таблицы, мы приводим ее в табл. 16. Из этой таблицы особенно ясно видно различие значений рефракции при больших зенитных расстояниях, не говоря уже о горизонтальной рефракции.

Необходимо еще заметить, что метода приближенных квадратур применима и в том случае, когда зависимость плотности воздуха (иначе, его давления и температуры) от высоты над поверхностью Земли задана не аналитически, а таблично или графически. Здесь единственно применимыми для расчета формулами будут формулы Ньютона и метода квадратур.

Во все эти подробности я вошел, чтобы показать, насколько полна и обща та теория астрономической рефракции, которую Ньютон создал в конце 1694 г. и начале 1695 г., но которой он, к сожалению, не опубликовал.

Если развить ньютонову теорию теми элементарными методами анализа, которыми Ньютон обладал, и сравнить ее с современными теориями, то сразу можно будет заметить, сколь простое и естественное получается изложение и сколь мало к нему, по существу, за 240 лет прибавлено. Поэтому мне кажется, что эта теория, как основная, достойна подробного и внимательного изучения, а не того беглого о ней упоминания или полного умолчания, как это делается во всех известных мне учебных руководствах по астрономии.

ПРИЛОЖЕНИЯ



ОТ РЕДАКТОРА

Показателем огромного научного наследия академика Алексея Николаевича Крылова может служить закончившееся в 1956 г. издание многотомного собрания его трудов; общий объем этого издания, включающего свыше 135 отдельных работ А. Н. Крылова, превышает 500 печатных листов. В числе этих произведений имеются его классические научные труды в области кораблестроения, математики, механики, физики, артиллерии, компасного дела, астрономии и др., сыгравшие большую прогрессивную роль в развитии этих различных областей наших знаний.

В связи с ограниченным объемом настоящего сборника избранных трудов А. Н. Крылова в него включены лишь следующие произведения, отображающие главнейшие из перечисленных выше направлений научной деятельности Алексея Николаевича.

1) «Общая теория качки корабля на волнении». Теория качки корабля, созданная А. Н. Крыловым в 1896—1898 гг. и доставившая ему мировую известность выдающегося русского ученого-кораблестроителя, была и остается основополагающей в деле всего последующего развития этой важной и сложной отрасли кораблестроительных наук.

2) «Определение положения равновесия корабля, имеющего пробоину». Названный труд А. Н. Крылова является одной из его работ в области кораблестроительной науки о непотопляемости корабля; эта наука в современном ее виде была создана А. Н. Крыловым в развитие идей С. О. Макарова, направленных на обеспечение живучести боевых кораблей.

3) «Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении» и 4) «О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером». Эти труды А. Н. Крылова отображают большую научную работу его в области компасного дела, которая в 1940 г. была отмечена присуждением ему Сталинской премии первой степени.

5) «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем». В этом научном труде, как и во многих других своих работах, посвященных решению чисто технических задач, А. Н. Крылов, используя математический анализ, развивает его методы до такой степени полноты, что произведение становится ценным научным вкладом и в область прикладной математики.

6) «О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней» и 7) «Некоторые замечания о крешерах и индикаторах». Обе эти ранние работы А. Н. Крылова в области теории колебаний упругих систем имели основополагающее значение в последующем развитии этой отрасли инженерных знаний, и позже были включены А. Н. Крыловым в его классический курс «Вибрация корабля».

8) «О расчете балок, лежащих на упругом основании» и 9) «О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе». Кораблестроительная наука — строительная механика корабля в ее современном виде была создана трудами работавших в тесном содружестве И. Г. Бубнова и А. Н. Крылова. Обе названные работы А. Н. Крылова относятся к его трудам в области строительной механики корабля, но их содержание имеет гораздо более широкий научный и инженерный интерес.

10) «О динамическом уравнивании роторов гироскопов». Включение в сборник этого труда имеет целью отметить большую научную работу А. Н. Крылова в области гироскопов и применения их в морском деле.

11) «О вращательном движении продолговатого снаряда». Это произведение А. Н. Крылова должно представить его научные труды в области морской артиллерии, составляющие содержание тома IV собрания его трудов.

12) «Ньютонова теория астрономической рефракции». Включение в сборник этого произведения оправдывается тем, что в нем находит отражение научная деятельность А. Н. Крылова как в области астрономии, так и в области истории науки и техники.

Все перечисленные работы А. Н. Крылова, помещаемые в настоящем сборнике, снабжены подробными примечаниями, в которых попутно освещаются другие примыкающие главнейшие его научные труды, а также приводятся сведения, касающиеся научной, педагогической и служебной деятельности А. Н. Крылова, связанной с комментируемыми его научными трудами. Автором примечаний и участником редактирования помещенных в сборнике научных трудов А. Н. Крылова является профессор И. Г. Ханович.

Чтобы помочь читателям сборника более широко ознакомиться с научными трудами А. Н. Крылова, в Приложении приводится библиографический указатель основных его работ, составленный по материалам М. Н. Глаголевой.

Академик Ю. А. Шиманский.

АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КРЫЛОВ

Краткий очерк жизни и деятельности

(1863 — 1945)

Алексей Николаевич Крылов — выдающийся советский ученый, академик, Герой Социалистического Труда, заслуженный деятель науки и техники, лауреат Сталинской премии. Классические труды его получили мировое признание и обеспечили ведущую роль русской науки в современном развитии кораблестроительных знаний. Его многообразная практическая и инженерная деятельность, связанная со строительством русского и советского военно-морского флота, и непрерывная многолетняя педагогическая работа сыграли исключительно большую прогрессивную роль в развитии отечественного кораблестроения, начиная с 90-х годов прошлого века и вплоть до наших дней.

А. Н. Крылов родился 15 августа 1863 г. в деревне Висяга Алатырского уезда Симбирской губернии, в семье артиллерийского офицера.

В 1878 г. Алексей Николаевич поступил в Морской корпус и в 1884 г. был выпущен во флот мичманом. Он начал свою службу в Компасной части Главного гидрографического управления Морского ведомства, где им были написаны первые его научные работы по девиации компасов.

В 1885 г. А. Н. Крылов был откомандирован в Кронштадт на курсы минного дела. По окончании курсов, в том же году, Алексей

Николаевич начал работать в Эмеритальной кассе Морского ведомства. Здесь ему пришлось глубоко изучить теорию вероятностей и применить практические приемы сложных вычислений, уже освоенные им в Компасной части Морского ведомства. Этот опыт был позже использован и обобщен Алексеем Николаевичем применительно к техническим расчетам в капитальном труде — «Лекциях о приближенных вычислениях», вышедших первым изданием в 1911 г.

Обладая обширными и глубокими познаниями в области математических наук, А. Н. Крылов направляет свою дальнейшую деятельность по пути приложения математики к кораблестроению. С этой целью он в 1888 г. поступает в Кораблестроительный отдел Морской академии, пройдя предварительно требовавшийся от морских офицеров стаж практической работы на судостроительном заводе.

В 1890 г., окончивший с отличием Морскую академию, Алексей Николаевич был оставлен в ней преподавателем. Он руководил практическими занятиями по математике и читал лекции по теории корабля. С этого времени начинается его непрерывная педагогическая деятельность в Морской академии, которую он совмещал со своей служебной и научной работой в продолжение последующих 50 лет. В процессе этой деятельности А. Н. Крылов создал ряд учебных курсов, являвшихся вместе с тем его оригинальными научными трудами большого практического значения, в которых он широко использовал средства математического анализа для развития и усовершенствования прикладных кораблестроительных наук. Такими классическими курсами, улучшавшимися и дополнявшимися Алексеем Николаевичем при каждом последующем переиздании, были, кроме упомянутых уже «Лекций о приближенных вычислениях», также и следующие труды: «Теория корабля», «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах», «Вибрация корабля», «Качка корабля», «Расчет балок на упругом основании».

В 1895 г. А. Н. Крылову была поручена разработка вопроса о запасе глубины под килем, необходимом для безаварийного прохода корабля в Либавский порт при наличии волнения. В связи с этим Алексей Николаевич создал свою классическую теорию килевой

качки корабля на волнении, являющуюся базой для решения многих практических вопросов по мореходности и прочности кораблей. Два года спустя А. Н. Крылов разработал общую теорию качки при произвольном курсе корабля по отношению к волне. Последняя работа была Алексеем Николаевичем лично доложена в Английском обществе корабельных инженеров, где получила исключительно высокую оценку: автор ее был удостоен редкой награды — золотой медали общества.

В начале 900-х годов А. Н. Крылов в связи с начавшимся развитием в России гражданского судостроения составил обстоятельный доклад о необходимости и порядке подготовки корабельных инженеров. Эта инициатива Алексея Николаевича и последующее близкое участие в продвижении поднятого им вопроса способствовали открытию в Петербурге Политехнического института с Кораблестроительным отделением, впоследствии преобразованным в нынешний Ленинградский кораблестроительный институт.

В 1900 г. А. Н. Крылов был назначен заведующим Опытным судостроительным бассейном Морского ведомства, предназначенным для модельных испытаний и исследований ходовых и иных мореходных качеств судов. Здесь Алексей Николаевич, помимо большой организационно-технической работы, способствовавшей развитию Опытного бассейна и усовершенствованию методологии производившихся в нем различных испытаний, выполнил ряд целевых экспериментальных исследований для разрешения различных вопросов, возникавших в процессе постройки военных кораблей. В частности, были произведены исследования непотопляемости броненосца «Петропавловск». Опыты велись с моделью броненосца и послужили началом большой серии работ А. Н. Крылова в области обеспечения живучести военных кораблей. В этих работах Алексей Николаевич научно обосновал и развил новые идеи и принципы, предложенные адмиралом С. О. Макаровым. Правильность этих положений позже подтвердил опыт Цусимского боя, после чего они получили общее признание и практическое применение в кораблестроении. «Таблицы непотопляемости Крылова» и в настоящее время продолжают оставаться надежной базой для оценки непотопляемости

при проектировании кораблей и средством борьбы за живучесть при повреждениях их в бою.

В 1907 г. А. Н. Крылов был назначен Главным инспектором кораблестроения, а в 1908 г. — председателем Морского технического комитета Морского ведомства. Эти руководящие должности он занимал до 1910 г., т. е. в самый ответственный период восстановления русского военного флота после войны 1904 г.

Алексей Николаевич непосредственно участвовал в проектировании и постройке наших линкоров типа «Севастополь» (позже — «Марат»), ввел ряд новшеств, полностью оправдавших себя и принятых во всей последующей практике отечественного военного кораблестроения (применение на линкорах легких водотрубных котлов, рационализация системы набора корпуса, внедрение сталей повышенного сопротивления и др.).

После оставления службы в Морском техническом комитете и по 1915 г. А. Н. Крылов, помимо преподавательской деятельности в Морской академии, Политехническом институте и Институте инженеров путей сообщения, состоял консультантом Металлического, Обуховского и Путиловского заводов по вопросам, связанным с постройкой военных кораблей.

В это же время Алексей Николаевич выполнил ряд важнейших поручений Морского министерства. Из числа таких заданий следует отметить произведенные в 1913 г. под руководством А. Н. Крылова испытания в Атлантическом океане действия системы Фрама для успокоения качки корабля, для чего был специально зафрахтован и оборудован пароход «Метеор».

В 1915 г. А. Н. Крылов включен в состав правления секвестрованных правительством Путиловских заводов и почти год руководил работой этого правления.

В марте 1916 г. Алексея Николаевича избрали действительным членом Академии Наук. Сначала он был назначен директором Главной физической обсерватории и начальником Главного военно-метеорологического управления, а затем, в 1917 г., — директором Физической лаборатории Академии Наук, вскоре после этого преобразованной в Физический институт.

В числе передовых представителей русской научной интеллигенции А. Н. Крылов с первых же дней Великой Октябрьской социалистической революции непосредственно включился в работу по возрождению страны. Все свои знания и богатейший опыт Алексей Николаевич отдал народу, создававшему новую жизнь.

В частности, А. Н. Крылов принял самое близкое и непосредственное участие в преобразовании Морской академии. В 1919 г. приказом Реввоенсовета Балтийского флота Алексей Николаевич был назначен начальником Морской академии. В полуторогодичный период пребывания А. Н. Крылова в этой должности под его непосредственным руководством были разработаны новые учебные планы и подробные программы по всем предметам технических факультетов Академии.

В 1921 г. Алексей Николаевич был командирован Академией Наук в западноевропейские страны в составе комиссии, имевшей целью возобновление научных сношений с зарубежными учеными и научными учреждениями, закупку книг и новейших оптических и физических приборов. Эта командировка А. Н. Крылова вылилась в продолжительную, вплоть до 1927 г., службу его за границей, вначале связанную с выполнением различных заданий советских торговых представительств в Берлине, Лондоне и Париже, затем — в качестве начальника Морского отдела Российской железнодорожной миссии в Берлине, позже — в качестве члена правления Русско-Норвежского пароходного общества и наблюдающего за постройкой судов, заказанных в разных странах Европы.

Рассматривая этот период деятельности А. Н. Крылова, следует особо отметить его большую, полную инициативы работу при практическом разрешении сложной задачи по перевозке морем в Россию 1200 паровозов, построенных на 20 заграничных заводах по заказу советских организаций. Эта задача была весьма успешно разрешена при участии и непосредственном техническом руководстве Алексея Николаевича, как отмечено в выпущенной Железнодорожной миссией книги «Перевозка паровозов», шестая глава которой содержит принадлежащие перу А. Н. Крылова техническое описание и расчеты, относящиеся к этому делу.

По возвращении из-за границы в 1927 г. Алексей Николаевич возобновил чтение лекций в Морской академии и вернулся к заведыванию Физико-математическим институтом Академии Наук. Наряду с этим он принимал самое близкое участие в разрешении наиболее сложных технических вопросов, возникавших в различных областях нашего военного и гражданского судостроения, в порядке экспертиз, консультаций, участия в технических совещаниях и комиссиях и разработке отдельных технических вопросов.

Эта деятельность А. Н. Крылова сопровождалась его большой научной работой, которая выражалась не только в многочисленных статьях, опубликованных в различных периодических изданиях, но и в написанных им капитальных работах «Основания теории девиации компаса», «О теории гирокомпаса Аншютца» и «Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении», удостоенных в 1941 г. Сталинской премии первой степени.

Несмотря на постоянную занятость Алексей Николаевич находил время для активной научно-общественной деятельности, часто выступал с докладами на научные и технические темы в научных обществах, в учебных заведениях, на различных конференциях и собраниях. В течение последних лет своей жизни он был бессменным председателем правления Научного инженерно-технического общества судостроителей, деятельностью которого активно руководил. Многие собрания и конференции этого общества были отмечены докладами и выступлениями А. Н. Крылова, направлявшими последующее развитие работ в соответствующих областях науки и техники судостроения.

В одном из таких выступлений Алексей Николаевич сказал: «За последние 50 лет кораблестроение развилось более, нежели за предшествующие пятьдесят, а, может быть, и сто веков; чему обязан этот быстрый прогресс? Ответ ясен — кораблестроение преобразилось из искусства в строгую точную науку...».

Отмеченным А. Н. Крыловым преобразованием из искусства в строгую науку кораблестроение в значительной степени обязано самому Крылову, широко привлекавшему средства математического анализа к решению практических инженерных задач и создавшему

этим научный фундамент, на котором базируется современное кораблестроение.

В одной из автобиографий Алексей Николаевич определил свою специальность как «приложение математики к различным вопросам морского дела». Однако при приложении математики к решению практических задач А. Н. Крылов настолько развивал сами средства математического анализа, что многие его научные труды по кораблестроению являются ценным вкладом в область прикладной математики, дающим основание считать его не только ученым-кораблестроителем, но и выдающимся математиком.

Даже свои капитальные труды в области астрономии, весьма далекие от непосредственной практики, Алексей Николаевич сумел связать с потребностями инженерного искусства. В своем докладе «Прикладная математика и ее значение для техники» он говорил по этому поводу: «Казалось бы, что может быть общего между расчетом движения небесных светил под действием притяжения к Солнцу и между собой и качкой корабля на волнении, или между определением, так называемых, вековых неравенств в движении небесных тел и крутильными колебаниями вала многоцилиндрового двигателя Дизеля, работающего на корабельный винт или на электрогенератор? Между тем, если написать только формулы и уравнения без слов, то нельзя отличить, какой из этих вопросов решается: уравнения одни и те же...».

А. Н. Крылов, свободно владевший латинским, французским, немецким и английским языками, не только изучил в подлинниках труды классиков науки, но своими извлечениями из них и переводами, снабженными собственными многочисленными пояснениями и комментариями, сделал эти труды доступными для широкого познания и использования. Особо следует отметить его перевод с латинского языка классического сочинения Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии». Эта работа потребовала от Алексея Николаевича двухлетнего кропотливого и упорного труда.

Возвращаясь к рассмотрению работ Алексея Николаевича в области кораблестроительных наук, следует указать, что наиболее значительными, классическими, являются труды его, относящиеся

к различным разделам теории корабля и в особенности качки корабля на волнении.

Все научные труды А. Н. Крылова в области теории корабля, несмотря на большую давность их написания, до сих пор продолжают служить основными учебными руководствами и основополагающими источниками для дальнейшего развития различных разделов этой науки.

В непосредственной связи с качкой корабля на волнении находится проблема умерения бортовой качки корабля путем снабжения его специально предназначенными для этого устройствами. А. Н. Крылов был создателем современных теорий расчета таких устройств как водяного, так и гироскопического типов.

Им написан ряд ценных работ в области теории гироскопа и применения его для стабилизации различных корабельных приборов и установок.

Современная строительная механика корабля, т. е. наука о прочности корабля, во многом обязана своим развитием Алексею Николаевичу, который не только обогатил ее такими капитальными трудами, как «О расчете балок, лежащих на упругом основании» и «Вибрация корабля», но и по праву может считаться ее основоположником, наряду с И. Г. Бубновым, с которым он работал в тесном сотрудничестве в начальный период создания этой науки.

В первой из названных работ, выдержавшей несколько изданий, А. Н. Крылов обосновал и развил оригинальный метод расчета балок и перекрестных связей и обобщил этот метод применительно к балкам переменного сечения и к набору судового корпуса. В работе «Вибрация судов» он изложил строгую математическую теорию колебания упругих систем и методику применения этой теории к решению различных практических задач, в частности к расчету вибрации корпуса корабля.

Алексей Николаевич — по образованию инженер-кораблестроитель и военный моряк — был выдающимся ученым не только в области кораблестроения и математики, но и таких морских наук, как артиллерия, астрономия, компасное дело и др. Показателем большого объема и широкого диапазона научного творчества Крылова может

служить недавно завершенное двенадцатитомное собрание его научных трудов, включающее отдельные тома, посвященные его работам по математике и механике, астрономии, баллистике и компасному делу.

Заслуженным признанием пользуются научные работы Алексея Николаевича, посвященные проектированию и боевому использованию различных видов морского оружия, в особенности артиллерии. Его капитальный труд «О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета», вместе с другими работами в области артиллерии, занимает четвертый том собрания его трудов.

А. Н. Крылов был изобретателем и конструктором многих приборов, осуществленных и используемых на практике, как то: «дромоскопа», автоматически вычисляющего девиацию компаса; прибора для интегрирования дифференциальных уравнений; прибора для определения отклонения целика на ход противника; «отметчика» для обучения наводке при артиллерийской стрельбе; прибора для обучения стрельбе на качке; прибора для записи давления в компрессоре; дальномера; оптического прицела и др.

О своей жизни и деятельности, охватывающей наиболее интенсивный период развития кораблестроения, Алексей Николаевич рассказывает в книге «Мои воспоминания», опубликованной первым изданием в 1942 г.

Эта книга, представляющая большой историко-познавательный и поучительный интерес для кораблестроителей, военных моряков и всех лиц, связанных с морским делом, пользуется заслуженным успехом у широкого круга читателей в качестве своеобразного образца чисто художественной литературы.

В 1949 г. вышла книга «Воспоминаний и очерков» об А. Н. Крылове, значительно дополняющая книгу «Мои воспоминания» новыми документальными материалами, относящимися к его жизни и деятельности. На первой странице книги помещено следующее высказывание Алексея Николаевича: «Сила и мощь науки беспредельны, так же беспредельны и практические ее применения на благо человечества».

Вера в науку и любовь к труду, так же как и любовь к своей Родине и своему народу и его военно-морскому флоту, служили для

Алексея Николаевича тем неиссякаемым источником творческой энергии, который вдохновлял его до последних дней жизни.

Заслуги А. Н. Крылова высоко оценены Советским правительством, наградившим его двумя орденами Ленина и присвоившим ему звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР и лауреата Сталинской премии. Указом Президиума Верховного Совета СССР Алексею Николаевичу было присвоено звание Героя Социалистического Труда за выдающиеся достижения в области математических наук, теории и практики отечественного кораблестроения, многолетнюю и плодотворную работу по проектированию и строительству современных военно-морских кораблей, а также крупнейшие заслуги в деле подготовки высококвалифицированных специалистов для военно-морского флота.

Алексей Николаевич Крылов скончался 26 октября 1945 г. в Ленинграде на восемьдесят третьем году жизни. Похоронен он на Волковом кладбище.

Академик Ю. А. Шиманский.

ПРИМЕЧАНИЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ КОРАБЛЯ НА ВОЛНЕНИИ

Впервые напечатано под названием «A general theory of the oscillations of a ship on waves» в журнале «Transactions of the Institution of Naval Architects» (1898, vol. 40, pp. 135—190); на русском языке опубликовано в гл. VI книги академика А. Н. Крылова «Качка корабля» (изд. Военно-морской академии РККФ им. К. Е. Ворошилова, 1938, стр. 172—236), а также в «Собрании трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1951, т. 11, стр. 183—250).

Статья представляет собой доклад, прочитанный А. Н. Крыловым 1 апреля 1898 г. в Английском обществе корабельных инженеров.

Общепризнано, что А. Н. Крылов является творцом современной теории качки корабля на волнении, создание которой доставило Алексею Николаевичу мировую известность уже на заре его научной деятельности.

Динамические проблемы теории корабля, в первую очередь исследования качки, давно занимали умы выдающихся математиков. Леонард Эйлер, рассматривая свободные колебания корабля на тихой воде, установил выражение для их периода. Изучение вынужденных качаний корабля, вызванных возмущающим действием волнения, представлялось исключительно сложной задачей. Приближенное ее решение дал в 1771 г. Даниил Бернулли, установивший возможность проявления резонанса и выяснивший роль, которую в вопросах качки играет отношение периода свободных колебаний корабля к периоду волны. Теория Бернулли была основана на недостаточно правильном представлении о колебательном движении воды и предполагала, что направление силы поддержания и на волнении остается вертикальным.

В 1861 г. Вильям Фруд создал элементарную теорию боковой качки корабля на волнении, в которой направление силы поддержания было принято нормальным к волновой поверхности. Теория Фруда предполагает размеры корабля весьма малыми по сравнению с основными элементами волны и в этой связи совершенно не применима к исследованию килевой качки; она создает также неправильные представления о вертикальных колебаниях корабля.

Вскоре было обнаружено, что конечность размеров корабля может вносить значительные коррективы и в определяемые по Фруду амплитуды боковой качки. Однако ни одна из предшествовавших работ (Раикина, Сен-Венана, Бертеа и др.) по совершенствованию элементарной теории не увенчалась успехом. Понадобился гений Алексея Николаевича, чтобы создать общую теорию качки корабля на волнении на новых, рациональных основах. Естественно, что теория Фруда является частным и притом простейшим случаем теории А. Н. Крылова.

На лекциях по теории корабля, прочитанных слушателям Военно-морской академии в 1895 г., Алексей Николаевич впервые изложил теорию килевой качки на волнении, в основу которой им была положена следующая гипотеза: на каждую точку погруженной поверхности корабля действует такое же давление, какое имело бы место в соответствующей точке объема взволнированной жидкости в отсутствие корабля. Это предположение, в отличие от принятого в английской теории, позволяет при определении сил, действующих со стороны воды на корабль, учесть действительные его линейные размеры и форму наружной поверхности. Свою теорию А. Н. Крылов доложил и на заседании Русского Технического общества.

Как и все работы Алексея Николаевича, теория килевой качки возникла в связи с необходимостью решения практической задачи: в 1895 г. в ходе постройки Либавского порта требовалось определить минимально допустимый запас глубины под килем корабля, чтобы при килевой качке корабль не касался дна гавани.

Через некоторое время (27 марта 1896 г.) А. Н. Крылов выступил в Английском обществе корабельных инженеров со своим первым докладом на тему «Теория килевой качки корабля на волнении» (Trans. of the Inst. of Naval Arch., 1896, т. 37, стр. 326—359; Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, 1951, т. 11, стр. 136—182), в котором изложил ставшее классическим решение одной из фундаментальных проблем кораблестроения: в работе Алексея Николаевича впервые создана возможность достаточно строгого учета влияния волнения на прочность корабля и исследования его мореходных качеств в широко различных условиях морской обстановки.

А. Н. Крылов в 1897 г. читал лекции по теории корабля новому набору слушателей Академии. В процессе подготовки к этому курсу он создал общую теорию качки корабля на волнении, представляющую собой дальнейшее развитие и обобщение указанных выше идей на случай произвольного курса корабля по отношению к волне. В этой работе теория качки доводится до такого совершенства, что основные ее выводы и положения остаются незыблемыми и по настоящее время.

На следующий год А. Н. Крылов доложил новую теорию в Русском техническом обществе (27 января 1898 г.), а затем в Английском обществе корабельных инженеров.

Состояние рассматриваемой области знаний до опубликования обонх докладов Алексея Николаевича достаточно образно характеризовалось свидетельством Фруда: «Когда вновь построенный корабль выходит в море, то его строитель следит за его качествами на море с душевным беспокойством и неуверенностью, как будто бы это был воспитанный и выращенный им зверь, а не им самим обдуманное и исполненное сооружение, которого качества должны бы быть ему вперед известны в силу самих основ, положенных при составлении проекта» (цит. по: Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, 1951, т. 11, стр. 249—250).

Английские ученые-кораблестроители в то время исключали возможность решения тех проблем теории качки, которые сумел так полно разработать А. Н. Крылов: «В попытках приближенно определить срезающие и изгибающие усилия, действующие на корабль на море, — писал Эдуард Рид, — мы встречаемся с большими трудностями; и вопрос этот при настоящем состоянии знаний не допускает полного и точного решения... Что же касается динамической части вопроса, хотя она и самая важная, то в настоящее время ее решение выше наших сил...» (цит. по: Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, 1951, т. 11, стр. 185).

С каждым докладом Алексея Николаевича на родине Фруда и Рида пальма первенства в области теории корабля все больше отходила к русской науке. Одновременно эти доклады явились для членов Английского общества корабельных инженеров своего рода испытанием математической эрудиции и умения прилагать математику к решению специальных практических задач.

Для иллюстрации последнего положения приведем высказывания председателя английского общества, которыми он заключал прения по второму докладу Алексея Николаевича: «Джентльмены, я нахожусь почти в таком состоянии, как забитый крестьянин из западной части страны, который в ответ на вопрос церковного старосты при выходе из церкви: „Что ты думаешь о проповеди?“ (проповедник, я должен заметить, был блестящим) — сказал: „Она была великолепной, но такому бедному человеку, как я, не суждено ее понять“. Тем не менее, я прошу вас весьма сердечно поблагодарить капитана Крылова за драгоценный вклад, который он внес в труды нашего общества в этом году» (Trans. of the Inst. of Naval Arch., 1898, vol. 40, p. 194). Преподаватель Военно-морской академии, капитан русского флота А. Н. Крылов был награжден золотой медалью впервые за все время существования Общества корабельных инженеров при-сужденной неангличанину.

Оба своих доклада Алексей Николаевич построил таким образом, чтобы сделать их содержание доступным специалистам различной квалификации. Первая часть каждого доклада представляет популярное изложение вновь предлагаемой теории и области ее практических применений, иллюстрируемых простыми графиками и легко усваиваемыми правилами. Вторая часть, озаглавленная «Приведение», посвящена математическому изложению теории и строгим доказательствам основных принципов, высказанных и использованных в первой части. Наконец, следуя своему неизменному принципу, А. Н. Крылов каждый из

докладов включает численными расчетами, во всех деталях поясняющими применение предлагаемой теории на конкретном примере исследования качки корабля «Адмирал Корнилов».

Метод решения, примененный Алексеем Николаевичем в первом докладе, в основных чертах заключался в следующем. Используя теорию трохондальных волн для определения давления в произвольной точке судовой поверхности, автор составляет систему дифференциальных уравнений движения корабля, преобразуя предварительно поверхностные интегралы к виду объемных. Для исключения Лагранжевых координат А. Н. Крылов пользуется оригинальным разложением соответствующих неявных функций в ряд. Последняя часть преобразований — взятие большого числа квадратур — выполняется изящными приемами, налагающими на судовую поверхность единственное условие — прямостенность борта в пределах относительного изменения уровня воды. Таким образом, система дифференциальных уравнений приводится к легко интегрируемому виду, причем коэффициенты этой системы выражаются через интегралы, вычисление которых немногим сложнее квадратур, обычно встречающихся в теории корабля.

Во втором докладе (см. комментируемую работу) Алексей Николаевич пользуется излюбленным им модернизированным методом Эйлеровых углов и, заменяя трохондальный профиль волны синусоидальным, исследует систему шести дифференциальных уравнений движения корабля в самом общем случае расположения его по отношению к направлению бега волны. И здесь оригинальными, изящными приемами решение доводится до простых численных результатов, позволяющих затем найти срезающие усилия и изгибающие моменты, действующие в каждом сечении корабля в условиях волнения; относительно легко могут быть исследованы на базе теории А. Н. Крылова и мореходные качества корабля — всхожесть на волну, сухость палубы, заливаемость бортов и т. п.

Работы Алексея Николаевича снискали ему еще в конце прошлого столетия мировую славу: когда для «Лейпцигской энциклопедии математических наук» понадобился в 1907 г. общий очерк теории корабля, он был заказан в России — профессору Морской академии А. Н. Крылову.

В § 12 «Прибавлений» ко второму докладу в Английском обществе корабельных инженеров, а за год до этого на лекциях в Военно-морской академии А. Н. Крылов впервые изложил в форме кратких тезисов теорию успокоительных систем, которая до этого отсутствовала. Здесь же за 12—13 лет до Фрама было сформулировано основное условие проектирования пассивных систем для умерения качки — равенство времени пробега воды с борта на борт полупериоду собственных колебаний корабля — и частично изложены результаты опытных исследований, проведенных впервые профессором Иваном Григорьевичем Бубновым.

В докладе, прочитанном 15 декабря 1945 г. на совместном заседании Академии Наук и представителей Военно-морского флота СССР, посвященном памяти Алексея Николаевича, профессор П. Ф. Папкович убедительно показал, что не

только основное патентное условие, но и форма успокоительных систерн, на которой Фрам остановился в 1910 г., была подсказана ему работами Крылова—Бубнова. Если, кроме того, учесть, что использование для умерения качки корабля успокоительных систерн и применяемые поныне основные типы их конструкции были предложены адмиралом С. О. Макаровым в 1894 г. в статье «Разбор элементов, составляющих боевую силу судов» (Морской сборник, 1894, № 6), то станет ясным, что родиной этого основного средства повышения мореходных качеств кораблей является Россия.

В течение всей последующей почти полувековой научной деятельности А. Н. Крылов неоднократно возвращался к вопросам качки корабля, продолжая развивать и совершенствовать созданную им отрасль науки о корабле.

В 1912 г. при проектировании линейных крейсеров типа «Измаил» снова возник вопрос о применении успокоительных систерн для общей стабилизации корабля. В своих «Воспоминаниях» Алексей Николаевич рассказывает о деятельности специальной комиссии, «которая ни к чему не привела, только время провела». Длительные и горячие дебаты о полезности применения систерн в качестве успокоителей качки были прерваны в начале 1913 г. экспедицией на пароходе «Метеор», руководство которой было поручено А. Н. Крылову.

Результаты испытаний оказались вполне удовлетворительными и полностью подтвердили теоретические предвычисления Алексея Николаевича. Следует дополнительно отметить, что как по своей организации, так и по методике проведения и обработки результатов, исследования на «Метеоре» долгие годы оставались в буквальном и переносном смысле слова неповторимыми.

В 1933 г. на заседании Секции мореходных качеств Правления Всесоюзного Научного инженерно-технического общества судостроения (ВНИТОСС), бесшестимым председателем которого А. Н. Крылов состоял с момента организации Общества, он прочел доклад «О боковой качке корабля, имеющего заданную диаграмму остойчивости» (Труды ВНИТОСС, 1934, т. 1, вып. 3), в котором впервые излагались методы расчета качки — нелинейной в части, относящейся к восстанавливающему моменту. До этого во всех работах, как единственно удобная для простоты анализа предпосылка принималась прямая пропорциональность между восстанавливающим моментом, действующим со стороны воды на корабль, и углом наклонения. К этому же разделу теории корабля Алексей Николаевич возвращается в самое последнее время в своей книге «О боковой качке корабля», изданной в 1942 г. Появление указанного труда столь характерно для деятельности А. Н. Крылова, что представляется полезным остановиться на этом подробнее.

В 1940 г. в Военно-морской академии возникла мысль о создании стабилизационной комиссии с целью разработки вопроса о наиболее рациональном типе успокоителя качки. А. Н. Крылов незамедлительно приступил к исследованию сложнейшей части общей проблемы, а именно, нелинейной (в отношении сопротивления воды) теории качки, исходящей из более правильного представления

о зависимости сопротивления воды качаниям корабля не только от первой, но и от второй степени скорости.

Отметим здесь же, что создатель линейной теории качки, — которая в основных чертах продолжает находить подтверждение в последних экспериментальных и теоретических работах научно-исследовательских институтов, — Алексей Николаевич Крылов первым, как подлинный новатор науки, приступил к коренной перестройке аппарата исследования, связанной с нелинейностью закона сопротивления воды.

В 1940 г. А. Н. Крылов предпринимает фундаментальную работу, в которой систематически исследует влияние квадратичного и смешанного (с линейным) закона сопротивления воды на свободные, а затем и вынужденные колебания корабля.

При этом он показывает, что решение первой задачи сводится к простому применению таблиц Мильна, составленных путем численного интегрирования одностепенных уравнений, а для второй задачи рекомендует использовать метод последовательных приближений, аналогичный применяемому в небесной механике. Здесь же указывается и возможность численного интегрирования, причем на примерах со всеми подробностями поясняются схемы и принципы расчета.

Особый интерес представляет третья глава книги «О боковой качке корабля», посвященная теории пассивных успокоительных систем. Дело заключается в том, что патентное условие Фрама содержит противоречивые допущения, касающиеся коэффициента сопротивления жидкости в системах: с одной стороны, он принимается настолько малым, чтобы имело место запаздывание колебаний жидкости по отношению к кораблю на 90° , с другой — настолько большим, чтобы свободные перемещения жидкости практически отсутствовали.

Используя символический метод Коши и представляя искомые колебания в комплексной форме, Алексей Николаевич дает строгое в пределах линейной теории решение общей задачи. Затем исследование распространяется на случай возмущающей силы, заданной произвольного вида функцией, при сохранении линейного закона сопротивления. Наконец, в заключение излагается оригинальная методика численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения корабля и жидкости в системах в случае, когда сопротивление воды выражается двучленной формулой, содержащей скорость перемещения в первой и во второй степени.

Имея в виду значительное усложнение аппарата исследования, А. Н. Крылов на нескольких страницах (Акад. А. Н. Крылов. О боковой качке корабля. Военмориздат, 1942, стр. 56—59, 65—66) подробно останавливается на доказательстве необходимости такого рода вычислений: «Прежде всего, необходимо решить, следует ли предпринимать „обширные“ вычисления для обоснования теорий системы Фрама, или достаточно ограничиться чисто экспериментальными исследованиями, или же вслепую подражать Германии и основываться на формулах Фрама, несмотря на их явные недостатки?». Далее в качестве примера обычных для

астрономов вычислений, А. Н. Крылов приводит «Морской ежегодник», включающий около ста тысяч цифровых данных и в том числе много сведений о малых планетах, «для которых мифологических имен более не хватает». Отметив, что «все эти справочники не диктуются ангелами и не сваливаются с неба, как Коран Магомета, а вычисляются особыми бюро с весьма небольшим числом сотрудников», Алексей Николаевич следующими словами заключает рассмотрение вопроса: «Нам предстоит заниматься совершенствованием величественнейших из подвижных сооружений — линейных кораблей. Ясно, что объем наших вычислений, ничтожный по сравнению с вычислениями, производимыми астрономами, нас останавливать не должен».

В 1943 г. А. Н. Крылов в оставшихся неопубликованными письмах Юлиану Александровичу Шиманскому впервые излагает теорию особого типа успокоителей качки, основанных на перемещении твердых грузов. Тяжелая болезнь помешала Алексею Николаевичу завершить этот труд.

Констатируя основоположную роль Алексея Николаевича в создании и развитии современной теории качки, необходимо отметить еще одну примечательную особенность его деятельности. Крылова-ученого всегда сопровождал Крылов-изобретатель.

Так, Алексею Николаевичу мы обязаны разработкой фотографического метода записи качаний корабля, столь успешно примененного в период известных опытов на каионерской лодке «Уралец». В это же время он создает пользующийся и поныне широкой популярностью на флоте отсчетчик Крылова, или прибор для обучения наводке при качке корабля. Наконец, в 1939 г. он предлагает нашей промышленности оригинальной конструкции сильно демпфированный жидкостной кренометр, показывающий величину статического крена на качающемся корабле (О кренометре, показывающем на качке то положение равновесия, около которого корабль качается).

Труды Алексея Николаевича получили дальнейшее развитие в работах его школы. Как указывалось выше, при определении сил, действующих на корабль, А. Н. Крылов не учитывал изменений, которые вносятся в поле волновых давлений присутствием и качаниями корабля. Влияние этих факторов было детально изучено впервые в 1943 г. молодым советским ученым Максимом Даниловичем Хаскиндом, применившим для этих целей фундаментальный метод решения волновых задач, предложенный академиком Николаем Евграфовичем Кочиным. Таким образом, были получены относительно простые выражения так называемых коэффициентов присоединенных масс воды, зависящих от размерений корабля и формы судовой поверхности. Величины этих коэффициентов входят в уравнения А. Н. Крылова в виде добавок к основным коэффициентам, и поэтому учет гидродинамических особенностей явления не усложняет его исследования.

Труды Алексея Николаевича и по настоящее время служат основной базой для количественной оценки эксплуатационных условий, в которых находятся многообразные приборы военно-морской техники при плавании кораблей на волне-

нии, и широко используются конструкторскими бюро и научно-исследовательскими институтами и в этом направлении.

Уже изложенного достаточно, чтобы уяснить, как много сделал А. Н. Крылов для развития отечественной кораблестроительной науки. Однако это лишь одно из направлений его исключительно многогранной деятельности, представленное в настоящем сборнике избранных трудов комментируемой статьей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОРАБЛЯ, ИМЕЮЩЕГО ПРОБОИНУ

Впервые опубликовано в 1938 г. в литографированном издании Военно-морской академии Военно-морского флота имени К. Е. Ворошилова и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1948, т. IX, ч. I, стр. 382—398).

Статья представляет значительную отрасль научно-инженерной и практической деятельности Алексея Николаевича, непосредственно примыкающую к работам адмирала Степана Осиповича Макарова.

Основные принципы учения о непотопляемости корабля предложены С. О. Макаровым. Во многих статьях, опубликованных в журнале «Морской сборник» за 1870—1894 гг., он впервые предложил средства, обеспечивающие сохранение боеспособности корабля после получения больших подводных пробоин, и в качестве основного способа выравнивания корабля рекомендовал затопление водой поврежденных отсеков. При этом для рационального спрямления корабля С. О. Макаров считал необходимым «заранее вычислить, какую перемену в крене и дифференте производит наполнение водою каждого из отделений» (Морской сборник, 1875, № 6, стр. 49, Неоффиц. отд.) и иметь на корабле соответствующие таблицы.

Метод производства подобного рода расчетов в то время не был еще разработан, а сама теория непотопляемости как часть теории корабля, обеспечивающая решение аварийных задач и локализацию последствий аварий или боевых повреждений, не существовала. Заслуга создания современной теории непотопляемости принадлежит главным образом А. Н. Крылову, а также его ближайшему ученику и сотруднику по кораблестроению, профессору Военно-морской академии Ивану Григорьевичу Бубнову.

13 ноября 1901 г. А. Н. Крылов подал председателю Морского технического комитета рапорт, в котором указывал, «что спасение корабля от гибели при пробоинах должно основываться на своевременном и постепенном заполнении других отделений трюма, кроме поврежденных, и что для выбора надлежащих отсеков для затопления командиру полезно иметь таблицу, показывающую влияние такого затопления» (Архив АН СССР, фонд 759). Комитет в принципе одобрил предложение и поручил автору рапорта в виде примера составить указанную таблицу для одного из кораблей.

Составление таблиц непотопляемости потребовало от Алексея Николаевича обширного и систематического исследования, позднее вошедшего в его широко известный курс «Теории корабля». Начав с определения изменения посадки и остойчивости корабля при затоплении единичного отсека — «глухого», либо открытого сверху и сообщающегося с забортной водой, А. Н. Крылов рассматривает затем затопление группы отделений и приводит расчетные формулы в этом наиболее сложном случае к такому виду, что вычисление основных элементов плавучести и остойчивости корабля сводится к простым арифметическим действиям над величинами, заранее рассчитанными для различных отделений. Первая таблица А. Н. Крылова и содержала все необходимые данные по каждому отдельному отсеку с одновременным указанием его расположения на корабле. Уделяя особое внимание обеспечению остойчивости поврежденного корабля, Алексей Николаевич ввел дополнительно вторую таблицу, позволяющую учесть наличие повреждений в надводном борте и верхней или средней палубе.

2 января 1903 г. А. Н. Крылов представил в Морской технический комитет первые таблицы непотопляемости, составленные им для броненосца «Петропавловск».

При выполнении этих расчетов Алексей Николаевич обратил внимание на ряд существенных недостатков в конструкции корабля, которые могут привести к его гибели. В особом секретном рапорте он, в частности, докладывал, что если в диаметральной переборке кормового котельного отделения броненосца не будет сделана дверь, то при пробое в этом районе корабль неминуемо опрокинется; при открытой же двери броненосец останется на плаву и не только может быть вывешен, но и сохранит способность управляться.

Предложения Алексея Николаевича получили одобрительную оценку председателя Морского технического комитета, отметившего, что разработанные А. Н. Крыловым меры «для увеличения живучести корабля представляются настолько простыми и целесообразными, что желательно приступить к их осуществлению безотлагательно» (Архив АН СССР, фонд 759).

Однако тогдашний руководящий состав комитета (особенно главный инспектор кораблестроения генерал-лейтенант Кутейников) являл собой непревзойденный образец рутини и бюрократизма и, для того, чтобы не нарушать покоя некоторых «превосходительных» особ и не ломать старых традиций в кораблестроении, рапорт Алексея Николаевича положили под сукно. Не помог и опыт с моделью «Петропавловска», проведенный в Опытном бассейне и полностью подтвердивший расчеты А. Н. Крылова. Вспомнили об этом только в 1904 г., при столь памятных для нашего флота обстоятельствах.

Не получая должной поддержки в Морском техническом комитете, Алексей Николаевич широко пропагандирует свои идеи среди офицерского состава флота. В феврале 1903 г. он выступает в зале Морской библиотеки в Петербурге с дополнением к лекции адмирала С. О. Макарова о непотопляемости кораблей. Несколько дней спустя он посылает Степану Осиповичу в Кронштадт (для зачитания

после лекции адмирала Макарова) телеграмму, в которой с предельной сжатостью и ясностью излагается учение о непотопляемости. С тех пор прошло более 50 лет, а принципы, сформулированные А. Н. Крыловым, остались незабываемыми и ныне.

В телеграмме говорилось, что:

1. Непотопляемость обеспечивается запасом плавучести корабля.
2. Подразделение корабля на отсеки должно быть таким, чтобы плавучесть утрачивалась ранее остойчивости — короче, чтобы корабль тонул, не опрокидываясь.

3. Восстановление боеспособности поврежденного корабля необходимо осуществлять путем затопления соответствующим образом подобранных неповрежденных отделений. Лишь такое выравнивание дает возможность использовать весь запас плавучести, так как водоотливная система бессильна в борьбе с пробоннами.

В конце телеграммы А. Н. Крылов писал: «До сих пор при составлении проектов боевых судов производились по большей части те же расчеты остойчивости, которые имели значение для судов парусных, а при суждении о столь важном качестве, как живучесть или непотопляемость корабля, довольствовались не расчетами точными и определенными, а одними соображениями, попросту говоря, разговорами... Все это потому, что расчетам не доверяют, основных принципов для них не устанавливают, а тогда нет и оценки требований от боевого корабля» (Архив АН СССР, фонд 759).

В марте 1903 г. Алексей Николаевич выступает в Кронштадтском морском собрании с развернутым изложением своих взглядов в области непотопляемости кораблей. Лекцию на тему «Плавучесть и остойчивость корабля, имеющего пробоины» он начал следующими словами: «В библии, в книге Бытия приведена обстоятельная спецификация Ноева ковчега. Здесь сказано: построй себе ковчег из дерева гоффер и нимотриклин, отделения сделай в ковчеге. Три жилья сделай в ковчеге, — иижнее, среднее и верхнее жилье и осмоли его изнутри и снаружи... Ковчег строился по непосредственным указаниям промысла божия, следовательно, в нем было все „добро зело“, т. е. переборки были распределены правльно, ни палубы, ни переборки не текли, люки были прорезаны где надо и крепости ковчега не ослабляли. С тех пор прошло, по библейскому исчислению, 7410 лет, построено бесчисленное множество судов, но уже разумом человеческим. Поэтому на всех из них было и есть множество недостатков, нарушающих обеспечение основного качества корабля — его непотопляемости. Я и постараюсь изложить эти недостатки и меры к их устранению». (Архив АН СССР, фонд 759).

В сентябре 1903 г., будучи в Порт-Артуре, А. Н. Крылов передал в штаб командующего Тихоокеанским флотом несколько экземпляров таблиц непотопляемости, составленных им для броненосца «Петропавловск». Моряки портартурской эскадры по заслугам оценили этот вклад Алексея Николаевича и на ряде кораблей своими силами составили аналогичные таблицы и приняли рекомендованные А. Н. Крыловым меры для обеспечения спрямления кораблей при повреждениях.

В частности, такие мероприятия были проведены на броненосце «Орел» корабельным инженером Владимиром Полуектовичем Костенко совместно с трюмным инженер-механиком Н. И. Румсом; в боевых действиях броненосца в 1904 г. эти меры полностью оправдали себя. Точно так же на торпедированном в бою броненосце «Цесаревич» трюмный инженер-механик Федоров, используя таблицы непотопляемости, затопил бортовые отсеки, противоположные поврежденным, и этим предупредил неминуемую гибель корабля.

Вернемся, однако, к поведению Морского технического комитета и его отношению к предложениям А. Н. Крылова.

Более года отмалчивался главный инспектор кораблестроения. После неоднократных рапортов и настоятельных требований Алексея Николаевича, вместо принятия поддержанного всем флотом предложения, Кутейников 28 февраля 1904 г. составил отзыв, в котором обвинял А. Н. Крылова в ошибках, якобы допущенных им при расчете таблиц непотопляемости «Петропавловска» вследствие неточности метацентрической формулы остойчивости и принятого им принципа наложения результатов затопления.

Ответ А. Н. Крылова сохранил свою остроту и поучительность по настоящее время: «Очевидно, — писал он, — что расчеты не точны. Но слова не точны не равносильны словам непригодны для дела... Во многих случаях точные формулы по их сложности неприменимы для вычислений, а излишняя точность лишь усложняет вычисления и вредит делу.

«Первое правило всяких вычислений состоит в том, чтобы точность результатов, ими доставляемых, соответствовала той практической потребности, для которой вычисления производятся» (Архив АН СССР, фонд 759).

Объяснения по отзыву Кутейникова Алексей Николаевич давал председателю Морского технического комитета 31 марта 1904 г., т. е. в тот именно день, когда от японской мины, вызвавшей взрыв погребов боезапаса, погиб «Петропавловск», а с ним и командующий флотом вице-адмирал Степан Осипович Макаров. Детальные обстоятельства гибели броненосца не были еще известны комитету и 7 апреля 1904 г., когда Алексей Николаевич выступил на расширенном заседании (с участием командиров и старших офицеров кораблей) с подробным докладом о таблицах непотопляемости и предлагаемых им мерах обеспечения живучести кораблей.

«„Петропавловск“ погиб от взрыва, не только потонув, но и опрокинувшись, — докладывал А. Н. Крылов. — Остались „Полтава“, „Севастополь“, „Рюрик“... несущие в себе, подобно „Петропавловску“, в виде диаметральной переборки без дверей или с малой дверью при крупном подразделении надводной части, залог своей гибели.

«Надо ли ждать заключения главного инспектора кораблестроения, или надо немедленно рубить ненужные переборки? Надо ли ждать возвращения флота с войны, или теперь же приступить к увеличению боевой жизнеспособности судов применением предлагавшихся мною мер?

«Продолжать ли обсуждение о моих таблицах, или приступить к их составлению и снабжать ими уходящие суда? При будущем кораблестроении оставить ли попрежнему живучесть на последнем плаве, или поставить на первый и установить, как общее правило, выражаемый мною принцип? Вот те вопросы, которые вам надо решить и, как мне кажется, решить сегодня же».

Свой доклад Алексей Николаевич, как отмечается в протоколе совещания, прочел «в приподнятом тоне и с резким подчеркиванием» и закончил следующим обращением к присутствовавшим: «Я решил бороться по мере своих сил, ибо считаю непотопляемость корабля первейшим его качеством и верю, что в этой борьбе с рутинной вы, господа адмиралы, господа командиры, господа офицеры, поддержите меня вашей властью, вашим авторитетом, вашим словом» (Архив АН СССР, фонд 759).

Реакция начальства на доклад Алексея Николаевича была незамедлительной: приказом управляющего морским министерством, на основании статей 1-й и 63-й книги 17-й Свода морских постановлений, «Заведывающему Опытным судостроительным бассейном подполковнику по адмиралтейству Крылову, в служебном докладе употребившему по отношению главного инспектора кораблестроения генерал-лейтенанта Кутейникова выражения и тон, противные дисциплине и правилам воинского чинопочитания», был объявлен выговор (Архив АН СССР, фонд 759).

Прошло еще четыре года упорной борьбы с наследием великого князя Алексея Александровича, возглавлявшего морское министерство по 1904 г., и идеи А. Н. Крылова полностью восторжествовали. 1 января 1908 г. А. Н. Крылов был назначен главным инспектором кораблестроения, а затем, в сентябре того же года — председателем Морского технического комитета.

На этой должности генерал-майор Крылов повел жестокую борьбу с канцелярской волокитой, беспощадно увольняя упрямых сторонников рутины и застоя и всячески поощрял тех, кто не боялся полета смелой творческой мысли. Он стал вводить на флоте ряд крупных технических новшеств, и поныне обеспечивающих боеспособность и живучесть наших кораблей.

«Ваш превосходный „Марат“ с честью несет социалистическую вахту в течение 18 лет». «Этим приветствием товарища Ворошилова линейному кораблю „Марат“, — писал впоследствии Алексей Николаевич, — этими словами я имею основание гордиться и считать, что данное мною в 1908 г. обещание (построить корабли, которые возможно дольше останутся боеспособными и мощными, — И. Х.) исполнено» (А. Н. Крылов. Мои воспоминания. Изд. АН СССР, 1945). В 1926 г. таблицы непотопляемости А. Н. Крылова были приняты повсеместно на кораблях английского, а затем и немецкого флота. Вместе с тем получили мировое признание заслуги отечественной кораблестроительной науки, создавшей в трудах С. О. Макарова, А. Н. Крылова и И. Г. Бубнова современное учение о непотопляемости кораблей.

Последующее развитие этого практически важного раздела теории корабля обязано работам самого Алексея Николаевича, написанным в наиболее плодотвор-

ный, советский, период его деятельности, и трудам его учеников, предложивших новые решения задач непотопляемости.

В частности, в комментируемой статье А. Н. Крылов предлагает весьма общий и строгий способ определения положения равновесия поврежденного корабля и оценки его остойчивости, упрощенный на основе метода последовательных приближений; при этом в работе даны все указания, необходимые для широкого практического использования этого способа.

Методы исследования непотопляемости, предложенные А. Н. Крыловым и И. Г. Бубновым, рассматривают явление только статически, не затрагивая вопроса о наибольших изменениях посадки, которые корабль получит прежде, чем примет равновесное положение, отвечающее повреждению. Вместе с тем, именно эти наибольшие динамические изменения посадки и остойчивости, зависящие от скорости затопления водой поврежденных отделений, могут оказаться губительными для корабля и, следовательно, знание их во многих случаях обязательно для правильного суждения о степени опасности повреждений.

Ю. А. Шиманскому принадлежит заслуга создания в 1930 г. оригинального и относительно простого метода исследования непотопляемости, разработанного им с учетом влияния времени затопления отсеков корабля на наибольшие изменения его посадки. Как и другие работы Ю. А. Шиманского, рассматриваемый труд был вызван необходимостью решения практических задач строительства военно-морского флота нашей Родины.

В 1936 г. в конструкторских бюро при непосредственном участии А. Н. Крылова были разработаны так называемые боевые таблицы непотопляемости, содержащие результаты предварительных расчетов по определению изменения посадки и остойчивости корабля при затоплении одной или нескольких групп отсеков. Там же предложены различные возможные варианты выравнивания поврежденного корабля и оценивается состояние равновесия после затопления рекомендованных таблицей отделений.

В 1940 г. профессор В. Г. Власов разработал оригинальный метод построения диаграммы статической остойчивости поврежденного корабля, получивший широкое распространение в практике работы конструкторских бюро.

Труды А. Н. Крылова и его школы в области теории непотопляемости находят самое широкое применение в судостроительной промышленности и военно-морском флоте, обеспечивая и поныне живучесть и боеспособность наших кораблей.

Изложенным не исчерпываются заслуги Алексея Николаевича в той отрасли корабельной науки, которая связана с решением так называемых статических задач теории корабля.

Наука о мореходных качествах корабля всегда представляла широкие возможности для разностороннего применения математики к решению практических задач, и после издания известных сочинений Бугера «Теория корабля» и Эйлера «Корабельная наука» она приобрела свои основные формы и содержание как научная

дисциплина. Однако ни в книге Бугера, ни в труде Эйлера инженер-кораблестроитель не находил того показа, который лучше всякого рассказа выясняет, каким образом нужно поступать в конкретных случаях; не находил он в них также ни взятых из практики примеров, ни расчетных схем, ни образцов численных решений многообразных практических задач.

Заслуга создания такого курса теории корабля, который служит руководством для корабельных инженеров в их практической деятельности, принадлежит А. Н. Крылову. Основой этой замечательной книги является единство теории и практики, неразрывная связь науки о корабле с математикой как инструментом или орудием количественного исследования чисто технических вопросов. Руководящая идея курса — показать инженеру и технику, где ему надо искать нужный инструмент и как этим инструментом пользоваться.

Чтение курса теории корабля в Военно-морской академии Алексей Николаевич начал в конце 1892 г.; при оценке практических работ слушателей он сразу же подметил у них пагубную привычку производить вычисления с непомерным числом значащих цифр, из которых до 75% были неверными и для практических целей ненужными. Как и большинство корабельных инженеров того времени, слушатели выполняли основные расчеты по громоздким и сложным схемам, не отдавая себе отчета ни в том, какая точность им нужна, ни в том, какой точности они в действительности достигают.

«Этот первородный грех, — докладывал проф. П. Ф. Папкович, — всех основных кораблестроительных вычислений и исправил А. Н. Крылов в своих самых ранних работах по теории корабля, и сделал это так, что его вклад в теорию корабля можно, без всякого преувеличения, признать сделанным раз и навсегда. Его можно уподобить подведению прочного фундамента под все здание кораблестроительных вычислений» (Проф. П. Ф. Папкович. Работы А. Н. Крылова в области основных кораблестроительных дисциплин. Труды по прочности корабля. Судпромгиз, Л., 1956).

Уже в первом издании курса «Теории корабля» Алексей Николаевич предпосылает учению о плавучести и остойчивости краткое введение о приближенных формулах квадратур и точности вычислений, которое вследствие большой важности вопроса затем перерастает в классические «Лекции о приближенных вычислениях», выдержавшие несколько изданий. В этом единственном в мировой литературе курсе круг задач, относящихся к приближенным вычислениям, расширен и углублен настолько, что он стал настольной книгой для специалистов, работающих в различных областях техники и естествознания.

Какое значение А. Н. Крылов придавал выполнению правил приближенных вычислений и обучению нашей молодежи «умению вычислять», можно судить по его последнему публичному выступлению 1 октября 1945 г. в связи с началом нового учебного года в Высшем военно-морском инженерном ордена Ленина училище им. Ф. Э. Дзержинского. Напомнив курсантам выступление В. И. Ленина на Третьем съезде комсомола и повторив ленинский призыв — учиться, учиться и

учиться, — Алексей Николаевич сказал: «Училище даст вам знания, жизнь потребует от вас умения применить их на практике: умения пользоваться различными приборами и инструментами, умения направлять работу других, умения вычислять».

В этой необычайной аудитории во дворе училища перед строем курсантов была прочитана самая короткая лекция по приближенным вычислениям: «Помните, что каждая неверная цифра — это ошибка, всякая лишняя цифра — это пол-ошибки».

«Так, например, с теоретического чертежа вы снимаете ординату ватерлинии с точностью до четырех значущих цифр, скажем 12,37, а затем для определения момента инерции возвышаете ее в куб и выписываете все 12 цифр, то знайте, что уже четвертый из найденных вами знаков является неверным».

Без такого воспитания А. Н. Крылов полагал немыслимым сознательное выполнение расчетов по теории корабля, а вместе с тем и скорейшее обеспечение кораблям нашего флота высоких мореходных качеств, среди которых непотопляемость он считал за важнейшее.

За полувековой период своей педагогической деятельности в Военно-морской академии и в Военно-морском училище Алексей Николаевич воспитал несколько поколений инженеров-офицеров Военно-морского флота СССР, многие из которых стали академиками, адмиралами, профессорами и руководителями научно-исследовательских, учебных и производственных организаций. Как бы желая подчеркнуть, что вся многогранная его жизнь была полностью посвящена воспитанию молодых кадров флота, А. Н. Крылов принес последнее издание курса «Теории корабля», включающее учение о непотопляемости и таблицы непотопляемости броненосца «Петропавловск», в дар Высшему военно-морскому инженерному ордену Ленина училищу им. Ф. Э. Дзержинского. На этой книге, включенной в том IX «Собрания трудов академика А. Н. Крылова», и по сей день продолжают учиться ученики его многочисленных учеников.

ВОЗМУЩЕНИЯ ПОКАЗАНИЙ КОМПАСА, ПРОИСХОДЯЩИЕ ОТ КАЧКИ КОРАБЛЯ НА ВОЛНЕНИИ. О ТЕОРИИ ГИРОКОМПАСА АНШЮТЦА, ИЗЛОЖЕННОЙ ПРОФ. ГЕККЕЛЕРОМ

«Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении» впервые напечатано в «Известиях Академии Наук СССР» (Отд. матем. и естеств. наук, 1938, серия геогр. и геофиз., № 5—6, стр. 439—476) и включено в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1947, т. 2, ч. 2, стр. 153—194).

«О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером» впервые опубликовано в «Известиях Академии Наук СССР» (Отд. матем. и естеств. наук,

1940, серия геогр. и геофиз., № 4, стр. 429—474) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1943, т. 2, ч. 1, стр. 127—179).

Из многочисленных трудов А. Н. Крылова по компасному делу в настоящий сборник включены лишь две комментируемые статьи. За эти работы, а также за «Основания теории девиации компасов» (Изд. АН СССР, 1940) академик А. Н. Крылов был удостоен в 1941 г. Сталинской премии первой степени.

Значительный интерес к компасному делу Алексей Николаевич проявил еще в последние годы учебы в Морском корпусе. Здесь он за короткое время изучил специальную литературу по теории девиации компаса, включая выдающиеся работы своего учителя, крупнейшего специалиста компасной техники Ивана Петровича де Колонга.

Этот фанатик своего дела, о котором на флоте говорили: «Колонт считает, что корабли строятся для того, чтобы было на чем устанавливать компасы и уничтожать их девиацию», еще в 1884 г. распознал в Алексее Николаевиче будущего выдающегося ученого и оказал значительное влияние на развитие и углубление его интереса к теории компаса.

В сентябре 1884 г. А. Н. Крылов блестяще окончил Морское училище: экзаменационная комиссия присудила ему высшее отличие — повышение по списку на пять человек, ио и без этого Алексей Николаевич оказывается первым из выпускников.

По представлению де Колонга мичмана флота А. Н. Крылова зачисляют в Компасную часть Главного гидрографического управления, где и начинается его научная деятельность.

Когда в начале 1886 г. де Колонга пригласили войти в число членов Экспертной комиссии на Третьей электротехнической выставке по отделу морских приборов, Иван Петрович ответил следующим письмом: «...Высоко уважая труды Комиссии, покорнейше прошу Совет извинить меня, что, не будучи им уполномочен, позволяю себе рекомендовать офицера, обладающего глубокими сведениями в той же отрасли знания, какую Комиссия во мне нашла полезной для деятельности экспертизы. Считаю долгом прибавить, что этот офицер уже около 1½ лет сотрудничает мне и в области своей деятельности представил несколько капитальных трудов, которые в скором времени будут напечатаны. Этот офицер — мичман Алексей Николаевич Крылов. Местожительство его: Васильевский остров, 13 линия, в доме № 24, кв. 9».

Труды, которые так высоко оценил И. П. де Колонт, были первыми научными работами Алексея Николаевича. Это — статья «Вычисление делений горизонтальных и вертикальных сил для дефлектора компаса» (1885), брошюра «Le Dromoscopes», статьи в «Морском сборнике»: «Исследование приборов (буссоли и дромоскопа Фурнье), «О новом дромоскопе» и «О расположении стрелок в картушке компаса» (1886). В последней работе А. Н. Крылов дает полное и общее решение тех вопросов, которые до этого только приближению были рассмотрены в трудах английских специалистов Смита и Эвайса. Приемами математического анализа

Алексей Николаевич показал, как нужно располагать систему из двух пар стрелок картушки, чтобы уничтожить коэффициенты девиации высших порядков, происходящие от неоднородности магнитного поля в области картушки. На базе этой статьи А. Н. Крылова аналогичная задача, но для системы, состоящей из трех пар стрелок, была решена П. А. Домогоаровым в 1921 г.

В начале 1886 г. в связи с поручением Главного гидрографического управления дать заключение о новом приборе — дромоскопе, изобретенном адмиралом французского флота Фурнье, Алексей Николаевич после тщательного исследования прибора устанавливает, что дромоскоп Фурнье воспроизводит не точную, а приближенную формулу девиации, а его дефлектор дает значительные ошибки. В ближайшем номере «Морского сборника» (№ 10) мичман Крылов помещает описание собственного прибора, построенного на точных аналитических зависимостях и притом во много раз более простого, чем дромоскоп Фурнье.

В специальном докладе на имя морского министра Морской учений комитет писал по этому поводу: «... принимая во внимание громадное значение этого прибора как по его практической, так и теоретической точности в деле определения и уничтожения девиации, [Комитет] считает справедливым ходатайствовать о награждении мичмана Крылова 1000 рублей. Прибор ввести в употребление на судах военного флота» (Архив АН СССР, фонд 759).

Огромная по тому времени премия, выданная Алексею Николаевичу, с лихвой окупалась преимуществами его прибора: он стоил в семь раз дешевле французского.

С тех пор Алексеем Николаевичем было написано по теории компаса около 50 статей и докладов, из которых наиболее замечательными являются труды, удостоенные Советским правительством высшей награды.

В первой из комментируемых статей «Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении», А. Н. Крылов рассматривает только те колебания картушки, которые вызываются механическими, а не магнитными причинами; иначе говоря, в работе исследуется движение картушки как твердого тела, подвешенного за заданную точку, движение которой предопределено.

В результате строгого рассмотрения вопроса, учитывающего реакцию топки, вес грузика, моменты магнитных сил и сил инерции переносного движения грузика, а также сопротивление среды, в которой колеблется картушка, академик А. Н. Крылов получает совершенно общую систему дифференциальных уравнений колебательного движения картушки на качающемся корабле, причем правые части этих уравнений выражены через три произвольно заданные функции времени, определяющие движение острия шпильки.

Для устранения возможных неясностей при чтении формул (19)—(29) и связанного с ними текста следует учесть примечание редакции ч. 2 т. 2 «Собрания трудов академика А. Н. Крылова» (отв. редактор проф. Н. И. Идельсон): «В левой части первого уравнения (19) автором опущен член $\frac{r_1^2}{g} (h_1 - h) \varphi$ ». Этот

член входит и в левую часть первого уравнения (21). Поэтому общее решение системы (21) не будет иметь вида (29): однако нетрудно показать, что те дополнительные члены, которые войдут в общее решение исправленной системы (21), будут иметь, по сравнению с членами, данными в (29), тот порядок малости, которым А. Н. Крылов в этой работе пренебрегает (см., например, ф-лы 20). Поэтому все дальнейшие рассуждения сохраняют свою силу (Ред.).»

До Алексея Николаевича только Томсон обратил внимание на важность исследования колебаний картушки при качке корабля, однако общей теории он не дал и ограничился лишь простыми геометрическими соображениями при изучении частного случая боковой качки, из которых усмотрел синусоидальный характер возмущающей силы и вытекающую отсюда необходимость делать период свободных колебаний картушки в 3—4 раза больше периода возмущения.

Далее, после сравнительной оценки порядка отдельных членов уравнений движения картушки, А. Н. Крылов приводит их к виду линейных с постоянными коэффициентами и устанавливает недопустимость огульного уравновешения картушки вместо последовательного: механического и магнитного.

Следующий параграф комментируемой работы посвящен раздельному рассмотрению влияния орбитального движения центра тяжести корабля, рысканья, боковой и килевой качки на колебания картушки. Естественно, что в числе прочих выводов, как частный случай, получается формула Томсона.

В конце статьи исследуются колебания картушки в жидкости, существенное отличие которой от «сухой» картушки заключается не только в более сильном погашении размахов, но главным образом в значительном сужении диапазона изменения вертикальной слагающей реакции топки. Здесь, так же как в предшествующих частях работы, результаты исследования заканчиваются конкретными указаниями, относящимися к рациональному проектированию компаса: А. Н. Крылов предлагает оригинальную конструкцию сферической картушки с успокоительными систернами и температурным компенсатором.

Как бы желая оправдать необходимость столь фундаментального исследования, подобного которому нельзя найти в мировой литературе, А. Н. Крылов задает вопрос, «стоило ли для исследования такого ничтожества, как картушка компаса, исписать 50 печатных страниц формулами и уравнениями, не есть ли это упражнение в „стрельбе по воробьям из пушек“». Напомнив фундаментальные работы по теории земного магнетизма и компасному делу, выполненные Гауссом и Томсоном в течение длительного периода времени, а также громадный по объему вычислений труд, затраченный на составление магнитных карт всех морей и океанов, и напомнив, что конечная цель всех этих работ — достигнуть правильности показаний компаса, Алексей Николаевич убедительно показывает значение своей работы, обеспечивающей нормальную эксплуатацию компаса в наиболее частых условиях качки корабля.

История возникновения второй из комментируемых работ, «О теории гирокомпаса Аишютца, изложенной проф. Геккелером», весьма характерна для дея-

тельности Алексея Николаевича. Консультируя на одном из наших заводов производство гироскопических компасов, А. Н. Крылов усмотрел ряд принципиальных ошибок в теории компаса Аишютца, изложенной проф. Геккелером. До этого статья Геккелера, помещенная в «Ingenieur Archive» за 1933 г., считалась основным теоретическим руководством по указанному вопросу и рекомендовалась для изучения студентам тех высших учебных заведений, где читалась теория гироскопических компасов.

В 1939 г. проф. Б. И. Кудревич предложил редколлегии «Известий Военно-морской Академии» статью, содержащую краткое изложение и некоторое развитие работы Геккелера.

Статья была передана А. Н. Крылову на рецензию. Ровно через шесть недель, вместо рецензии, Алексей Николаевич представил в редколлегию «Известий» работу на 50 страницах, в которой теория гирокомпаса была подвергнута полностью коренной переработке.

В первой главе работы А. Н. Крылова устанавливаются самые общие формулы, позволяющие исследовать влияние любого маневрирования корабля на колебания гирокомпаса.

Там же показано, как простейшим испытанием компаса на неподвижном фундаменте можно определить все параметры гиросферы. Имея в виду преимущества, которые доставляет символический способ интегрирования системы неоднородных линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, Алексей Николаевич, во избежание громоздких выкладок, пользуется для рассмотрения вынужденных колебаний гиросферы и для изучения погрешности гирокомпаса при маневрировании корабля именно этим методом, дополняя его так называемым приемом «множителей» с целью отыскания неопределенных постоянных интегрирования.

Известно, что гирокомпасу, установленному на движущемся корабле, присущи две погрешности: курсовая и баллистическая девиация; первая зависит от скорости хода, курса корабля и широты места и происходит вследствие кривизны земной поверхности, имея характер полукруговой девиации магнитного компаса; баллистическая погрешность происходит от изменения курса или скорости хода корабля. Общему исследованию обеих девиаций, в особенности на быстроходных кораблях, и посвящена вторая глава комментируемой работы.

Алексей Николаевич показывает, что условие взаимной компенсации курсовой и баллистической погрешностей, представляющее собой «одну из немногих формул теоретической механики, применение которой к практике охранялось патентом, выданным на имя Аишютца и М. Шуллера», ограничено в своем использовании рядом существенных предположений, оставшихся невыясненными ни в основном патенте, ни в статье Геккелера.

В связи с этим А. Н. Крылов предпринимает исследование указанного вопроса, используя полное, а не приближенное выражение курсовой девиации, а также в предположении, что успокоитель на циркуляции остался включенным

(т. е. фактор перетекания отличен от нуля). Результатом такого исследования является вывод, практическое значение которого трудно переоценить: на установившейся циркуляции корабля баллистическая погрешность, компенсируя лишь главный член курсовой девиации, оставляет в высоких широтах существенную погрешность.

Например, в компасах марки «Курс», в отличие от компасов «Полюс», не имеющих регулировки периода свободных колебаний соответственно широте места, остаточная девиация, пропорциональная скорости хода, может достигать исключительно больших значений (порядка $4-5^\circ$ при ходе в 30 узлов и широте места наблюдения в $70-80^\circ$).

В заключении второй из комментируемых статей А. Н. Крылов вскрывает, какое влияние может оказать неполная компенсация курсовой и баллистической девиации на последующие колебания гиросферы. При этом обнаруживается до того неизвестное явление «наследственности», отсутствие учета которого может привести к совершенно ложным выводам. Поддержание свободных колебаний гиросферы вынужденными, возникающими при нормальном маневрировании, дает возможность «раскачать» гироскопас до углов, во много раз превышающих его обычные погрешности. Когда Алексей Николаевич обратил на это внимание Сперри (владельца фирмы, поставившей гироскопасы) и показал, как нужно располагать последовательные галсы корабля, чтобы увеличить погрешности компаса за пределы, гарантированные фирмой, то Сперри ответил: «Я буду просить, чтобы Вас не назначили в комиссию по испытанию гироскопасов».

Таким образом, погрешности, которые иногда обнаруживались при испытании гироскопасов и которые представлялись противоречащими патентным построениям Геккелера—Аишютца, в действительности являлись блестящим подтверждением подлинной теории, созданной А. Н. Крыловым.

Если учесть, что перу Алексея Николаевича принадлежат два классических курса: «Основания теории девиации компаса» (составлен в 1940 г. по предложению Института теоретической геофизики Академии Наук СССР) и «Общая теория гироскопов и некоторых их технических применений» (значение последней работы выходит далеко за пределы гироскопасного дела), то станет ясным, что А. Н. Крылов является одним из выдающихся основоположников рассмотренной области знаний, столь важной для мореплавания и авиации.

Когда перед отечественной промышленностью была поставлена задача освоения нового тогда для нас производства гироскопасов, Алексей Николаевич своими ценными указаниями и постоянными советами помог в кратчайшие сроки разработать и изготовить опытные образцы, аperiodического прецессионного гироскопаса и малогабаритного гироскопического компаса.

И в этой области знаний инженерная деятельность Алексея Николаевича была неотделима от его научной работы, объектами которой постоянно являлись насущные запросы практической жизни флота.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫМ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЧАСТОТЫ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Впервые напечатано в «Известиях Академии Наук СССР» (Отд. матем. и естеств. наук, 1931, № 4) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1937, т. 5, стр. 93—138).

Статья является одной из выдающихся работ, представляющих математическое направление деятельности Алексея Николаевича Крылова.

Исследуются ли упругие колебания валов поршневых двигателей, изучаются ли неустановившиеся электрические колебания в сложной цепи при размыкании и замыкании тока, рассматриваются ли колебания упругих систем строительной механики корабля, — всюду, где приходится считаться с явлением резонанса, для расчета периода свободных колебаний системы необходимо иметь дело с вековым уравнением. Последнее называется так потому, что в астрономии оно служит для изучения «вековых» неравенств в движении планет, периоды которых исчисляются десятками и сотнями тысяч лет.

Известно, что главное неудобство векового уравнения в том виде, в каком им, однако, пользовались столь выдающиеся ученые, как Лагранж, Якоби, Лаплас, заключается в следующем: члены типа $a_{ij} - \lambda^2$ (a_{ij} — известные числа, λ — искомая частота колебаний) располагаются по диагонали соответствующего определителя, равенство которого нулю и представляет собой вековое уравнение.

А. Н. Крылов показал простой и естественный способ составления этого уравнения с помощью такого детерминанта, в котором все двучлены указанного выше вида, когда сопротивление отсутствует, и все трехчлены типа $a_{ij} + h_{ij}\lambda - \lambda^2$, когда сопротивление учитывается, располагаются только в одном первом столбце этого определителя, все же остальные члены матрицы — постоянные известные числа. Способ Крылова основан на преобразованиях, аналогичных тем, при помощи которых система дифференциальных уравнений, породившая вековое, приводится к одному уравнению высшего порядка.

Упрощение, предложенное А. Н. Крыловым, оказывается настолько существенным, что в адрес великих математиков, столь настойчиво развивавших сложные и неудобные приемы составления векового уравнения, по заслугам могут быть направлены цитированные Алексеем Николаевичем слова, взятые из похвальной речи Лагранжу: «Для решения простых вопросов следует пользоваться и простыми средствами, иначе можно уподобиться сказочному герою, который, чтобы избавиться от блохи, требовал перуны Юпитера и палцы Геркулеса».

В заключение § 8 комментируемой статьи Алексей Николаевич указывает, что предложенная им новая форма векового уравнения может быть принципиально получена из прежней чисто алгебраическими преобразованиями. В связи с этим в нашей печати появился ряд работ, посвященных указанному вопросу: акад.

Н. Н. Лузин и И. Н. Хладковский и Ф. Р. Гаитмахер дали алгебраический анализ метода А. Н. Крылова, а А. Данилевский предложил алгебраический способ развертывания векового уравнения к виду, предложенному Алексеем Николаевичем.

Истоки математического творчества А. Н. Крылова восходят к знаменитой Петербургской математической школе, основателем которой был великий русский математик П. А. Чебышев, создавший многообразные направления в математической науке, начиная от теории чисел и кончая теорией механизмов. Ярким представителем этой школы и непосредственным учителем Алексея Николаевича был А. Н. Коркин.

Когда, на заре научной деятельности А. Н. Крылова, А. Н. Коркин предложил ему заняться теорией чисел и, в частности, одной из ее проблем: «как установить, является ли заданное, например, 37-значное число простым, либо сложным», — Алексей Николаевич ответил своему учителю приблизительно такими словами: «Для практических целей мне достаточно знать первые 4 цифры этого числа, остальные я заменяю нулями, а тогда, если оно и было простым, то теперь станет делиться и не только на самое себя, но и на двойку, пятерку, десятку и т. д. Таким образом, не останется и никакой проблемы» (устное сообщение акад. В. И. Смирнова).

В этом ответе, характерном для Алексея Николаевича, отражается практическая направленность всех его работ, в том числе и математических. Уже в самом начале научно-практической деятельности он со всей силой своего дарования и мастерства прокладывал новые пути от Петербургской математической школы к прикладным задачам разнообразных областей технического знания.

Характеризуя большой цикл своих работ, включающий курс «Теории корабля», «Лекции о приближенных вычислениях», курс «Вибраций судов», труд «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики», работы по баллистике, астрономии, общей теории гироскопии, а также переводы «Начал» Ньютона и «Теории Луны» Эйлера, А. Н. Крылов писал в послесловии к книге «Качка корабля», изданной Военно-морской академией в 1938 г.: «Цель этого цикла состоит в том, чтобы на примерах, взятых из действительной практики, показать приложения математики к решению вопросов из области морского дела и техники вообще».

На вопрос, какова его основная специальность, А. Н. Крылов обыкновенно отвечал: «Кораблестроение», и тут же он поправлялся: «Лучше сказать: приложение математики к различным вопросам морского дела». Лишь в одной из анкет, заполненных по предложению Академии Наук СССР, А. Н. Крылов дал необычный, но весьма характерный ответ: «Основная специальность — теория колебаний в инженерном деле». В этой предельно сжатой формулировке главного направления научной деятельности Алексея Николаевича содержится справедливое признание того, что в основе большинства математических работ Крылова лежала разработка теории колебаний в «морском деле и технике вообще».

Можно отметить в известной мере и единство математического метода решения этих задач: его базисом является применение метода Фурье, обобщенного А. Н. Крыловым на случай вынужденных колебаний. Впервые этот метод был разработан Алексеем Николаевичем в его знаменитом мемуаре «О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней», напечатанном в 1905 г. в «*Mathematische Annalen*» и публикуемом в настоящем сборнике на русском языке. Тот же метод применяется А. Н. Крыловым в созданной им теории регистрирующих приборов (см. статью «Некоторые замечания о крещерах и индикаторах», стр. 315), при исследовании радиальных колебаний полого цилиндра и в других работах.

Еще в мемуаре 1905 г. Алексей Николаевич указал на то обстоятельство, что при разложении вынуждающей силы, т. е. неоднородного члена дифференциального уравнения, по фундаментальным функциям собственных колебаний стержня может случиться так, что не будут удовлетворены предельные условия собственных колебаний: такой факт явится следствием произвольности вынуждающей силы и отсутствия прямой связи ее с характером собственных колебаний стержня. В этом случае соответствующие ряды, в которые разлагается правая часть дифференциального уравнения, могут плохо сходиться, в особенности вблизи концов основного промежутка.

Так возникла задача улучшения сходимости рядов Фурье и им подобных и чрезвычайно остроумный и оригинальный способ ее решения, широко известный как «метод академика А. Н. Крылова» и вошедший во все новые учебники и учебные пособия по высшей математике. Впервые он был доложен на заседании Московского математического общества в 1913 г. и опубликован в виде главы VI в труде А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах».

Существо этого метода становится ясным из простого примера: рассмотрим функцию $y = x$, настолько элементарную, что вряд ли кому-либо вздумается табулировать ее. Вместе с тем, если эту функцию разложить в гармонический ряд, то, вследствие полного отсутствия какого-либо родства ее с типичными синусоидальными членами указанного ряда, сходимость его будет исключительно плохой и понадобится брать весьма много членов ряда Фурье, чтобы воспроизвести указанную функцию с обычно требуемой точностью.

А. Н. Крылов и предложил выделять из суммы ряда Фурье, или ему подобного, такие элементарные функции, чтобы уничтожались те части коэффициентов ряда, которые до этого медленно убывали с возрастанием номера члена.

Рекомендуемый метод оказывается настолько сильным, что в ряде случаев его применение приводит непосредственно к отысканию суммы ряда в конечном виде.

По поводу своего предложения сам Алексей Николаевич писал: «Этого приема я не встречал ни в руководствах, ни в литературе, хотя по его простоте и очевидности я не смею утверждать, что он нов». Как и все гениальное, метод Крылова по усилению быстроты сходимости и суммирования рядов Фурье и им

подобных действительно прост и настолько удобен в применении, что его практическое использование можно найти в самых разнообразных математических и технических работах.

Перу А. Н. Крылова принадлежат два фундаментальных труда, возникших в непосредственной связи с его педагогической деятельностью и на которых училось несколько поколений математиков, физиков и инженеров.

Алексей Николаевич с 1900 по 1908 г. читал в Морской академии курс дифференциального и интегрального исчисления, а в 1912 г. прочел курс лекций по дифференциальным уравнениям математической физики, изданный в 1913 г., а затем переизданный и дополненный в 1932 и 1933 гг. По поводу этой книги акад. С. А. Чаплыгин писал: «Я не знаю руководства, лучше освещающего разнообразнейшие приемы интегрирования уравнений, практически применяемые в этой основной задаче; изложение в высшей степени простое, ясное и полное, с указанием подробного хода вычислений иллюстрировано самыми разнообразными примерами, как заимствованными из работ других ученых, так и взятыми из статей самого Крылова. . . Особое внимание обращает на себя глава VI (последнего издания книги), трактующая о ряде Фурье.

«Здесь автор дал оригинальный прием усиления быстроты сходимости указанных рядов, позволяющий в чрезвычайной степени сократить вычисления при подсчете числового значения выражаемых рядами функций; сверх того, тот же прием дает способ находить производные от функции, выраженной таким тригонометрическим рядом, почтенное дифференцирование которого невозможно» (А. Н. Крылов. Мои воспоминания. 1945, стр. 540).

В комментариях к статье «Определение положения равновесия корабля, имеющего пробойну», посвященным работам А. Н. Крылова в области теории корабля, уже освещалась история возникновения другого фундаментального труда — «Лекций о приближенных вычислениях», выдержавшего пять изданий. В последний раз этот курс читался Алексеем Николаевичем студентам Петроградского университета в 1920 г. Академик В. А. Фок, который был тогда в числе слушателей указанного курса, писал, что он «живо помнит то впечатление, которое произвела на него личность Алексея Николаевича, и тот интерес, который А. Н. сумел сообщить этому, казалось бы, скучному предмету» (Труды Военно-морск. акад. кораблестр. и вооруж. им. А. Н. Крылова, 1953, вып. 6).

Достаточно ограничиться перечислением важнейших разделов «Лекций»: методы и приемы приближенных вычислений, определение корней численных уравнений, приближенное вычисление определенных интегралов, пользование тригонометрическими рядами, приближенное интегрирование дифференциальных уравнений и способ наименьших квадратов, — чтобы уяснить, какое значение имеет эта книга для каждого инженера и научного работника.

По этому поводу в статье «Научное творчество Алексея Николаевича Крылова» (в кн.: С. Я. Штрайх. Алексей Николаевич Крылов — его жизнь и деятельность. 1950), использованной при составлении настоящих комментариев.

акад. В. И. Смирнов писал: «Многие из работающих ныне математиков, физиков и техников изучали этот единственный в своем роде в мировой литературе курс, в котором наряду с исключительно ясным и теоретически полным изложением вопросов все доводится до конца в отношении практического проведения вычислений с подробным указанием всех выкладок». Как и другие оригинальные курсы, прочитанные Алексеем Николаевичем, начиная с 1890 г., в Морской академии, Морском училище, Университете, Институте инженеров путей сообщения, Ленинградском кораблестроительном институте и других учебных заведениях, «Лекции о приближенных вычислениях» и труд «О некоторых дифференциальных уравнениях» отличаются отсутствием всего лишнего, не находящего применения в практической деятельности инженера-исследователя, и строго логичным, целеустремленным и, можно сказать, естественным развитием излагаемых вопросов.

А. Н. Крылов горячо любил математику как могущественное средство познания количественных закономерностей окружающего нас мира. Вместе с тем общеизвестны его неоднократные критические замечания по вопросу чрезмерной математической строгости установления таких истин, которые практику кажутся до доказательства более ясными, чем после него; весьма неодобрительно отзывался Алексей Николаевич по поводу теорем о существовании, в результате которых после нескольких часов упорного труда техник убеждается в том, что, скажем, искомый интеграл существует, но не знает, как его найти.

По этому вопросу в предисловии к работе «Учение о пределах, как оно изложено у Ньютона» А. Н. Крылов в 1916 г. писал: «В последние 40 или 30 лет большая часть первоначальных положений и определений основных математических понятий подверглась обстоятельнейшей критике, приведшей, с одной стороны, к уточнению этих понятий и полной логической строгости выводов, но зато, с другой стороны, это уточнение и строгость повели к растянутости многих рассуждений и к утрате, так сказать, наглядной самоочевидности выводов... В технической школе такая постановка преподавания противоречит самому духу школы, всей дальнейшей деятельности ее питомцев, самому ее назначению, — прежде всего вырабатывать сметку, глазомер, решимость, веру в чертеж и в свидетельства чувств, а не ту как бы умственную трусость, которая заставляет изыскивать доказательства таких истин, которые технику кажутся до доказательства яснее, нежели после такового.

«Такое направление преподавания вселяет технику полное отвращение, он переносит его на самый предмет, т. е. на математику и, приходит к заключению, что она не только не составляет могучего орудия в его деле, а просто есть какое-то толчение воды в ступе, уточнения же строгость доказательств представляется ему „торжеством науки над здравым смыслом“, по насмешливому выражению моего приятеля, истинного техника, директора одного из величайших русских предприятий, на котором работает от 18 000 до 20 000 человек».

В другом своем докладе, прочитанном в 1936 г. перед собранием студентов и профессоров Ленинградского кораблестроительного института, а затем повторенном в Отделении технических наук АН СССР, Алексей Николаевич снова поучал, каково должно быть содержание курса математики и как следует поставить преподавание ее в высших технических учебных заведениях: «Как только будет установлено, что именно от инженера требуется по его специальности, так тотчас же устанавливается и соответствующий объем знаний из анализа и механики. Но здесь надо тщательно заботиться о том, чтобы не вводить лишних требований, — ведь оттого, что верхняя палуба покрывается деревянным настилом, нельзя требовать изучения ботаники, или оттого, что в кают-компани диван обит кожей, нельзя требовать изучения зоологии, так и здесь, если при рассмотрении какого-то частного вопроса встречается некоторая формула, то гораздо лучше привести ее без доказательства, а не вводить в курс целый отдел математики, чтобы дать полный вывод этой единичной формулы.

«Вместе с тем надо помнить, что руководство по математическому анализу или по теоретической механике не есть французский бульварный роман, который можно читать и от начала к концу и от конца к началу или от середины в обе стороны».

Более, чем полувековая педагогическая деятельность в различных учебных заведениях, а также многочисленные семинары по математике и механике, проведенные А. Н. Крыловым в заводских аудиториях и научно-исследовательских институтах, сконцентрировали в нем такой громадный опыт, который эквивалентен опыту нескольких поколений. Вот почему классические курсы, вышедшие из-под пера Алексея Николаевича, читались и читаются по сей день широко разнообразным кругом специалистов с увлечением, присущим читателям, получающим в относительно короткий срок необходимые им знания, изложенные с исчерпывающей полнотой и предельной ясностью.

Создание исключительно высокой вычислительной культуры в нашей стране также многим обязано трудам А. Н. Крылова. Алексей Николаевич служил этому делу и как лектор, читавший исторически первые курсы в данной отрасли знания, и как автор классических «Лекций по приближенным вычислениям», и как изобретатель, предложивший оригинальную конструкцию планиметра-топографа и прибор для механического решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и как ученый, разработавший оригинальные и простые методы численных расчетов, и, наконец, как администратор, устранивший от службы ряд лиц, систематически не выполнявших рациональные указания теории приближенных вычислений.

Характеризуя Алексея Николаевича в своей надолго запоминающейся статье «Академик А. Н. Крылов — знаток и любитель русской речи», акад. А. С. Орлов писал: «Читая и слушая Алексея Николаевича, чувствуешь, что он шествовал по своему жизненному пути, как бы наступая, ломая препятствия непреклонной волей, неустанным трудом, неистощимым вниманием, неизменной трезвостью ума.

«Во всех обращениях к молодежи, к своим ученикам, он выступал с твердым убеждением в устранимости вышереченными методами любого препятствия и этими методами вырастил научных деятелей той богатырской породы, которую в жизни наилучшим образом представлял он сам» (Вестник АН СССР, 1946, № 1, стр. 78).

Таким именно должны представить себе читатели комментируемой статьи образ А. Н. Крылова — одного из основоположников классического направления в точных науках, органически объединившего в единое целое математику с естествознанием и техникой и для которого не существовало отдельно математики и отдельно прикладных вопросов.

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КРЕШЕРАХ И ИНДИКАТОРАХ

«О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней» опубликовано под наименованием «Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben» в журнале «Mathematische Annalen» (1905, Bd. 61) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1937, т. 5, стр. 513—537). На русском языке печатается впервые в настоящем сборнике.

«Некоторые замечания о крешерах и индикаторах» впервые напечатано в «Известиях Академии Наук» (6 серия, 1909, т. 3, № 9, стр. 623—654) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1937, т. 4, стр. 373—412). Комментируемые мемуар и статья являются основоположными трудами, в которых впервые была разработана теоретическая база учения о колебаниях в инженерном деле и теория измерительных приборов, регистрирующих эти колебания.

Первая из комментируемых работ, писал Алексей Николаевич, возникла в процессе теоретического изучения весьма важной задачи исследования вибрации корабельных конструкций, причем во главу угла, как и в других трудах А. Н. Крылова, здесь ставилась не математическая сторона вопроса, а ее практическое применение.

Вместе с тем, метод, предложенный Алексеем Николаевичем, является весьма общим и применимым к аналогичным проблемам математической физики, приводящим к неоднородным дифференциальным уравнениям с двумя независимыми переменными при однородных начальных и граничных условиях. Решение ищется в виде суммы двух слагаемых, из которых первое определяет собственные колебания при заданных предельных условиях, а второе — вынужденные колебания при нулевых начальных условиях.

Известно, что свободные колебания в самом общем случае можно представить как сумму бесконечного ряда, типичный член которого определяется произведением двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной: x или времени t . Функции первого типа, зависящие от переменной x , называются часто фундаментальными функциями собственных колебаний или, как это принято английскими авторами, нормальными функциями, отвечающими граничным условиям.

Ортогональность этих функций позволила А. Н. Крылову при решении основной задачи — отыскания второго слагаемого, определяющего вынужденные колебания — предложить разложение вынуждающей силы, представленной неоднородным членом дифференциального уравнения, в ряд по фундаментальным функциям собственных колебаний; коэффициенты такого ряда зависят только от времени и определяются относительно простыми соотношениями, содержащими заданную вынуждающую силу.

Решение — вынужденные колебания — ищется по типу такого же разложения по фундаментальным функциям, причем для каждого из соответствующих коэффициентов получается простое обыкновенное дифференциальное уравнение от одной переменной (времени) с нулевыми начальными условиями.

При решении практических вопросов задача значительно упрощается вследствие приближенного характера задания вынуждающей силы, позволяющего в ее разложении по фундаментальным функциям собственных колебаний ограничиться таким числом членов ряда (от 2 до 6, реже до 10), при котором соответствующие отклонения не превышают практически допустимых границ точности задания функции.

Метод, разработанный в мемуаре 1905 г., нашел самое широкое применение во многих задачах математической физики и технических проблемах и в том числе в работах самого Алексея Николаевича: «О распространении тока по кабелю», «Радиальные колебания полого цилиндра» (гл. VIII труда «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики»), «О расчете балок, лежащих на упругом основании» (здесь основная идея комментируемой работы была применена к решению статической задачи механики), в замечательном курсе «Вибрации судов» и, наконец, во второй из комментируемых статей «Некоторые замечания о крешерах и индикаторах».

Еще в 1906 г. А. Н. Крылову, в бытность его заведующим Опытным бассейном, пришлось принять самое деятельное участие в разработке индикаторов, предназначенных для определения давлений, возникающих при минном взрыве. До этого во многих случаях показания приборов приводили к противоречивым результатам. Понадобилась общая теория подобных измерительных устройств, создание которой обязано Алексею Николаевичу.

Напомним, что крешером называется прибор, служащий для определения наибольшей величины действующего на него давления; металлический столбик такого прибора обжимается за пределами упругости. Наоборот, индикатор

опирается на вполне упругую пружину и служит для непрерывной записи давления.

В комментируемой статье А. Н. Крылов показывает сначала применительно к диаграмме миногого взрыва, что индикатор будет надежно выполнять свои функции лишь в том случае, если период свободных колебаний поршня, установленного на пружине, не превышает десятой доли учетверенной продолжительности нарастания давления. Затем для произвольного вида диаграммы устанавливается основная теорема о погрешности индикатора, согласно которой последняя не превосходит величины изменения давления за промежуток времени, равный полупериоду свободного колебания поршня на его пружине. Последний вывод ясно показывает, чем необходимо руководствоваться при проектировании индикатора и чем может объясняться несогласие в показаниях различных приборов, когда они применены для записи такого давления, нарастание которого совершается относительно быстро.

Случай, когда масса пружины сравнима с массой поршня или превышает ее, требует особого рассмотрения, и Алексей Николаевич снова применяет для его исследования разработанный им общий метод решения задач теории колебаний.

Заметим, что выполненное А. Н. Крыловым фундаментальное исследование весьма общей задачи, в котором приняты во внимание как инерция поршня, так и пружины, выходит далеко за пределы рассматриваемого вопроса: вследствие общности основных дифференциальных уравнений, изложенная теория относится целиком и без всяких изменений к струнному осциллографу, к задаче о распространении электрических колебаний и к аналогичным вопросам, в которых вынужденные колебания системы определяются уравнениями в частных производных, подобных уравнениям движения струны.

Выводы, полученные в статье «Некоторые замечания о крещерах и индикаторах», были успешно применены еще в 1914 г. при испытании компрессоров орудий главного калибра на линейном корабле. Индикаторы записали диаграммы, показавшие для максимального давления в цилиндрах величины, вдвое большие допустимой. Это влекло за собой перепроектирование и изготовление заново компрессоров, дополнительный расход в 2½ миллиона рублей и, что самое главное, в напряженной военной обстановке задерживало готовность большого артиллерийского корабля. Алексей Николаевич, которому было поручено расследование дела, на основе разработанной им теории показал, что индикаторы использованы неправильно, и вследствие этого они записали не то давление, которое имелось в действительности.

Сейчас каждый инженер, а часто и техник знает, что регистрирующие приборы могут надежно измерять требуемые величины только при выполнении определенных условий, связывающих периоды собственных колебаний соответствующих элементов приборов с продолжительностью и характером течения наблюдаемого процесса. Напомним, что впервые это важнейшее для измерительной техники обстоятельство было не только обнаружено, но и во всех деталях иссле-

довано А. Н. Крыловым, создавшим в комментируемой статье общую теорию подобных регистрирующих устройств.

К рассматриваемым работам примыкает статья Алексея Николаевича «О напряжениях, вызываемых в упругой системе динамической нагрузкой», в которой излагается общий метод решения различных задач подобного типа. Там же А. Н. Крылов показывает, как знаменитый математик Леви-Чивита в своей статье «О динамической нагрузке упругих систем», неправильно толкуя вполне верную формулу, пришел к совершенно неприемлемому заключению. Согласно выводу Леви-Чивита, при движении поезда весом в 1000 т по Конвейскому мосту со скоростью около 4 км/час динамическая нагрузка не должна превышать статическую более, чем в две тысячи раз. По расчетам А. Н. Крылова, динамическая нагрузка в этих условиях практически вовсе не превышает статическую.

Конвейский мост, построенный по обычным статическим нормам, простоял уже почти сто лет, пропустил безаварийно миллионы поездов большим и малым ходом, и так как единица менее двух тысяч, то «не опроверг» вывода Леви-Чивита; однако, какой толк технику и инженеру от подобных выводов, — ясно каждому.

По этому поводу Алексей Николаевич в своей статье писал: «Всякий инженер заметил бы практическую непригодность формулы и, обратившись к предпосылкам, сделанным при ее выводе, легко увидел бы их несоответствие действительности, а знаменитый математик, привыкший со всей „евклидовой строгостью“ перемалявать аксиомы и постулаты, не заметил грубости одного из своих допущений, сообразно которой и получил столь высокий верхний предел».

Труды А. Н. Крылова по исследованию влияния динамических нагрузок на корабельные конструкции явились крупнейшим вкладом в строительную механику корабля. В 1907 г. Алексеем Николаевичем был создан первый в мире курс «Вибрации судов», систематически и полно излагающий теорию колебаний систем с одной или несколькими степенями свободы и приложение ее к кораблестроению. До этого теории вынужденных колебаний корабельных конструкций не существовало.

Многочисленные задачи математической физики и разнообразных областей технического знания приводят к дифференциальным уравнениям или к их системам, не интегрируемым в конечном виде. В этом случае на помощь инженеру или физiku приходят способы приближенного аналитического либо численного интегрирования, из которых многие разработаны или предложены Алексеем Николаевичем. Так, ему принадлежит метод нахождения решения уравнений колебательного движения путем последовательных приближений. По поводу этого метода, широко примененного самим А. Н. Крыловым в курсе «Вибрации судов», Н. И. Идельсон писал: «Хотя Алексей Николаевич и называет этот способ „методом Ляпунова“, однако следует подчеркнуть, что никто до Алексея Николаевича не мог извлечь этих простых и практических приемов из трудных и абстрактных рассуждений Ляпунова в его знаменитой докторской диссертации „Общая задача устойчивости движения“».

На базе рассмотренных выше работ Алексея Николаевича акад. Ю. А. Шимаинский, чл.-корр. АН СССР П. Ф. Папкович и их ученики разработали современные методы расчета корабельной вибрации, теорию амортизации судовых приборов и устройств, методику проектирования подкреплений под орудийные установки, способы учета воздействия больших взрывов и другие вопросы, находящие успешное применение в советском кораблестроении.

О РАСЧЕТЕ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ. О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

«О расчете балок, лежащих на упругом основании» впервые издано отдельной брошюрой (Изд. АН СССР, 1930) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова (Изд. АН СССР, 1937, т. 5, стр. 227—362).

«О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе» впервые напечатано в «Известиях Академии Наук СССР» (Отд. матем. и естеств. наук, 1931, № 7, стр. 963—1012) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1937, т. 5, стр. 181—226).

Комментируемые работы представляют одно из наиболее значительных направлений многообразной научной деятельности Алексея Николаевича, приведшее к созданию новой отрасли науки — строительной механики корабля.

Переход от дерева, веками использовавшегося при постройке кораблей в качестве основного строительного материала, к железу и стали открыл перед кораблестроением во второй половине XIX в. новые исключительно широкие перспективы: стало реальным значительное увеличение водоизмещения и основных размеров кораблей, возникла возможность резкого уменьшения толщин основных связей и обшивки, начали создаваться более совершенные и экономичные корабельные конструкции.

Наметившийся коренной перелом в кораблестроении потребовал принципиально новых подходов к проектированию кораблей: наряду с созданием рациональных методов обеспечения их прочности потребовалась разработка проблем, связанных с приданием корабельным связям надлежащей жесткости и устойчивости.

Решение такого типа задач путем грубых, чисто эмпирических прикидок, подобно тому как это было принято при обеспечении прочности деревянных судов, представлялось уже невозможным. Назрела острая необходимость в создании, на базе теоретических исследований и тщательно поставленных опытов, новой научной дисциплины, разрешающей следующие основные проблемы кораблестроения: а) определение внешних сил, действующих на корабль в разнообразных условиях морской обстановки; б) создание метода вычисления напряжений и деформаций в различных связях корпуса; в) разработка норм прочности кораблей,

обоснованных опытом их повседневной и боевой службы и обеспечивающих надежность конструкций при наименьших возможных затратах материалов.

Создание указанной дисциплины обязано русской школе кораблестроителей, возглавленной А. Н. Крыловым и его ближайшим учеником и сотрудником Иваном Григорьевичем Бубновым. Одна из первых научных работ Алексея Николаевича относится именно к этой отрасли технического знания — строительной механике корабля.

В 1887 г. А. Н. Крылова временно командировали (для прохождения производственной практики) на Франко-русский завод, где тогда строился броненосец «Император Николай I». В связи с необходимостью коренного усовершенствования башни главного калибра (10 дюймов), перед Алексеем Николаевичем была поставлена задача ее расчета.

Эта работа опубликована в «Морском сборнике» (1888, № 5) под наименованием «Расчет башни броненосца „Император Николай I“».

Здесь А. Н. Крылов полностью разрешил вопрос о напряжениях в настиле башни двумя методами: элементарными приемами сопротивления материалов и на базе более общего и глубокого исследования, основанного на теории упругости. Заметим, что при решении каждой задачи Алексей Николаевич выступал как сторонник самых простых и глубоких, но одновременно и наиболее простых методов исследования, которые в его творениях всегда приводили к результатам большой практической значимости.

Фундамент новой науки — строительной механики корабля — заложен классическими работами А. Н. Крылова по килевой качке (см. статью «Общая теория качки корабля на волнении» и примечания к ней). До появления этих работ кораблестроители пользовались для оценки прочности корпуса только условным методом расчета внешних сил, действующих на корабль, путем статической постановки его на гребень и подошву волны, а затем элементарными и приближенными приемами определяли напряжения при общем изгибе корпуса корабля как балки.

По этому поводу Алексей Николаевич писал в своих докладах Английскому обществу корабельных инженеров в 1896 и 1898 гг.: «... Вопрос о килевой качке судов представляет для судостроителя такой же интерес, как боковые качания для моряка, потому что напряжения, которым подвергаются различные части корпуса судна, могут быть лишь тогда вычислены с достаточной степенью точности, когда килевая качка будет известна». И далее: «Исследование переносного движения и килевой качки корабля на море важно не только для суждения о мореходных его качествах, но главным образом для того, чтобы получить действительные положения, принимаемые кораблем на волнении, для расчета тех напряжений, которым корабль подвергается».

Эту важнейшую задачу строительной механики корабля А. Н. Крылов разрешил в статье «О напряжениях, возникающих в корпусе корабля при его движении на волне», разработав оригинальный способ вычисления изгибающих моментов и перерезывающих сил, действующих при ходе корабля на волнении, и

законченную методику определения напряжений, вызванных ими в корпусе корабля.

Выход в свет комментируемого труда А. Н. Крылова «О расчете балок, лежащих на упругом основании» в годы первой пятилетки был вызван стремлением его автора оснастить советских инженеров новыми мощными и прогрессивными методами расчета сооружений. В предисловии к этой книге Алексей Николаевич писал: «На применимость формул к численным вычислениям, без чего вопрос не может считаться решенным, я обращаю особенное внимание, ибо рассматриваемый вопрос в связи с нашим громадным и самым разнообразным строительством как раз теперь получил немаловажное практическое значение».

До опубликования комментируемой книги при расчете балок, нагруженных прерывными нагрузками или сосредоточенными силами, пользовались методом японского профессора Хаяси, при этом такая балка разбивалась на отдельные участки в соответствии с характером нагрузки. Это приводило к необходимости составления для каждой границы участков условий их сопряжений, представляющих в своей совокупности систему большого числа уравнений с таким же количеством неизвестных постоянных. Даже для простейших схем нагрузок метод Хаяси требовал сложных выкладок, делавших применение его весьма затруднительным.

В отличие от него, при любом характере нагрузки метод, предложенный Алексеем Николаевичем, требует отыскания только двух неопределенных постоянных, причем для этих целей используются граничные условия на концах балки. Такого замечательного эффекта, знаменательного по своей простоте и значительности упрощения вычислительной работы, А. Н. Крылов добился путем применения к решению рассматриваемой задачи идеи разложения по фундаментальным функциям собственных колебаний, предложенной им в известном меморандуме 1905 г. «О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней».

Развив точный метод решения для балок постоянного сечения, А. Н. Крылов обобщил его с известным приближением на случай балок переменного сечения, лежащих на упругом основании переменной жесткости: в кораблестроении этому отвечает расчет прочности корабля, поставленного в док на килевой дорожке.

Предложив разложение искомой функции по фундаментальным формам свободных колебаний, Алексей Николаевич тут же показал, что процесс последовательных суммирований может быть сходящимся лишь при небольшой жесткости основания. Таким образом, в частности, было выяснено, почему популярный до этого метод расчета давления корабля на килевую дорожку путем последовательных приближений часто давал расходящиеся решения. Не ограничившись таким анализом, А. Н. Крылов разработал способы существенного улучшения сходимости процесса последовательных приближений.

Наконец, в комментируемой работе Алексей Николаевич показал, что расчет сложного судового перекрытия с перекрестными связями может быть всегда сведен к расчету балок, лежащих на соответствующем упругом основании, и прило-

жил созданные им методы к расчету одной из главнейших судовых конструкций — днищевому перекрытию.

Труд А. Н. Крылова «О расчете балок, лежащих на упругом основании» приобрел сразу широкую известность и выдержал несколько изданий. Он указал науке о прочности стройный и простой путь решения одной из важнейших ее задач, именуемый теперь методом начальных параметров. Хотя в этой книге не рассматривался расчет неразрезных балок и рам, однако содержащиеся в ней идеи отчетливо указывали на возможность распространения этого метода на статически неопределимые балочно-рамные системы.

Метод начальных параметров нашел свое дальнейшее использование в трудах К. Н. Снитко, а затем в работах И. С. Подольского, Н. И. Безухова, М. Э. Бермана и других. В последние годы этот метод стал достоянием учебников по сопротивлению материалов (Н. М. Беляева, М. М. Филоенко-Бородича) и вошел в программы высших технических учебных заведений.

Вторая из комментируемых работ, «О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе», также относится к статическим проблемам строительной механики. Здесь А. Н. Крылов дает исключительно простое решение вопроса о том, что произойдет со стойкой, когда нагрузка превысит критическую, каковы будут «боковой прогиб» и «усадка» стойки, и рекомендует простейший способ вычерчивания всяких возможных равновесных форм, «ибо для техника чертеж гораздо нагляднее всяких формул выясняет существо дела». Таким образом, в указанной статье решается задача, исключающая возможность допущения о малости отклонений упругой линии от прямолинейной формы и требующая рассмотрения точных зависимостей, а не приближенных дифференциальных уравнений равновесия, как это делается, например, для определения критической силы.

Подобную задачу решал ряд иностранных ученых — Аппель, Лякур, Леви, Прескотт и другие, — однако полученные ими решения не приведены к удобному для вычисления виду и не позволяют пользоваться готовыми общепринятыми таблицами специальных функций. Решение А. Н. Крылова о формах равновесия стоек выполнено в эллиптических интегралах, для которых имеются широко известные теперь таблицы.

Чтобы по заслугам оценить вклад Алексея Николаевича в эту сложную область строительной механики, отметим, что расчет одной лишь точки упругой линии по формулам, предложенным различными авторами, требует во много раз больше вычислений, нежели по методу Крылова для целой серии равновесных форм, состоящей из восьми кривых по шести точек в каждой.

Как ни велико значение комментируемых работ А. Н. Крылова, они представляют только часть его творчества по строительной механике корабля. Непосредственное применение разработанных Алексеем Николаевичем методов обеспечения прочности корпусов и придания их связям жесткости и устойчивости можно видеть в пятитомных расчетах кораблей типа «Севастополь», выполненных под

руководством И. Г. Бубнова и при творческой помощи А. Н. Крылова, в расчетных материалах проектов других кораблей морского флота СССР, являющихся образцом отечественного решения проблем строительной механики, оставляющим далеко позади все, что сделано в этой области за пределами нашей Родины.

Одна из общепризнанных заслуг А. Н. Крылова заключается в том, что он дал мощный толчок всей русской школе кораблестроения, направив ее по пути широкого использования математического аппарата исследования и фундаментальных решений теории упругости, пропагандируя общие методы решения многих технических задач, которые до этого были достоянием одной лишь астрономии, и создавая в своих трудах новые строгие, и вместе с тем простые, пути решения разнообразных проблем корабельной науки.

Однако Алексей Николаевич не ограничился теоретическим исследованием вопросов и одновременно положил начало экспериментальному изучению напряжений в корпусе корабля на волнении: им был сконструирован простой и оригинальный индикатор напряжений, примененный для изучения и записи внутренних усилий в связях корпуса на «Аскольде» и «Океане» в 1902—1903 гг. К этому же времени относится исследование А. Н. Крылова по обобщению материалов испытаний ледокола «Ермак», проведенное по предложению адмирала С. О. Макарова и опубликованное в известной книге «„Ермак“ во льдах» (см.: Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, 1949, т. 9, ч. 2, стр. 165). Для этой цели, кроме результатов механических испытаний ледовых брусков, были обработаны натурные данные, представленные киноснимками, изображающими положение ледокола через каждую шестую долю секунды при проходе его через торос, и результатами наблюдений дифферента корабля, выполненных с помощью квадранта. Чтобы по изменениям угла дифферента судить о вертикальной составляющей усилий, действующих на носовую оконечность ледокола, в Опытном бассейне дополнительно были проведены испытания парафиновой модели корабля.

Обработка результатов опытов показала, в частности, что изгибающие моменты в корпусе ледокола в условиях давления на ледовый покров толщиной 0,8—1,0 м примерно в $1\frac{1}{2}$ раза превышают так называемые расчетные моменты на волнении.

На протяжении всей своей дальнейшей научно-инженерной деятельности А. Н. Крылов являлся не только инициатором многих экспериментальных исследований, но своими советами и богатейшим практическим опытом, переданным новым поколениям кораблестроителей, в значительной мере обеспечил успех их дела.

Характеризуя работы Алексея Николаевича по строительной механике корабля — от первого систематического курса «Вибрация судов» до «Расчета балок, лежащих на упругом основании» — чл.-корр. АН СССР П. Ф. Папкович в своем докладе, прочитанном 15 декабря 1945 г. на совместном заседании Академии Наук и представителей Военно-морского флота СССР, заключал: «Под влиянием этой

именно серии работ А. Н. Крылова последние 40 лет явились для строительной механики корабля у нас в Союзе чем-то вроде периода бурн и натиска».

Действительно, за последние годы акад. Ю. А. Шиманским был написан фундаментальный труд «Динамический расчет судовых конструкций», удостоенный Сталинской премии первой степенн. Ему же принадлежат основоположные работы по расчету корабельных надстроек и прерывистых связей корпуса.

Общезвестны капитальные курсы по теории упругости и строительной механике корабля, составленные П. Ф. Папковичем и получившие столь же высокую оценку Советского правительства.

Богатое наследие А. Н. Крылова и И. Г. Бубнова дальше развито в трудах их учеников и нашло успешное применение в отечественном кораблестроении. Подобных сочинений в области науки о прочности корабля не было и нет за границей. Труды советской школы А. Н. Крылова оставляют далеко позади все, что сделано за рубежом.

О ДИНАМИЧЕСКОМ УРАВНОВЕШИВАНИИ РОТОРОВ ГИРОСКОПОВ

Впервые опубликовано в журнале Центрального научно-исследовательского института машиностроения и металлообработки НИИМАШ, 1935, № 7, стр. 1—22; вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1937, т. 5, стр. 459—494).

Статья представляет собой содержание доклада, прочитанного А. Н. Крыловым на совместном заседании групп физики, математики и техники Академии Наук СССР 30 мая 1935 г.

Вопрос о динамическом уравновешении быстро вращающихся дисков имеет исключительное значение в различных областях техники. Всякий маховик, якорь динамомашин, ротор паровой турбины представляет собой объект для такого исследования.

Особенно остро обстоит дело с динамическим уравновешением роторов гироскопов, число оборотов которых доходит до 20 тысяч в минуту: при диаметре ротора порядка 12 см центробежное ускорение точки на ободу в таком случае в 25 тысяч раз превышает ускорение силы тяжести.

Вследствие широко принятой за границей патентной системы, теория динамической балансировки гироскопов, если и существовала, то была скрыта в недрах патентных свидетельств и связана с частностями отдельных предложенных различными авторами устройств.

В комментируемой статье А. Н. Крылов предлагает общую теорию вопроса и принципы проектирования специальных приспособлений (балансировочный станок, искровой прибор и т. п.), необходимых для осуществления требуемой балан-

сировки; так же подробно излагаются оригинальные и притом простые приемы проведения испытаний. В заключении статьи иллюстрируется возможность, достигаемая общей теорией А. Н. Крылова, для устройства разнообразных вибрационных приборов.

Отражая научно-практическую деятельность Алексея Николаевича в области механики, комментируемая статья, так же как и публикуемая в настоящем сборнике работа «О теории гироскопа Аншютца, изложенной проф. Геккелером», представляет серию трудов А. Н. Крылова в области гироскопии и ее практических применений.

В 1908 г. в докладе, прочитанном в Политехническом институте, Алексей Николаевич изложил созданную им теорию вынужденных колебаний корабля, снабженного гироскопическим успокоителем качки. Содержание доклада было опубликовано в «Морском сборнике» и почти одновременно во Франции.

До этого применительно к первой гироскопической установке, осуществленной Шликом в начале 1900-х годов, А. Фепплъ предложил формулу для определения кинетического момента гироскопа, обеспечивающего достаточно эффективное умерение только свободных колебаний корабля; наиболее важный и вместе с тем сложный вопрос — гашение вынужденных колебаний корабля — Фепплом даже не рассматривался.

А. Н. Крылов исследовал в своем докладе различные способы введения сопротивления в цапфы качающейся рамы гироскопа и, в частности, показал, что в отличие от гироскопов с сопротивлением, пропорциональным угловой скорости колебания рамы, установки, оборудованные тормозом с постоянным трением, имея незначительное преимущество в весе, не могут обеспечить плавность качаний корабля.

Кроме того, было доказано, что для эффективного умерения вынужденных колебаний корабля необходимо запроектировать кинетический момент гироскопа примерно вдвое большим, чем это следует из формулы Феппла.

В 1909 г. на яхте «Стрела» предполагалось установить гироскопический успокоитель качки. Общая теория, разработанная А. Н. Крыловым, показывала, что при соответствующих характеристиках успокоителя на правильном волнении с относительно большим склоном волюны боковая качка яхты может быть практически полностью уничтожена. Чиновники из морского ведомства отказали в выделении средств, необходимых для изготовления гироскопического успокоителя. По этому поводу Алексей Николаевич впоследствии писал: «Если бы Морское министерство не пожалело ассигновать тогда (т. е. в 1909 году) пятьдесят тысяч рублей на установку и испытание гироскопа-успокоителя на яхте „Стрела“, мы были бы в этом деле далеко впереди Сперри» (А. Н. Крылов. Мои воспоминания. 1945).

В 1931 г., совместно с проф. Ю. А. Крутковым, А. Н. Крылов прочел слушателям Военно-воздушной академии курс лекций по общей теории гироскопов. В 1932 г. был издан составленный на базе указанных лекций фундаментальный труд «Общая теория гироскопов и некоторых их технических применений».

До выхода в свет этой книги основными пособиями по гироскопии являлись: а) изумительная по своей исчерпывающей полноте и строгости диссертация А. Домогорова «О свободном гироскопе»; б) объемистое (960 стр. in 8°) сочинение «*Theorie des Kreisels*», принадлежавшее перу Ф. Клейна и А. Зоммерфельда; в) труд Д. Гринхила «*Report on gyroscopic theory*», г) курс А. Грея «*Gyrostatics and rotational motion*» и ряд других. Однако вся литература того времени отличалась общей особенностью: постановка, методы решения и изложение рассматриваемых вопросов были весьма поучительны для математиков, но инженер-конструктор не мог почерпнуть из этих книг того, что ему непосредственно нужно для расчета и проектирования гироскопического прибора, отвечающего наперед заданному назначению. Сложность примененного, например, Гринхилем математического аппарата и неприспособленность к числовым расчетам предложенных им формул делала подобные сочинения совершенно неподходящими для практических приложений. В предисловии к «Общей теории гироскопов» Алексей Николаевич писал: «Сочинение Гринхила потребовало бы годы для полного его изучения, мы же (т. е. А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, — И. Х.) имели в своем распоряжении по 30 часов».

В основной части рассматриваемого труда, написанной А. Н. Крыловым после введения, содержащего необходимые в дальнейшем сведения по механике и математике, приводится аналитическое изложение общей теории гироскопов и их практических применений в кораблестроении и авиации. Здесь рассматриваются свойства гироскопов, находящихся на неподвижном или движущемся по отношению к земле фундаменте, связанном, например, с кораблем либо самолетом, изучается использование гироскопов для получения меридиана, горизонта и вертикали и излагаются способы применения гироскопов для общей и местной стабилизации — корабля в целом, либо отдельной платформы на нем. В последней части книги описаны различные конструкции гироскопических приборов для регистрации качки корабля на волнении, для управления вертикальными рулями торпеды, автоматический замыкатель для стрельбы из орудий качающегося корабля, гиригоризонт и т. п., а также несколько установок для гиросtabilизации корабля.

Если учесть, что гироскоп является сердцем чувствительных элементов, управляющих действием широко различных силовых систем в кораблестроении, авиации, артиллерии и других отраслях техники, то станет ясным то исключительное значение, которое имели и сохраняют поныне труды Алексея Николаевича в рассматриваемой области знания: они послужили базой для широкого развития советской гироскопии и обеспечили создание и успешное развертывание отечественной гироскопической промышленности, в работах которой А. Н. Крылов принимал непосредственное участие, разрабатывая принципиальные схемы различных установок и систематически консультируя ведущих конструкторов по разнообразным вопросам этой сложной области технического знания.

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОДОЛГОВАТОГО СНАРЯДА

Впервые опубликовано в «Известиях Физико-математического института имени В. А. Стеклова» (1928, т. 3, стр. 1—38).

Названный доклад, прочитанный А. Н. Крыловым на заседании Отделения физико-математических наук Академии Наук СССР 9 мая 1928 г., представляет собой извлечение из капитального труда «О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета», изданного в 1929 г. Научно-техническим комитетом УВМС РККА (этот труд вошел в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова», Изд. АН СССР, 1937, т. 4, стр. 1—301) и являющегося настольной книгой при изучении внешней баллистики (в первую очередь устойчивости полета снаряда), а также при конструировании снарядов и нарезной части орудий.

В этом труде, как и в других капитальных работах Алексея Николаевича, изложению основного материала предпосылается введение, содержащее необходимые сведения по теоретической механике. Затем в гл. I излагается теория вращательного движения продолговатого снаряда на небольшом участке траектории, который с достаточным приближением можно полагать прямолинейным. Рассматривая здесь решение известного ученого-баллистика Н. В. Маневского, впервые еще в 1865 г. предложившего метод учета вращательного движения снаряда, А. Н. Крылов обнаруживает недостатки этого решения и показывает способ устранения их путем соответствующего преобразования исходных формул. Там же устанавливается, что выводы другого выдающегося ученого Н. А. Забудского, приведенные в «Руководстве по внешней баллистике» (1895), основаны на не вполне точных допущениях, устранение которых приводит к известным уравнениям Н. В. Маневского.

Первая глава труда «О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета» заключается рассмотрением условий устойчивости полета снаряда и определением соответствующей крутизны нарезов.

В гл. II изучается движение снаряда на криволинейной траектории. Сначала здесь показывается, что теория Н. В. Маневского для рассматриваемого общего случая движения ошибочно предполагает постоянство в полете угла нутации, под которым понимают угол, образованный касательной к траектории центра тяжести с осью снаряда. Кроме того, она построена без учета особенностей динамики полета.

В связи с этим А. Н. Крылов излагает строгий метод решения задачи, приводящий к точным уравнениям движения снаряда, которые допускают лишь численное интегрирование. Здесь же рекомендуются способы и схемы подобных расчетов.

В заключении труда (в гл. III) проводится сравнение опытных данных, полученных в 1919 г. при стрельбе по картонным щитам, с результатами расчетов по теории А. Н. Крылова: совпадение, можно сказать, практически полное.

В комментируемой статье читатель найдет краткое изложение теории Алексея Николаевича и основных доставляемых ею выводов.

А. Н. Крылов связал свою деятельность с запросами артиллерии рядом основоположных работ в этой области. Свой интерес к вопросам баллистики он объясняет следующими словами, которые можно прочесть в статье «О применении методы численного интегрирования уравнений к вычислению траектории снарядов», доложенной Алексеем Николаевичем в заседании Отделения физико-математических наук 22 сентября 1920 г.: «Из всех движений свободного тела, после тел небесных, движение артиллерийских снарядов обладает наибольшей мощностью. Может быть, это является одною из тех причин, которая привлекала к исследованию этого вопроса математиков, не бывших ни военными, ни артиллеристами. Помимо Эйлера, всеобъемлющий гений которого творил во всех областях, доступных приложениям математики, достаточно упомянуть Ивана Бернулли Лагранжа, Пуассона, Якоби и Остроградского, ограничиваясь наиболее знаменитыми именами из тех, кем даны общие способы исследования указанного явления».

Война 1914—1918 гг. поставила перед артиллеристами ряд новых задач, не допускавших аналитического решения в квадратурах. Потребовалось применение методов численного интегрирования, свободных от необходимости принятия ряда допущений, присущих старым аналитическим приемам.

В цитированной выше работе А. Н. Крылов приводит полный расчет траектории 12-дюймового артиллерийского снаряда, выполненный рекомендованным им методом, который до сего времени является основным в баллистических расчетах. В нашей литературе этот метод впервые изложен в статье Алексея Николаевича «О приближенном численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений», опубликованной в «Ежегоднике Союза морских инженеров» (1917, т. 2).

«Статья моя, — писал А. Н. Крылов, — вышла, может быть, несколько более обширной, нежели принято для наших сообщений, но мне приходилось замечать, что методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений мало знакомы инженерам вообще, и если указываются в курсах, то лишь метода Эйлера, реже метода Рунге, и едва ли какой-либо инженер станет искать нужную ему методу в статье под заглавием „Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, par Carl Störmer“, напечатанной в 1913 г. в „Videnskapsselskapets“ Skrifter Норвежской Академии наук».

Подобно тому, как это имело место с методом Адамса—Штермера, Алексей Николаевич благодаря своей исключительной прозорливости и богатейшей эрудиции усматривал в далеко не смежных областях знания приемы и методы исследования различных по своему физическому содержанию, но общих по математической постановке практических задач.

Прекрасный знаток астрономии, А. Н. Крылов перенес в технику и, в первую очередь, в кораблестроение и морское дело методы аналитического и

численного решения многих вопросов, в совершенстве развитые в этой «величайшей из точных наук».

В 1921 г. Алексей Николаевич написал работы «О расчете прогрессивной крутизны нарезов» и «О продольных колебаниях стержней», из которых первая примыкает к комментируемой статье, а вторая посвящена теории продольных колебаний ствола орудия (постоянной толщины), вызванных силами инерции при откате и изменением давления, действующего на дно канала.

В 1923—1924 гг. были написаны «Заметки по баллистике», впервые опубликованные в т. 4 «Собрания трудов академика А. Н. Крылова», объединившем основные работы Алексея Николаевича по артиллерийскому делу (включая «Некоторые замечания о крещерах и индикаторах», статью «О продольных колебаниях орудия» и др.).

К вопросам баллистики А. Н. Крылов возвращается и в последние годы жизни: в 1941 г. в «Известиях Военно-морской академии ВМФ им. К. Е. Ворошилова» он публикует статью «Об учете поправок при стрельбе по аэропланам», в которой излагает точные формулы для учета «упреждений», а затем упрощает их в соответствии с практическими требованиями. Работа эта послужила базой для рационального проектирования счетно-решающих приборов управления зенитным огнем.

Настоящие комментарии были бы неполными, если бы не охватывали деятельности Алексея Николаевича как выдающегося конструктора и непревзойденного экспериментатора.

А. Н. Крылову принадлежит почетное место в создании оптических прицелов для военно-морского флота (см. статью В. И. Муханова «Роль А. Н. Крылова в развитии артиллерийской науки и техники» в «Трудах Военно-морской академии кораблестроения и вооружения имени А. Н. Крылова», 1953, вып. 6. Материалы статьи использованы при составлении настоящих комментариев).

Первые оптические прицелы для морской артиллерии были сконструированы известным изобретателем Я. Н. Перепелкиным. Однако производство их на Обуховском заводе, не располагавшим необходимым оборудованием и квалифицированными специалистами в новой тогда отрасли техники, вызывало большие затруднения. В связи с этим, А. Н. Крылов предложил Морскому министерству разработанный им проект оптического прицела, во много раз более дешевого и простого в изготовлении, чем «Оптический прицел Обуховского завода образца 1903 г.», изобретенный Я. Н. Перепелкиным.

В августе 1904 г. было изготовлено свыше ста прицелов А. Н. Крылова для нужд кораблей второй тихоокеанской эскадры. Комиссия морских артиллерийских опытов, проводившая их испытания, в своем докладе 7 октября 1904 г. писала, что «прицел подполковника Крылова имеет то преимущество перед обыкновенными, что, увеличивая ясность видения цели, он дает возможность более точно наводить, причем, как выяснилось при бывшей при стрельбе скверной дождливой

погоде, дает возможность продолжать стрельбу с достаточной точностью (контроль квадрантом), тогда как наведение в цель по обыкновенному прицелу за неясностью цели становится невозможным». Добавим к этому объективному заключению, что прицел образца 1903 г. стоил 1150 рублей, а прицел А. Н. Крылова... 25 рублей.

Алексею Николаевичу принадлежит также заслуга в постановке и проведении первых в мировой технике опытов по исследованию влияния качки на меткость стрельбы. Испытания были проведены в 1907 г. на канонерской лодке «Ураец» у мыса Айя, причем в качестве щитов служили береговые скалы, поднимающиеся почти отвесно на высоту около 500 м. На них заранее были накрашены точки прицеливания и линейные базы, служившие для расшифровки фотоснимков попаданий.

Сначала были проведены «штилевые» стрельбы с дистанции в 10 и 25 кабельтовых, а затем на тех же дистанциях производилась стрельба на качке. При этом на специально сконструированном Алексеем Николаевичем приборе регистрировались размахи качки, текущее время, момент спуска курка и момент вылета снаряда из ствола орудия.

Наряду с непосредственными выводами, освещенными в отчете, эти испытания до сего времени представляют исключительную ценность как по организации и техническому обеспечению, так и по методике обработки и анализа результатов.

В непосредственной связи с теоретико-экспериментальными работами по повышению эффективности использования артиллерийского оружия А. Н. Крылов разрабатывает прибор для фотозаписи качаний корабля на волнении, предлагает оригинальную и простую конструкцию дальномера и, наконец, создает пользующийся и сейчас широкой популярностью на флоте отсчетчик или прибор для обучения наводке системы А. Н. Крылова.

Любовь к разработке и проектированию разнообразных приборов и специальных устройств А. Н. Крылов сохранил до конца своей жизни. Ему принадлежит проект стабилизированного дальномерного поста, им же создана общая теория гировертикали и исследован вопрос о выборе для нее наиболее выгодного места на корабле; Алексеем Николаевичем предложены средства амортизации дальномерных постов при вибрации корабля, им же внесены существенные улучшения в разнообразные оптические приборы, изготавливаемые на наших заводах, бессменным консультантом которых он состоял.

Отличительной особенностью всех предложений Алексея Николаевича является обеспечение той степени точности, которая необходима для практических целей, создание для личного состава удобных в эксплуатации условий и непревзойденная простота конструкции.

Эти именно идеи, вместе с большим научным наследством завещанные А. Н. Крыловым новому поколению советских инженеров и ученых, по сей день обеспечивают успешное развитие отечественных работ в области морской артиллерии и специального приборостроения.

НЬЮТОНОВА ТЕОРИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ

Впервые напечатано в журнале «Архив истории науки и техники» (серия 1, 1935, вып. 5, стр. 183—250) и вошло в «Собрание трудов академика А. Н. Крылова» (Изд. АН СССР, 1936, т. 6, стр. 151—225).

Статья представляет собой содержание доклада, прочитанного А. Н. Крыловым в Институте истории науки и техники Академии Наук СССР 16 октября 1934 г. О комментируемом труде академик В. И. Смирнов писал: «Эта единственная в своем роде работа представляется замечательной и с точки зрения астрономии и с точки зрения истории физико-математических наук» (Академик В. И. Смирнов. Научное творчество Алексея Николаевича Крылова. В кн.: С. Я. Штрайх. Алексей Николаевич Крылов — его жизнь и деятельность. 1950). Здесь Алексей Николаевич выступает одновременно и как блестящий знаток астрономии и как непревзойденный в истории науки реставратор идей Ньютона, восстановивший нигде не опубликованную теорию астрономической рефракции на основе одной теоремы, приведенной Ньютоном без доказательства в письме к директору Гриничской обсерватории Флемстиду, и на базе одной леммы из Ньютонových «Математических начал натуральной философии». Во всех деталях восстанавливая ход мыслей Ньютона и, полностью сохраняя его стиль, А. Н. Крылов, разрешая тем самым своеобразный историко-астрономический ребус, получает те две таблицы рефракции, которые только и были даны Ньютоном.

Интерес к астрономии как одной из наук, профилирующих образование морского офицера, возник у Алексея Николаевича еще в Морском училище. В последующие годы, знакомясь с трудами Ньютона, Эйлера, Гаусса и других классиков науки, он в совершенстве изучил эту отрасль знания, которую часто называл «величественной из точных наук».

Начиная с 1907 г. в печати стали систематически появляться статьи и заметки о предстоящем возвращении кометы Галлея, которая, говоря словами Алексея Николаевича, «из множества своих появлений лишь в третий раз по пути, заранее предвычисленному, и во время предугаданное приближалась к Земле». В этот именно период возросшего интереса к астрономии А. Н. Крылов прочел для слушателей Морской академии факультативный курс, названный им «Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений». Во вступлении к этим лекциям он говорил: «Вам может показаться странным, что вместо того, чтобы беседовать с вами о предметах моей специальности, я вдаюсь в область, совершенно ей чуждую. Не состоят ли отдых и развлечение в том, чтобы заняться иным делом, нежели то, которым занят постоянно? Если многие видят отдых в том, чтобы, сидя за шахматной доской, соображать самые неожиданные комбинации и придумывать самые замысловатые ходы, то отчего же для отдыха не перечитать лишний раз со вниманием избранные места из произведений величайших гениев и для развлечения не побеседовать об их творениях?».

По этому поводу Н. И. Идельсон писал: «С тех пор как преподается и излагается курс астрономии (вероятно, не менее 2000 лет), Алексей Николаевич был, несомненно, первым, кто разработал мастерский и оригинальный курс определения орбит — самую сложную, насыщенную вычислениями часть этого курса — для отдыха и развлечения... Но в этом как раз и состоит основная особенность его одаренности, обеспечившая поразжающий по ширине размах его трудов: отдых у него есть своеобразная работа мозга в другом направлении; но по существу это все тот же многообразный, не знающий усталости труд» (Н. И. Идельсон. Академик Алексей Николаевич Крылов. Журнал «Наука и жизнь», 1943, № 9—10).

В «Беседах», изданных в 1910 г., две трети объемистого содержания занимает исследование, которое нельзя найти ни в каком другом сочинении по астрономии, а именно, способ определения орбит комет, данный еще самим Ньютоном в его знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии». Алексей Николаевич показывает здесь, что в немногих трудах Ньютона, рассматривающих задачу о кометных орбитах, содержатся не только основы современных методов исследования, но, по существу, и содержание того, что было достигнуто в самое последнее время.

Переложив полуграфический метод Ньютона на язык современного анализа, Алексей Николаевич иллюстрирует его применение на примерах и в том числе таких, что метод Ньютона становится применимым лишь благодаря остроумной модификации, предложенной А. Н. Крыловым. «Словом, он с каким-то особенным мастерством сообщает этим страницам Ньютона новую жизнь, — писал Н. И. Идельсон. И в этом, по-моему, основное значение его „Бесед“. Но если меня спросят теперь: какая это работа — по истории науки или по действительной науке, я должен буду сказать, что именно в отношении Алексея Николаевича меньше всего можно ставить подобный вопрос. Для него и то и другое суть понятия совершенно неразрывные: история науки есть для него ее творческая реконструкция и обратно, — нет науки без широких исторических перспектив» (там же).

В 1916 г. Алексей Николаевич закончил начатый им еще в 1914 г. замечательный, ставший классическим перевод Ньютоновых «Начал». Об этом своем научном подвиге А. Н. Крылов скромно писал в 1927 г.: «Геометрическое изложение, соответствовавшее обычному состоянию науки того времени, для большинства теперешних читателей, при старинном начертании формул с показателями степени, обозначенными словами, а не числами, представляет при чтении излишнюю трудность. Эта трудность увеличивается еще тем, что Ньютон, в целях сжатости изложения, идет, так сказать, крупными шагами, пропуская многие промежуточные рассуждения; поэтому в моем переводе Ньютоновых „Начал“ на русский язык я придал формулам общепринятый теперь вид и большую часть доказательств пояснил в примечаниях, с соответствующими аналитическими выводами и алгебраическими выкладками в теперешней форме».

Своим переводом книги Ньютона с обширными комментариями числом более 200, в которых изложены, по существу, оригинальные доказательства положений, высказанных Ньютоном, и современная их трактовка, А. Н. Крылов создал научную ценность выдающегося значения для всей физико-математической области знания. Подобного издания Ньютона не знает ни одна страна: у англичан имеется только подстрочный перевод без комментариев, выполненный Моттом в год смерти Ньютона, у французов — представляющий библиографическую редкость (издания 1759 г.) перевод, предпринятый маркизой де-Шатле с комментарием, просмотренным Клеро, и при всех своих достоинствах далекий от того особенного языка Ньютона, который сумел схватить только Алексей Николаевич. Нечего и говорить о том, что во французском переводе отсутствуют пояснения, сохраняющие круг идей Ньютона и воспроизводящие его выводы и доказательства при помощи обычной сейчас математической символики и притом с непревзойденной ясностью и полнотой, — такие комментарии мог написать только А. Н. Крылов. Его и английские ученые почитают лучшим знатоком научного наследия Ньютона, умеющим читать его между строк и исчерпывающей оригинальной трактовкой оживлять для нового поколения.

5 марта 1916 г. Алексей Николаевич был избран в действительные члены Академии Наук и вскоре назначен директором Главной геофизической обсерватории. Здесь он пробыл недолго. Однако и кратковременное (по январь 1917 г.) пребывание А. Н. Крылова на посту директора обсерватории оставило свой след в науке: за это время он выполнил перевод лекций Гаусса по теоретической астрономии в Геттингене в 1820—1821 гг. Лекции эти были записаны А. Я. Купфером, впоследствии петербургским академиком и директором Главной геофизической обсерватории, и обнаружены Алексеем Николаевичем в архиве обсерватории. Перевод лекций Гаусса издан Главным гидрографическим управлением в 1919 г.

В 20-х годах А. Н. Крылов снова возвращается к Ньютону методу определения параболических орбит комет в статье, написанной для журнала Английского Королевского общества, председателем которого в течение 25 лет состоял Ньютон. Здесь Алексей Николаевич снова раскрывает направленность своих астрономических исследований: «Моя цель, — писал Алексей Николаевич, — привлечь внимание к этим изумительным страницам Ньютонových „Начал“ и обнаружить, что они в той же мере совершенны, как и все, что Ньютон когда-либо писал».

Еще в «Беседах» А. Н. Крылов указал, что основная (десятая) лемма Ньютона по существу совпадает с теоремой, которую астрономы связывают с именами Эйлера и Ламберта. На это тождество впервые обратил внимание Лагранж, не представивший, однако, никакого обоснования своего утверждения. В статье «On a theoreme of Sir Isaac Newton», опубликованной в 1924 г. в журнале «Monthly Notices of the R. Astron. Soc.», А. Н. Крылов снова изложил свой оригинальный и изумительный по простоте вывод теоремы Эйлера—Ламберта

непосредственно из десятой леммы Ньютона. Не без иронии он отмечает, что в современных трактатах, в том числе и английских, это обстоятельство не только осталось незамеченным, но изложено вопреки истории вопроса. В заключении статьи Алексей Николаевич отмечает: «Множество доказательств этой основной формулы можно найти в современных трактатах, но Ньютоново доказательство остается непревзойденным по его изумительной динамической проникновенности».

В докладе «Работы академика А. Н. Крылова по астрономии», прочитанном в Ленинградском доме ученых в 1947 г. и использованном при составлении настоящего комментария, профессор Н. И. Идельсон поделился своими воспоминаниями о докладе А. Н. Крылова «Об измерении элементов эллиптических планетных орбит» (соответствующая статья, на английском языке, опубликована в «Известиях Академии Наук», 6 серия, 1915, т. 9, № 10). «Когда я шел на этот доклад, мне непонятно было, зачем снова ставить вопрос, решенный во всех курсах небесной механики, составляющий основу всякого изложения этого предмета на единственном, казалось бы, здесь возможном общем лагранжевом методе вариации произвольных постоянных. Но как только Алексей Николаевич начал свое изложение, выяснилось, что он будет выводить эти 6 уравнений Лагранжа. И в какие-нибудь три четверти часа он вывел действительно эти уравнения с художественной простотой, пользуясь просто тем соображением, что если рассматривать действие возмущающей силы за бесконечно малый интервал, то можно рассудить, как в теории удара, т. е. оставить координаты точки неизменными, и варьировать только ее скорость; отсюда легко получаются все шесть классических уравнений Лагранжа».

«Оказалось к тому же, что этот метод полностью основан на одном из предположений Ньютона. Нужно сравнить вывод этих классических формул, данный Крыловым в докладе, следуя истинному смыслу слов Ньютона, с выводом этих формул у Тиссара или же у Левертона, где этот вывод занимает 22 страницы малой печати большого формата, чтобы еще более убедиться в пользе изучения Ньютоновых „Начал“ при изучении даже и современной небесной механики».

«И потому и этот доклад оставил незабываемое и своеобразное впечатление: так же, как „Беседы 1911 г.“, он раскрывал еще одну новую перспективу на творенье Ньютона, а кто тогда мог у нас, кроме Крылова, читать и понимать его до конца?».

К творческому воссозданию и реконструкции классического наследия Ньютона А. Н. Крылов в последний раз возвратился в комментируемой статье «Ньютонова теория астрономической рефракции», представляющей не только исключительную ценность по существу самого содержания, но являющейся одновременно непревзойденным образцом исследования в области истории науки.

В статье, опубликованной в «Трудах Военно-морской академии кораблестроения и вооружения имени А. Н. Крылова» (1953, вып. 6), отмечая заслуги автора перевода «Начал» и комментируемой статьи, акад. В. А. Фок писал:

«Этимі работами, а также переводом „Новой теории движения луны“ Леонарда Эйлера, А. Н. Крылов создал новое направление в истории точных наук». И далее: «А. Н. Крылов, как никто другой, умел находить в творениях великих классиков те идеи, которые потом составили ядро новых отраслей науки».

Действительно, в «Новой теории движения луны» Алексей Николаевич впервые показывает, что Эйлер по существу пользовался приемом, эквивалентным разложению в кратные ряды Фурье, хотя во времена Эйлера не были известны даже простые гармонические ряды.

История возникновения «Перевода с латинского первой части книги первой и извлечений из частей второй и третьей „Новой теории движения Луны“ Леонарда Эйлера» настолько характерна для деятельности Алексея Николаевича, что мы остановимся на ней несколько подробнее.

Готовясь к докладу на торжественном заседании Академии Наук СССР, посвященном 150-й годовщине со дня смерти Леонарда Эйлера, А. Н. Крылов снова изучил его «Теорию движения Луны». При этом Алексей Николаевич обратил внимание на то, что для определения прямолинейных прямоугольных координат светила Эйлер пишет дифференциальные уравнения, представляющие весьма общий случай колебательного движения материальных систем, и во всех подробностях развивает фундаментальный и притом простой метод интегрирования этой системы уравнений, доводя его до численных результатов.

Так как многие задачи современной техники приводят к системам дифференциальных уравнений нелинейных, либо линейных, но с переменными коэффициентами, т. е. именно таких уравнений, которые разрешает Эйлер в своей теории Луны, А. Н. Крылов предпринимает перевод тех частей этого труда, которые содержат составление уравнений движения Луны и изложение общего метода их интегрирования, а также численное развитие этого метода и типичные примеры его применения, опуская разделы, представляющие интерес только для астрономов.

«Само собою разумеется, — писал Алексей Николаевич в предисловии к своему переводу, — что едва ли какой-либо техник или инженер, встретив в своем деле уравнения, подобные рассмотренным Эйлером, станет искать их решение в сочинении, изданном в 1772 г. под заглавием „*Theoria Motuum Lunae nova methodo pertractata*“; по большей части он не будет иметь к тому и возможности, ибо это сочинение можно найти в очень немногих библиотеках».

Так как Эйлер предназначал свое сочинение для астрономов, а не инженеров, А. Н. Крылов дополнил свой перевод «Прибавлениями и примечаниями», содержащими все необходимые сведения для ясного понимания оригинального текста Эйлера.

Необходимость в этих «Прибавлениях» диктовалась еще одним немаловажным для техников обстоятельством. При практическом применении предложенного Эйлером метода разложения искомых решений дифференциальных уравнений в ряды, расположенные по степеням малых параметров, могут возникнуть затруднения, связанные с появлением так называемых вековых членов, содержащих

время вне знаков синуса или косинуса. Для того, чтобы избавиться от них, нужно ввести в рассмотрение частоту основных колебаний системы, измененную⁹ присутствием в уравнениях нелинейных членов; ее значение определяется некоторым уравнением, составить которое Эйлер «не отважился», а определил его из астрономических наблюдений или, как он сам выразился, взял его «с неба».

В тех случаях, когда техник не располагает таким «небом», т. е. не может прибегнуть к опытным данным, А. Н. Крылов рекомендует обратиться к работе астронома Хилла, давшего метод составления и решения уравнения для определения измененной частоты колебаний системы; изложение метода Хилла также включено в «Прибавления».

Так очередной юбилей Эйлера, благодаря исключительной проницательности и богатейшей эрудиции Алексея Николаевича, ознаменовался для инженеров широко различных специальностей приобретением нового мощного средства решения многих практических задач: из недр громадного многообразия сочинений знаменитейшего петербургского академика Эйлера А. Н. Крылов поднял «на гора» то, которое от лунной теории ведет непосредственно к актуальнейшим задачам современной техники.

Сам Алексей Николаевич в конце предисловия к переводу писал, что целью его труда являлось сделать методы Эйлера «доступными техникам и инженерам» и что эта цель «вполне соответствует потребностям нашего великого строительства». Постоянное глубокое и полное удовлетворение этих потребностей служило основой замечательной жизни А. Н. Крылова в наиболее плодотворный после октябрьский период его деятельности и определило также и то направление его многогранной научной работы, которое в настоящей сборнике представляется комментируемой статьей, где Алексей Николаевич выступает как подлинный новатор истории науки и техники.

Профессор И. Г. Ханович.

БИБЛИОГРАФИЯ ОСНОВНЫХ ТРУДОВ А. Н. КРЫЛОВА¹

I. Собрание трудов

1. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 1. Ч. 1. Воспоминания и мемуарные очерки. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов и чл.-корр. АН СССР Ю. А. Шимаиский. Редакция и комментарии С. Я. Штрайха]. М.—Л. 1951. 304 стр., 5 портр. (Академия Наук СССР).
2. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 1. Ч. 2. Научно-популярные статьи. Биографические характеристики. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов и чл.-корр. АН СССР Ю. А. Шимаиский. Редакция и комментарии С. Я. Штрайха]. М.—Л. 1951. 324 стр. с рис., 1 портр. (Академия Наук СССР).
3. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 2. Компасное дело. [Ред. проф. Н. И. Идельсон]. М.—Л. 1943. 180 стр. с рис. (Академия Наук СССР).
4. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 2. Ч. 2. Земной магнетизм и компасное дело. [Отв. ред. проф. Н. И. Идельсон]. М.—Л. 1947. 264 стр. с рис., 3 л. карт. (Академия Наук СССР).
5. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 3. Математика. Ч. 1. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов]. М.—Л. 1949. 498, [1] стр. с рис., 2 л. рис. (Академия Наук СССР).
6. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 3. Математика. Ч. 2. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов]. М.—Л. 1949. 481, [1] стр. с рис. (Академия Наук СССР).
7. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 4. Баллистика. [Ред. акад. А. Н. Крылов]. М.—Л. 1937. [3], 444 стр. с рис., 6 л. рис. (Академия Наук СССР).
8. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 5. Математика и механика. [Ред. акад. А. Н. Крылов]. М.—Л. 1937. [3], 574, [1] стр. с рис., 1 л. табл. (Академия Наук СССР).

¹ Полная библиография трудов А. Н. Крылова, литература о нем и хроника его деятельности опубликованы в „Собрании трудов академика А. Н. Крылова“, т. 12, ч. 2, 1956.

9. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 6. Астрономия. [Ред. А. Н. Крылов]. М.—Л. 1936. [3], 452 стр. с рис. (Академия Наук СССР).
10. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Дополнение к тт. 5 и 6. [Ред. акад. А. Н. Крылов]. М.—Л. 1937. VIII, 248 стр. 24, рис. (Академия Наук СССР).
11. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 7. Ис. Ньютон. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова. [Ред. А. Н. Крылов]. М.—Л. 1936. [6], 696 стр., 214 рис., 1 л. рис. (Академия Наук СССР).
12. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 8. Механика. [Отв. ред. проф. Н. И. Идельсон]. М.—Л. 1950. 350, [1] стр. с рис., 2 л. рис. (Академия Наук СССР).
13. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 9. Теория корабля. Ч. 1. [Отв. ред. проф. И. Г. Ханович]. М.—Л. 1948. 398 стр. с рис., 1 л. черт. (Академия Наук СССР).
14. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 9. Теория корабля. Ч. 2. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов и чл.-корр. АН СССР Ю. А. Шиманский].¹ М.—Л. 1949. 313, [1] стр. с рис., 1 л. рис. (Академия Наук СССР).
15. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 10. Вибрация судов. [Отв. ред. чл.-корр. АН СССР Ю. А. Шиманский]. М.—Л. 1948. 398, [5] стр. 55 рис., 1 л. рис. (Академия Наук СССР).
16. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 11. Качка корабля. [Отв. ред. чл.-корр. АН СССР Ю. А. Шиманский].¹ М.—Л. 1951. 469, [1] стр. с рис., 1 л. рис. (Академия Наук СССР).
17. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 12. Ч. 1. Разные работы. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов, акад. Ю. А. Шиманский, канд. техн. наук А. П. Коржов]. М.—Л. 1955. 345 стр. с рис. (Академия Наук СССР).
18. Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 12. Ч. 2. Библиография. [Отв. ред. акад. В. И. Смирнов, акад. Ю. А. Шиманский, докт. военно-морск. наук В. А. Снежинский. Подготовлено сотрудниками кабинета-музея А. Н. Крылова Военно-морской академии кораблестроения и вооружения им. А. Н. Крылова при участии преподавателей той же академии. Отв. составитель М. Н. Глаголева. Библ. ред. К. И. Шафрановского]. М.—Л. 1956. 395 стр. с рис., 6 портр. (Академия Наук СССР).

II. Математика

19. Лекции о приближенных вычислениях. — Собр. трудов. 1949. Т. 3. Ч. 1. 498 (2) стр. с рис. и табл. Впервые издано в 1907 г. под загл.: „О приближенных вычислениях“. 288 стр. [Литогр. изд. Вольного С.-Петербургского

¹ Вторая часть девятого тома, а также одиннадцатый том „Собрания трудов“ были подготовлены к печати членом Комиссии Академии Наук СССР по изданию трудов академика А. Н. Крылова профессором И. Г. Хановичем.

университета]. Переиздано в 1911, 1932 (на укр. яз.), 1933, 1935, 1950, 1954 гг.

20. О вычислении коэффициентов ряда Фурье. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 453—458. Впервые опублик. в 1932 г. (Доклады Акад. Наук СССР, серия А, № 2, стр. 31—36).

21. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — Собр. трудов. 1949. Т. 3. Ч. 2. 481 (2) стр. с рис. Впервые опублик. в 1913 г. (Изв. Морск. акад., № 2, стр. I—IV, 1—364). Переиздано в 1932, 1933, 1950 гг.

22. On the hatchet planimeter. (О планиметре-топорице). — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 539—545 с рис. Впервые опублик. на англ. яз. в 1903 г. (Известия Акад. Наук, 5 серия, т. 19, № 4—5, стр. 221—227 с рис.); на русск. яз. в 1904 г. (Морск. сборн., № 6, исф. отд., стр. 113—120, 3 л. рис.).

23. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 139—180. Впервые опублик. в 1933 г. (Известия Акад. Наук СССР, 7 серия, ОМЕН, № 1, стр. 1—44).

24. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 93—138. Впервые опублик. в 1931 г. (Известия Акад. Наук СССР, 7 серия, ОМЕН, № 4, стр. 491—539).

25. Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires. [Об интеграторе обыкновенных дифференциальных уравнений]. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 547—574 с рис. Впервые опублик. в 1904 г. (Известия Акад. Наук, 5 серия, т. 20, № 1, стр. 17—37).

26. Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 1—92 с рис.

Завершение работы, изданной впервые в 1917 г. под загл.: „О приближенном численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений“. (Ежегодник Союза морск. инж., т. 2, стр. 3—43). Переведено на франц. яз. в 1927 г. под загл.: „Sur l'intégration numérique approchée des équations différentielles avec application au calcul des trajectoires des projectiles“ (Mémorial de l'artillerie française, t. 6, fasc. 2, pp. 353—423).

27. Учебник сферической тригонометрии для мореходных учебных заведений. СПб. 1899. [7], 120 стр. с рис.

III. Механика

28. Движение сферического маятника. — Собр. трудов. 1950. Т. 8. Стр. 299—314 с рис.

29. Карданов подвес на корабле. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 193—258. Впервые опублик. в 1953 г. (Труды Военно-морск. акад. кораблестр.

и вооруж. им. А. Н. Крылова, 1953, в. 6, стр. 7—112). (Датировано 12 апреля 1941 г.).

30. Ньютон Ис. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова. — Собр. трудов. 1936. Т. 7. Стр. 1—696 с рис. Впервые опубли. в 1915 и 1916 гг. (Известия Морск. акад., в. 4, стр. I—VIII, 1—276; в. 5, стр. IV, 1—344).

31. О вибрации фундаментов не вполне уравновешенных машин и способах ее уменьшения. — Собр. трудов. 1950. Т. 8. Стр. 279—298 с рис. Впервые опубли. в 1938 г. (Вестн. металлопром., № 11, стр. 82—99).

32. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. [О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней]. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 513—537. Впервые опубли. в 1905 г. (Mathem. Annalen, Leipzig, Bd. 61, SS. 211—234).

33. О движении материальной точки относительно поверхности земли. — Собр. трудов. 1950. Т. 8. Стр. 315—332 с рис.

34. О динамическом уравнивании роторов гироскопов. — Собр. трудов 1937. Т. 5. Стр. 459—494 с рис. Впервые опубли. в 1935 г. (НИИМАШ, № 7, стр. 1—22).

35. О перемещениях твердого тела. — Собр. трудов. 1950. Т. 8. Стр. 333—350 с рис. (Датировано 1940 г.).

36. Об определении кривых скоростей вращающегося вала. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 363—390 с рис. Впервые опубли. в 1932 г. (Известия Акад. Наук СССР, 7 серия, ОМЕН, № 10, стр. 1375—1403).

37. Общая теория гировертикали. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 259—301.

38. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. — Собр. трудов. 1950. Т. 8. Стр. 9—275 с рис. Впервые опубли. в 1932 г. (Совместно с Ю. А. Крутковым).

IV. Теория корабля

39. Влияние глубины моря на результаты испытаний миноносца „Быстрый“. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 119—126 с рис. Впервые опубли. в 1931 г. (Бюлл. НТК УВМС РККА, в. 5, стр. 22—29).

40. Наблюдения вад крепостью льда и сопротивлением его движению ледокола „Ермак“. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 165—182 с рис. Впервые опубли. в кн.: Макаров С. О. „Ермак“ во льдах. СПб. 1901. Стр. 418—435.

41. Некоторые замечания об обработке прогрессивных испытаний судов. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 132—143 с рис. Впервые опубли. в 1929 г. (Бюлл. НТК УВМС РККА, № 2, стр. 10—21).

42. Новый метод расчета элементов подводной части судна. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 55—102. Впервые опубли. в 1894 г. на франц. яз. под

загл.: „Nouvelle méthode de calcul des éléments d'une carène“. (Bulletin de l'Association techn. marit., № 4, Session de 1893, pp. 97—138).

43. Определение положения равновесия корабля, имеющего пробойну. — Собр. трудов. 1948. Т. 9. Ч. 1. Стр. 382—398 с рис. Впервые опублик. в 1944 г. (Труды Военно-морской академии им. Ворошилова, в. 12, стр. 3—17).

44. О программе систематических опытов над сопротивлением воды на моделях судов. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 37—44. Имеется литогр. изд. [90-х годов] без указания места издания и года.

45. О прогрессивных испытаниях кораблей. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 110—118 с рис. Впервые опублик. в 1931 г. (Бюлл. НТК УВМС РККА, в. 5, стр. 14—21).

46. О проекте стандарта таблиц непотопляемости. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 290—298. В качестве приложения приведены „Принципы обеспечения непотопляемости военных судов“.

47. О равновесии шаровой мины на течении. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 183—202 с рис. Впервые опублик. в 1909 г. (Известия по минному делу, в. 44, стр. 84—108).

48. Статика судоподъема. — Собр. трудов. 1948. Т. 9. Ч. 1. Стр. 337—381 с рис. Впервые опублик. в кн.: Судоподъем. Сборник № 2 (30). 1945. Стр. 5—40.

49. Суда, перевозившие паровозы. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 229—275 с рис. В более полном виде опублик. в кн.: Перевозка паровозов Э^ш и Э^г из-за гравиды. Под ред. Ю. В. Ломоносова. Берлин. 1923. Стр. 67—132.

50. Теория корабля. — Собр. трудов. 1949. Т. 9. Ч. 2. Стр. 13—54. Впервые опублик. в 1907 г. на нем. яз. под загл.: „Die Theorie des Schiffes“. (Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. 6₂. H. 4. SS. 517—562).

51. Теория корабля. Плавуемость и остойчивость. — Собр. трудов. 1948. Т. 9. Ч. 1. Стр. 45—336 с рис. Опублик. в 1933 г. в виде учебника для Кораблестроительного сектора Военно-морского инженерного училища им. т. Дзержинского.

52. Теория корабля. Курс высших военно-морских училищ. Изд. дополн. и переработ. Ульяновск. Военмориздат. 1942. VIII, 260 стр. с рис.

V. Качка корабля

53. Качка корабля. — Собр. трудов. 1951. Т. 11. Стр. 9—290 с рис. Впервые опублик. в 1938 г. (Издание Военно-морской академии имени т. Ворошилова).

54. Общая теория качки корабля на волнении. — Собр. трудов. 1951. Т. 11. Стр. 183—250 с рис. Опублик. в 1898 г. на англ. яз. под загл.: „A general theory of the oscillations of a ship on waves“ (Trans. Inst. Nav. Archit., 1898, v. 40, pp. 135—190, pl. XXXII—XXXVI) и на франц. яз. под загл.: „Théorie générale des oscillations du navire sur une mer houleuse“. (Bulletin de l'Association techn.

marit., 1898, № 8, Session de 1897, pp. 19—49, fig.; 1901, № 12, Session de 1901, pp. 23—54, 3 pl.).

55. О боковой качке корабля. — Собр. трудов. 1951. Т. 11. Стр. 291—469. Впервые опублик. в 1942 г.

56. О боковой качке корабля, имеющего заданную диаграмму остойчивости. (Доклад, читанный 14 июля 1933 г. в ячейке НИВК'а совместно с секцией мореходных качеств корабля ВНИТОСС). — Труды ВНИТОСС, 1934, т. 1, в. 2, стр. 7—24 с рис. (С незначительными изменениями, под тем же загл. в кв. „Качка корабля“, стр. 91—112, и в: Собр. трудов. Т. 11. М.—Л. 1951. Стр. 93—113).

57. О кренометре, показывающем на качке то положение равновесия, около которого корабль качается. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 180—186 с рис. Впервые опублик. в 1948 г. (Датировано 21 марта 1939 г.).

58. О равновесии и движении тел на качающемся корабле. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 129—161. Одвоименная работа [вышла в литографированном издании в 1938 г.

59. О фотографической записи качания корабля. Доклад в Морском техническом комитете. — Собр. трудов. 1951. Т. 11. Стр. 261—264 с рис. Впервые (в литогр. взд.) опублик. в 1906 г.

60. Теория и расчет гироскопического успокоителя качки системы О. Шлика. — Морск. сборн., 1909, № 3, веоф. отд., стр. 145—178 с рис. Опублик. также на франц. яз. под загл.: „Notice sur la théorie du gyroscope amortisseur du roulis de M. le dr. O. Schlick“. (Bulletin de l'Association techn. marit., 1909, № 20, Session de 1909, pp. 109—139).

61. Теория килевой качки корабля на волнении. — Собр. трудов. 1951. Т. 11. Стр. 136—182 с рис. Опублик. в 1896 г. на франц. яз. под загл.: „Théorie du tangage sur une mer houleuse“ (Bulletin de l'Association techn. marit., 1896, № 6, Session de 1895, pp. 129—134; 1897, № 7, Session de 1896, pp. 5—42, pl. I—IV) и на англ. яз. под загл.: „A new theory of the pitching motion of ships on waves and on the stresses produced by this motion“. (Trans. Inst. Nav. Archit., 1896, v. 37, pp. 326—368, pl. LIV—LVII).

VI. Строительная механика корабля

62. Вибрация судов. — Собр. трудов. 1948. Т. 10. Стр. 5—398 с рис. Впервые издано в 1907 г. Значительно дополненное и переработанное издание вышло в 1936 г.

63. О колебательном движении механических систем. — Собр. трудов. 1948. Т. 10. Стр. 5—15 с рис. (Введение к курсу „Вибрация судов“). Впервые опублик. в 1932 г. (Социалистическая реконструкция и наука, в. 4, стр. 33—42).

64. О вапряжении, вызываемом в упругой системе динамической нагрузкой. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 95—123. Впервые опубли. в 1930 г. (Бюлл. НТК УВМС РККА, в. 4, ноябрь, стр. 5—38).

65. О расчете балок, лежащих на упругом основании. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 227—362 с рис. Впервые опубли. в 1930 г.

66. О расчете вибраций корабля, производимых работой машины его. — Ежегодн. Союза морск. инж., 1917, т. 2, стр. 201—228. Резюме на англ. яз., стр. 265. Опубли. в 1918 г. на франц. яз. под загл.: „Sur le calcul des vibrations d'un navire produites par le travail de sa machine“. (Известия Акад. Наук, 6 серия, т. 12, ч. 1, № 10, стр. 915—938).

67. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 181—226 с рис. Впервые опубли. в 1931 г. (Известия Акад. Наук СССР, 7 серия, ОМЕН, № 7, стр. 963—1012).

68. Об усилиях, испытываемых кораблем на волне. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 47—60. Опубли. в 1898 г. на англ. яз. под загл.: „On stresses experienced by a ship in a seaway“. (Trans. Inst. Nav. Archit., v. 40, pp. 197—212).

69. Расчет башни броненосца „Император Николай I“. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 7—36 с рис. Впервые опубли. в 1888 г. (Морск. сборн., № 5, стр. 49—85).

VII. Компасное дело

70. Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении. — Собр. трудов. 1947. Т. 2. Ч. 2. Стр. 153—194 с рис. Впервые опубли. в 1938 г. (Известия Акад. Наук СССР, ОМЕН, серия географ. и геофиз., № 5—6, стр. 439—476).

71. Вычисление делений сил дефлектора компаса. — Собр. трудов. 1947. Т. 2. Ч. 2. Стр. 193—210 с рис. Впервые опубли. в 1887 г. (Записки по гидрографии, № 2, стр. 64—81).

72. Заметка о теории и употреблении дромоскопа Фурнье. — Собр. трудов. 1943. Т. 2. Стр. 99—126 с рис. Впервые опубли. в 1886 г. (Морск. сборн., № 9, неоф. отд., стр. 1—36).

Перевод с французского статьи „Notice sur la théorie et l'emploi du dromoscope Fournier“. Paris. 1886. С дополнением А. Н. Крылова.

73. О баллистической погрешности гирокомпаса (без успокоителя). — Собр. трудов. 1947. Т. 2. Ч. 2. Стр. 215—222.

74. О баллистической погрешности гирокомпаса, снабженного гидравлическим успокоителем. — Собр. трудов. 1947. Т. 2. Ч. 2. Стр. 223—252.

75. О новом дромоскопе. — Собр. трудов. 1943. Т. 2. Стр. 87—98 с рис. Впервые опубли. в 1886 г. (Морск. сборн., № 10, неоф. отд., стр. 1—13). На франц. яз. опубли. в: Revue marit. et coloniale, 1887, t. 94, pp. 75—87.

76. О расположении стрелок в картушке компаса. — Собр. трудов. 1943. Т. 2. Стр. 65—86 с рис. Впервые опублик. в 1886 г. (Морск. сборн., № 5, веоф. отд., стр. 1—30).

77. О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером. — Собр. трудов. 1943. Т. 2. Стр. 127—179 с рис. Впервые опублик. в 1940 г. (Известия Акад. Наук СССР, ОМОН, серия географ. и геофиз., № 4, стр. 429—474).

78. Определеие на корабле погрешности показаний гирокомпаса. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 162—173.

79. Освоания теории девнации компаса. — Собр. трудов. 1943. Т. 2. Стр. 3—64 с рис. Впервые опублик. в 1940 г.

VIII. Баллистика

80. Авализ диаграммы давления в цилиндре компрессора, святой индикатором Виккерса. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 413—422 с рис. Впервые опублик. в [1913 г.] под загл.: „О диаграммах давления в цилиндре компрессора, записанных индикатором Виккерса“. [Литогр. изд.].

81. Заметки по баллистике. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 335—371 с рис.

82. Некоторые замечания о крешерах и ивдикаторах. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 373—412 с рис. Впервые опублик. в 1909 г. (Известия Акад. Наук, 6 серия, т. 3, № 9, стр. 623—654).

83. О влиянии качаний корабля на орудие при накате. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 61—68. (Датировано 1902 г.).

84. О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 1—301. Впервые опублик. в 1929 г.

85. О векоторых приемах приближенного интегрирования уравнений вращательного движения продолговатого сваряда. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 303—334 с рис.. Впервые опублик. в 1934 г. (Бюлл. Секции научн. работн. АНИМИ, № 1, стр. 3—30).

86. О применении методы численного интегрирования уравнений к вычислению траекторий снарядов. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 39—64. (Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, §§ 18—22). Впервые опублик. в 1920 г. (Протоколы Отделеия физико-математических наук Российской Акад. Наук. Приложение к проток. XI засед., к § 207, стр. 119—137).

87. О продольных колебавиях орудия. — Собр. трудов. 1937. Т. 4. Стр. 423—444 с рис. Впервые опублик. в 1921 г. под загл.: „О продольных колебавиях стержней“ (Известия Физического инст. при Моск. ваучном ивст., т. 1, в. 5—6, стр. 301—319).

88. О расчете прогрессивной крутизвы врезов. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 75—87. Впервые опублик. в 1921 г. Комиссией особых артиллерийских опытов.

89. Об опытах стрельбы ва качке с кавоверской лодки „Уралец“ в-1907 году. Отчет полковввка Крылова. СПб. 1909. 70 стр. с табл. (Приложение к журналу Морского технического комитета, № 20).

90. Об учете поправок при стрельбе по аэропланам. — Собр. трудов. 1955. Т. 12. Ч. 1. Стр. 302—314. Впервые опубли. в 1941 г. (Известия Воевво-морск. акад. ВМФ им. т. Ворошилова, в. 9, стр. 5—20).

91. Отмечатель или прибор для обучения наводке системы генерал-лейтенанта А. Н. Крылова. [1916]. 15 стр.

IX. Астрономия

92. Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений. — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 1—149 с рис. Впервые опубли. в 1911 г. (Известия Морск. акад., в. 1, стр. 1—161).

93. Гаусс К. Ф. Теоретическая астрономия. Лекции, читанные в Геттингене в 1820—1821 гг., записанные Купфером. Перевод с немецкой рукописи А. Н. Крылова. — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 292—452 с рис. Впервые опубли. в 1919 г.

94. Леонард Эйлер. Новая теория движения Луны. Перевод с латинского первой части книги первой и извлечений из частей второй и третьей с примечаниями и пояснениями переводчика академика А. Н. Крылова. — Собр. трудов. Дополнение к тт. 5 и 6. М.—Л. 1937. VIII, 248 стр. с рис. Впервые опубли. в 1934 г.

95. Ньютонова теория астрономической рефрактив. — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 151—225 с рис. Резюме на англ. яз., стр. 224—225. Впервые опубли. в 1935 г. (Архив истории науки и техники, 1 серия, в. 5, стр. 183—250).

96. On sir Isaac Newton's method of determining the parabolic orbit of a comet. (О методе Ньютона определения параболической орбиты кометы). — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 279—298 с рис. Впервые опубли. в 1925 г. (Monthly notices of the Royal astronom. society, v. 85, May, № 7, pp. 640—656).

97. On sir Isaac Newton's formula for the attraction of a spheroid on a point of its axis. (О формуле Ньютона для притяжения сфероидом точки, лежащей на его оси). — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 267—271 с рис. Впервые опубли. в 1925 г. (Monthly notices of the Royal astronom. society, v. 85, April, № 6, pp. 571—575).

98. Sur la variation des éléments des orbites elliptiques des planètes. [Об изменении элементов эллиптических планетных орбит]. — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 249—266 с рис. Впервые опубли. в 1915 г. (Известия Акад. Наук, 6 серия, т. 9, № 10, стр. 999—1016).

99. On a theorem of sir Isaac Newton. (Об одной теореме Исаака Ньютона). — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 273—277. Впервые опубли. в 1924 г.

(Monthly notices of the Royal astron. society, v. 84, March, № 5, pp. 392—395).

100. Судьба одной знаменитой теоремы. — Собр. трудов. 1936. Т. 6. Стр. 227—248 с рис. Тогда же опубликовано в „Архиве истории науки и техники“, 1936, 1 серия, в. 8, стр. 281—299.

Х. Физика

101. Гаусс К. Ф. Избранные труды по земному магнетизму. Перевод академика А. Н. Крылова. Ред. проф. Б. М. Яновского. Статьи Т. Н. Розе. Комментарии проф. Б. М. Яновского и Т. Н. Розе. [М.—Л.] АН СССР. 1952. 341, [1] стр. с рис., 1 портр. (Академия Наук СССР. Классики Науки).

102. О земном магнетизме. — Собр. трудов. 1947. Т. 2. Ч. 2. Стр. 7—152. Впервые опубликовано в 1922 г.

103. О распространении тока по кабелю. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 391—418 с рис. Впервые опубликовано в 1929 г. (Журн. приклад. физики, т. 6, в. 2, стр. 66—93).

104. О расчете нагревания масляного кабеля при коротком замыкании. — Собр. трудов. 1937. Т. 5. Стр. 419—435 с рис. Тогда же опубликовано в: Известиях Акад. Наук СССР, ОМОН, серия матем., 1937, № 1, стр. 3—14 с рис.

105. Северные сияния в магнитные бури. (Речь председателя в январском 1917 года общем собрании членов Русского Физ.-хим. общества). — Успехи физ. наук, 1918, т. 1, в. 1, стр. 1—24 с рис.

106. Физика в морском деле. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 36—46. Впервые опубликовано в 1914 г. (Журн. Русск. Физ.-хим. общ., 1914, т. 46, в. 1, физ. отд., стр. 1—15).

XI. История науки и техники

107. Вице-адмирал С. О. Макаров. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 126—146. Впервые опубликовано в 1944 г. (Морск. сборн., № 4, стр. 26—43).

108. Галилей как основатель механики. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 218—226. Впервые опубликовано в кн.: Галилео Галилей. 1564—1642. М.—Л. АН СССР. 1943. Стр. 57—67.

109. Жозеф Луи Лагранж. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 262—278. Впервые опубликовано в 1936 г. (Успехи матем. наук, в. 2, стр. 3—16).

110. Леонард Эйлер. Доклад, прочитанный на торжественном заседании Академии Наук СССР 5 октября 1933 г. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 192—217. Впервые опубликовано в 1933 г.

111. Мемуар Гаусса „Напряженность земной магнитной силы, приведенное к абсолютной мере“ и его значение. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 279—291. Впервые опубликовано в 1934 г. (Архив истории науки и техники, 1 серия, в. 3, стр. 183—192).

112. Мои воспоминания. М.—Л. АН СССР. 1942. 238, [2] стр. Переиздано в 1943, 1945 гг. В сокращенном виде было издано в 1949 г. под загл. „Воспоминания и очерки“ и включено в Собр. трудов. Т. 1. Ч. 1.

113. „Начала“ Ньютона. — В сб.: Ньютон. 1727—1927. Л. АН СССР. 1927. Стр. 11—45. (Академия Наук СССР. Очерки по истории знания).

114. Ньютон и его значение в мировой науке. 1643—1943. — Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 227—261. Впервые опублик. в кн.: Исаак Ньютон. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Под ред. С. И. Вавилова. М.—Л. АН СССР. 1943. Стр. 5—32.

115. Очерк развития теории корабля. — Собр. трудов. 1948. Т. 9. Ч. 1. Стр. 9—20. Впервые опублик. в 1934 г. (Труды ВНИТОСС, т. 1, в. 1, стр. 7—15. Резюме на англ. яз., стр. 156).

116. Пафиутий Львович Чебышев. Биографический очерк. М.—Л. АН СССР. 1944. 20 стр., 1 портр., 1 рис. (Академия Наук СССР. Научно-популярная серия. Биографин). В сокращенном виде вошло в Собр. трудов. 1951. Т. 1. Ч. 2. Стр. 115—125.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Общая теория качки корабля на волнении	7
Определение положения равновесия корабля, имеющего пробоину	93
Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении	115
О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером	171
О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем	238
О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней	288
Некоторые замечания о крещерах и индикаторах	315
О расчете балок, лежащих на упругом основании	360
О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе	486
О динамическом уравнивании роторов гироскопов	539
О вращательном движении продолговатого снаряда	580
Ньютонова теория астрономической рефракции	625

Приложения

От редактора	731
Алексей Николаевич Крылов. Краткий очерк жизни и деятельности. (Акад. Ю. А. Шиманский)	734
Примечания. (Проф. И. Г. Ханович)	744
Библиография основных трудов А. Н. Крылова	792

АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КРЫЛОВ
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Утверждено к печати
редколлегией серии «Классика науки»
Академии наук СССР

На шмуцтитуле портрет — гравюра на дереве
выполнен художником-гравером М. С. Беловым
Редактор издательства Н. К. Зайчик
Технический редактор А. В. Смирнова
Корректор М. А. Брайнина

Сдано в набор 24/X 1957 г. Подписано
к печати 31/I 1958 г. РИСО АН СССР
№ 2—2Р. Формат бумаги $70 \times 921/16$. Бум.
л $251/8$. Печ. л. $501/4 = 58.75$ усл. печ л. $+ 2$
вкл. Уч.-изд. л. $51.18 + 2$ вкл. (0.2 уч.
изд. л.) Изд. № 481. Тип. зак. № 346

Тираж 5000.

Цена 38 р. 10 к

Ленинградское отделение Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-164, В. О., Менделеевская лин., д. 1

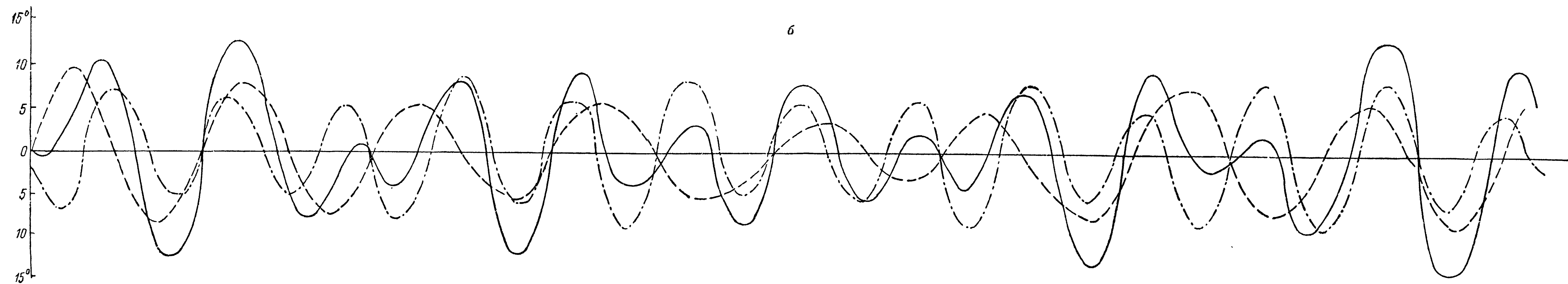
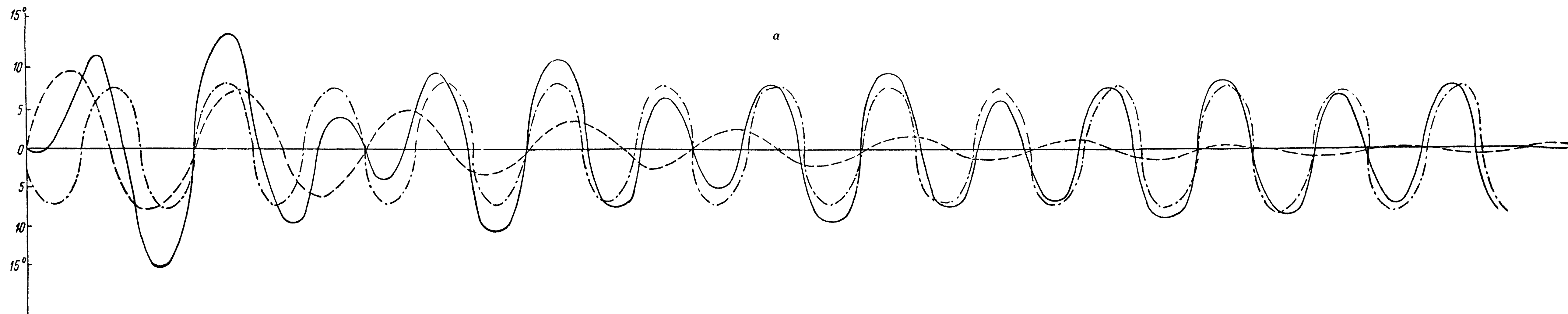
1-я тип. Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, В. О., 9 линия, д. 12

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
102	5 снизу	$\int_{-l}^{+l} x^3 y_0 dx$	$\int_{-l}^{+l} x^2 y_0 dx$
180	1 „	$x F \Omega^2$	$\kappa F \Omega^2$
394	2 сверху	$\frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$	$\frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$
400	7 „	$A_1 = B$	$A_2 = B$
430	7 „	$S = EI'''$ и $M = EI y'''$	$S = EI y'''$ и $M = EI y''$
565	1 снизу	$Ap + Bq + Br^2$	$Ap^2 + Bq^2 + Br^2$



АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КРЫЛОВ.



Фиг. 3.

